INSPER INSTITUTO DE ENSINO E PESQUISA

Programa de Mestrado Profissional em Economia

Ronaldo Takeshi Toyoshima

UTILIZANDO O MODELO DE EQUILÍBRIO COM DIVERGÊNCIAS DE OPINIÃO PARA PREVER CRASHES NO MERCADO ACIONÁRIO BRASILEIRO

São Paulo
2010

Ronaldo Takeshi Toyoshima

Utilizando o modelo de equilíbrio com divergências de opinião para prever *crashes* no mercado acionário brasileiro

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Economia do Insper Instituto de Ensino e Pesquisa, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Economia.

Área de concentração: Finanças e Macroeconomia Aplicadas

Orientador: Marco Tulio Lyrio

São Paulo

2010

Toyoshima, Ronaldo Takeshi

Utilizando o modelo de equilíbrio com divergências de opinião para prever *crashes* no mercado acionário brasileiro / Ronaldo Takeshi Toyoshima, orientador: Marco Tulio Lyrio – São Paulo: Insper, 2010.

Dissertação (Mestrado – Programa de Mestrado Profissional em Economia. Área de concentração: Finanças e Macroeconomia Aplicadas) – Insper Instituto de Ensino e Pesquisa

1. Finanças 2. Econometria

FOLHA DE APROVAÇÃO

Ronaldo Takeshi Toyoshima
Utilizando o modelo de equilíbrio com divergências de opinião para prever *crashes* no mercado acionário brasileiro

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Economia do Insper Instituto de Ensino e Pesquisa, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Economia.

Área de concentração: Finanças e Macroeconomia Aplicadas

Aprovado em: julho/2010

Banca Examinadora

Prof. Dr. Marco Tulio Lyrio
Orientador

Instituição: Insper

Prof. Dr. Marcelo Moura

Instituição: Insper

Prof. Dr. Fernando Nascimento de Oliveira

Instituição: Banco Central do Brasil

DEDICATÓRIA

À meu pai, Takeo, que não pôde presenciar esta realização.

À Sayuri, por tudo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço profundamente a minha família: minha mãe, Neuza, e meu pai, Takeo, que sempre me mostraram o valor dos estudos e se esforçaram para proporcionar toda a condição favorável para a minha formação acadêmica, profissional e pessoal.

Agradeço a minha esposa, Sayuri, por todo seu amor, incentivo e compreensão nestes anos de convivência. Sem seu apoio certamente a realização deste trabalho não seria possível.

Agradeço ao professor Marco Lyrio pela orientação, suporte e também pela compreensão a minha restrição de horários para nossas conversas.

Finalmente, agradeço aos colegas de Mestrado, Fernando, Gabriel e Fred pelo companheirismo e apoio durante o decorrer de todo este curso e ao Itaú pela bolsa de estudos.

RESUMO

TOYOSHIMA, Ronaldo Takeshi, Utilizando o modelo de equilíbrio com divergências de opinião para prever *crashes* no mercado acionário brasileiro, São Paulo, 2010, 46 f. Dissertação (Mestrado) – Insper Instituto de Ensino e Pesquisa, São Paulo, 2010.

Neste trabalho testamos, através de uma série de regressões utilizando dados do mercado acionário brasileiro, o modelo de equilíbrio com divergências de opinião de Hong e Stein (1999) para prever a assimetria na distribuição de retornos. Segundo tal modelo, as restrições a posições vendidas de alguns investidores fazem com que os preços observados no mercado em alguns casos não expressem exatamente a opinião de todos os participantes. Em particular, esta informação oculta tende a ser revelada em momentos de declínio nos preços dos ativos. Concluímos que a assimetria negativa tende a ser mais pronunciada em ativos que experimentaram (1) um aumento no seu volume negociado – o que acarreta uma maior quantidade de informação disponível e, consequentemente, maior potencial de divergências de opinião entre os participantes - e (2) retornos positivos nos meses anteriores.

Palavras-chave: modelo de divergências de opiniões, assimetria de retornos, volume negociado

ABSTRACT

TOYOSHIMA, Ronaldo Takeshi, Utilizando o modelo de equilíbrio com divergências de opinião para prever *crashes* no mercado acionário brasileiro, São Paulo, 2010, 46 f. Dissertation (Mastership) – Insper Instituto de Ensino e Pesquisa, São Paulo, 2010.

We test, through a series of regressions using brazillian capital market data, the differences of opinion model of Hong and Stein (1999) for forecasting skewness in the distribution of market returns. According to such model, due to short-sales constraints of some investors, the prices do not reflect the exact opinion of all participants. In particular, this hidden information tends to come out during market declines. We conclude that the skewness is most pronounced in stocks that have experienced (1) an increase in trading volume – which means that more information is available and, thereby, a higher potencial of differences of opinion of participants – and (2) positive returns over the last months.

Keywords: differences of opinion model, skewness, trading volume

Sumário

1. Introdução 10
2. Referencial Teórico 14
2.1. O Modelo 14
A. Estrutura da informação e mecanismo de fixação de preços 14
B. O caso padrão das expectativas racionais 17
2.2. Resolvendo o modelo de divergência de opiniões 17
A. Análise do instante 1: O potencial da informação não revelada 17
B. Análise do instante 2: informação oculta prévia pode ser revelada 19
C. Implicações da assimetria de retornos 24
3. Descrição dos Dados 28
3.1. Fonte dos dados 28
3.2. Periodicidade e período dos dados 28
3.3. Escolha dos Ativos 28
3.4. Descrição das variáveis e análise descritiva dos dados 29
4. Resultados 33
5. Conclusão 38
6. Apêndice 41
A. Prova dos Lemas 41

Lista de figuras

Figura 1 – Distribuição dos sinais de *A* e *B* antes do instante 1 16
Figura 2 – Partição do espaço dependente dos sinais de A e B 23
Figura 3 – Distribuição dos sinais de *A* e *B* antes do instante 1 com *H* > *V* 27
Figura 4 – Gráfico da evolução das variáveis NCSKEW, DUVOL e TURNOVER da série do Ibovespa 32

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Resumo descritivo das variáveis do modelo 31
Tabela 2 – Correlações entre as variáveis do modelo 32
Tabela 3 – Resultado da regressão da variável NCSKEW com dados em painel utilizando retornos ajustados a mercado, beta-ajustados e excesos de retorno. Os valores em parenteses representam a estatística *t* 33
Tabela 4 – Resultado da regressão da variável NCSKEW com dados em painel por tamanho da empresa. Os valores em parenteses representam a estatística *t* 35
Tabela 5 – Resultado da regressão da variável DUVOL com dados em painel utilizando retornos ajustados a mercado, beta-ajustados e excesos de retorno. Os valores em parenteses representam a estatística *t* 36
Tabela 6 – Resultado da regressão da série temporal do Ibovespa com e sem dados sobrepostos (*overlapping*). Os valores em parenteses representam a estatística *t* 37

Utilizando o modelo de equilíbrio com divergências de opinião para prever *crashes* no mercado acionário brasileiro

1. Introdução

Diversos estudos relacionados à dinâmica dos mercados acionários têm sido realizados na literatura de finanças. Questões referentes à volatilidade dos retornos das ações, à disseminação de informações entre investidores e ao volume negociado dos ativos têm sido abordadas com frequência nestes trabalhos. A previsão de oscilações bruscas nos preços das ações, também conhecido pelo termo em inglês *crash*, também tem sido foco de estudos na literatura recente.

Segundo Hong e Stein (1999), *crash* é a expressão utilizada para descrever um movimento abrupto inesperado em preços de ações que ocorre sem uma correspondente publicação de novo evento extremo relacionado. Esta definição é comprovada em estudos como os de Cutler, Poterba e Summers (1989) que concluiram que as maiores variações nos preços das principais ações listadas no S&P 500 no período pós-guerra não estão associadas à divulgação de novas informações. French e Roll (1986) também demonstraram que é muito difícil associar movimentos dos preços de ações à divulgação de novas informações públicas.

O *crash* é contagioso ao longo do mercado, isto é, não envolve somente a queda abrupta nos preços de um único ativo, mas sim numa queda generalizada dos preços de toda uma classe de ações fortemente correlacionada. Esta hipótese foi verificada por Duffee (1995) num estudo que comprovou o aumento da correlação entre ações em período de pessimismo no mercado. Em geral, este movimento é negativo, ou seja, as maiores variações nos preços das ações são de queda. Este fato gera uma assimetria negativa na distribuição dos retornos destes ativos, ou em termos de risco, uma "volatilidade assimétrica", que pode ser entendida como uma tendência de aumento na volatilidade para retornos negativos.

Não há um consenso a respeito dos mecanismos econômicos responsáveis pela existência desta assimetria negativa nos retornos de mercado. No entanto, dentre as diversas abordagens existentes destacam-se três teorias citadas a seguir:

1. A teoria da alavancagem financeira foi abordada inicialmente por Black (1976) e Christie (1982). Segundo esta teoria, a queda no preço de uma ação aumenta a

alavancagem financeira desta empresa, na medida que altera sua proporção entre capital de terceiros e capital próprio. Com um grau de endividamento maior, a ação torna-se mais arriscada, determinando, desta forma, um incremento na volatilidade de seus retornos subsequentes. Esta teoria foi contraposta por Schwert (1989) e Bekaert e Wu (2000), os quais averiguaram que os efeitos de alavancagem financeira não são suficientes quantitativamente para explicar o comportamento da volatilidade das ações;

2. A teoria da "retroalimentação da volatilidade" foi desenvolvida por Pindyck (1984) e Campbell e Hentschel (1992). Nesta teoria, variações na volatilidade dos retornos são a causa para alterações nos preços das ações (contrariamente à teoria da alavancagem). Segundo esta teoria, a publicação de novas informações no mercado, sejam elas positivas ou negativas, aumenta a volatilidade dos retornos das ações. Incrementos esperados na volatilidade dos retornos aumentam o retorno exigido pelos investidores levando a uma queda no preço do ativo. Seguindo esta linha de raciocínio, uma cadeia de novas informações positivas a respeito do pagamento de dividendos de uma determinada empresa leva a um aumento do volume negociado de suas ações que, por sua vez, implica em um incremento na volatilidade dos retornos e, consequentemente, a um aumento no retorno exigido pelos investidores; desta forma, o efeito positivo da nova informação é parcialmente reduzido pelo incremento no prêmio de risco da ação. Para uma cadeia de novas informações negativas, o efeito direto da informação e o efeito do aumento do prêmio de risco se somam amplificando o movimento de queda no preço da ação. Esta teoria foi questionada em estudos posteriores como os de Cutler, Poterba e Summers (1989) e French e Roll (1986) que demonstraram que é muito difícil associar movimentos dos preços de ações à divulgação de novas informações públicas;
3. Outra teoria foi desenvolvida por Hong e Stein (1999) e é baseada no modelo de equilíbrio com divergências de opinião. Este modelo possui três premissas básicas: (1) há divergências de opinião entre os investidores em relação às novas informações do mercado; (2) alguns investidores não podem assumir posições vendidas em ações e (3) há um grupo de arbitradores racionais e neutros ao risco. Este modelo tenta explicar oscilações bruscas nos preços de ações e o eventual contágio de uma ação a partir do movimento ocorrido em outro papel. Um dos pressupostos do modelo é o de que a assimetria negativa dos retornos é mais

pronunciada após períodos com grande volume de negociação. Este volume negociado representa a intensidade de desacordo entre os investidores.

Existem diferenças importantes entre os modelos de alavancagem financeira e retroalimentação da volatilidade e o modelo de Hong e Stein (1999). Enquanto os dois primeiros trabalham com uma estrutura de agente representativo do mercado, o último adota as assimetrias de informações entre os investidores como tema central do estudo. Outra diferença relevante entre os modelos é a abordagem da variável de volume negociado. Enquanto no modelo de equilíbrio com divergências de opinião o volume negociado é relacionado diretamente à intensidade da assimetria negativa nos retornos das ações, nos modelos de alavancagem e retroalimentação a variável referente ao volume de negócios não é explicitamente citada.

Neste trabalho, desenvolvemos um estudo empírico motivado pelo modelo de equilíbrio com divergências de opinião desenvolvido por Hong e Stein (1999) utilizando dados do mercado acionário brasileiro. Para isso, utilizamos uma série de regressões com dados em painel com o intuito de prever a assimetria nos retornos diários dos preços de ações. Desta forma, associamos a assimetria condicional na distribuição de retornos dos preços das ações a uma medida de expectativa de *crashes* no mercado.

Uma das variáveis chave utilizada para este modelo de previsão é a variação da relação entre o volume negociado e o volume disponível (*outstanding*) de um determinado papel. Ou seja, de posse desta relação para um determinado período, como, por exemplo, de 01 de janeiro a 31 de março, podemos prever a assimetria nos retornos diários para os próximos três meses – de 01 de abril a 30 de junho. É esperado que empresas que apresentem incrementos expressivos em suas quantidades de ações negociadas tenham uma assimetria negativa mais acentuada.

Na especificação do modelo também utilizamos algumas variáveis de controle. Estas variáveis podem ser divididas em dois grupos. No primeiro, estão aquelas que, como a relação entre o volume negociado e o volume disponível, capturam influências da variação do tempo na assimetria. Segundo Hong e Stein (1999), dentre estas variáveis, a mais significante é o retorno passado. Os autores estimaram que quanto maior for o retorno passado, mais negativa é a assimetria prevista. O segundo grupo de variáveis são aquelas ligadas às características próprias das empresas como a capitalização de mercado da empresa.

No presente estudo, utilizamos dados de janeiro de 2000 a dezembro de 2009 para as principais empresas negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo (Bovespa). A partir da

amostra, foram estudados os possíveis fatores determinantes do comportamento dos retornos dos papéis. Em particular, o volume negociado e o retorno histórico se mostraram bastante significativos no exercício de previsão da assimetria na distribuição de retornos dos ativos.

A dissertação prossegue da seguinte forma: na próxima seção é apresentada uma descrição completa do modelo de equilíbrio com divergências de opinião. Na seção 3 são apresentados detalhes da amostra utilizada e comentários a respeito da construção das variáveis. A seção 4 apresenta os resultados obtidos e a seção 5 conclui o trabalho.

2. Referencial Teórico

2.1. O Modelo

A. Estrutura da informação e mecanismo de fixação de preços

Como mencionado na introdução, o modelo de divergências de opinião de Hong e Stein (1999) associa oscilações bruscas nos preços das ações ao incremento nos seus volumes negociados e aos seus retornos históricos. Este modelo trabalha com três potenciais negociadores para o ativo: os investidores *A* e *B*, e um grupo de arbitradores racionais neutros ao risco. Os investidores *A* e *B* se revezam recebendo sinais informativos sobre o dividendo do ativo. Em particular, no primeiro instante, o investidor *B* observa S_B e, em seguida, no instante seguinte, o investidor *A* observa S_A. Além disso, e aqui se encontra uma das principais premissas do modelo, os investidores *A* e *B* possuem restrições impeditivas quanto à tomada de posições vendidas[1]. Esta restrição não se aplica ao grupo de arbitradores neutros ao risco de modo que estes podem assumir tanto posições compradas quanto vendidas oferecendo, inclusive, suporte às demandas dos investidores. A partir de uma perspectiva objetiva e racional, podemos considerar que os dois sinais, S_A e S_B, são igualmente informativos, sendo o dividendo do ativo dado por

$$D = (S_A + S_B)/2 + \epsilon \tag{1}$$

onde $\in$ representa um choque normalmente distribuido com média zero e variância normalizada em 1.

Para fins de entendimento do mecanismo do modelo de divergências de opinião, trabalharemos com quatro instantes de tempo, aos quais denominaremos de instantes 0, 1, 2 e 3. O instante 0 representa o início dos tempos, no qual se tem apenas a expectativa *ex ante* dos participantes do mercado a cerca do valor do ativo. Adicionalmente, vamos supor o seguinte ambiente nos instantes 1 e 2: os investidores *A* e *B*, juntamente com os arbitradores, estão juntos numa sala com um leiloeiro. Em um determinado momento, o leiloeiro anuncia um preço inicial p_t e os participantes respondem anunciando suas demandas. Em virtude das restrições a posições vendidas, os investidores *A* e *B* só se pronunciam se suas exigências

[1] As restrições a posições vendidas podem ser encaradas como restrições institucionais impostas a, por exemplo, fundos mútuos que por características regulatórias não podem assumir posições vendidas.

forem positivas, caso contrário, eles permanecem quietos. Os arbitradores, os quais não enfrentam restrições de venda a descoberto, são livres para anunciarem demandas positivas ou negativas. Um ponto importante a ser mencionado é que os arbitradores são capazes de observar todas as demandas anunciadas pelos investidores *A* e *B*.

A regra de funcionamento do leilão é bastante simples: o leiloeiro começa anunciando um alto preço de largada para o ativo que é conhecido como sendo superior ao maior valor esperado de todos os participantes. A este elevado preço, o excesso de demanda líquida para o ativo é certamente negativo, ou seja, só há ordens de venda a este nível de preço. Em seguida, o leiloeiro começa a alterar gradualmente o preço. Sua regra de ajuste é tal que enquanto o excesso de demanda permanecer negativo, ele abaixa o preço. Por outro lado, se ele chega a um ponto onde o excesso de demanda é positiva, ele aumenta o preço. Este processo continua até que o mercado entre em equilíbrio - ou seja, até que o leiloeiro encontre um preço tal que o excesso de demanda para o ativo seja zero.

Como ficará claro adiante, este mecanismo de leilão nos permite chegar a um caminho simples para fixação do preço de equilíbrio do ativo em cada data. Além disso, é interessante ressaltar que, no equilíbrio, o investidor (*A* ou *B*) que possui o sinal mais otimista para determinada data fica comprado no ativo e tem seu sinal completamente revelado. Em contrapartida, o investidor com o sinal menos positivo não fica com nenhuma parcela do ativo e pode ter seu sinal revelado ou não.

Outra premissa importante do modelo é que os investidores *A* e *B* acreditam erroneamente que somente os seus próprios sinais possuem algum tipo de informação útil. Esse viés comportamental pode ser interpretado como uma forma de excesso de confiança, que induz às divergências de opinião entre os vários agentes do modelo quanto ao valor do ativo. Assim, por exemplo, quando o investidor *A* observa S_A no instante 2, ele acredita que o dividendo no tempo 3 tem um valor esperado de S_A, independentemente de qualquer informação que ele possa inferir sobre S_B. Assumindo por simplicidade que o investidor *A* tem uma utilidade do tipo CARA (*Constant Absolute Risk Aversion*) com um coeficiente de aversão ao risco de um, se lhe é oferecido o ativo no instante 2 a um preço de p_2, sua demanda, em função da restrição a posições vendidas, será dada por

$$Q_A(p_2) = \max \ [S_A - p_2 \, , 0] \tag{2}$$

A notação minúscula p_2 é utilizada para indicar que estamos tratando de um "julgamento" de preços que pode não ser o preço de equilíbrio. As notações maiúsculas P_1 e P_2 serão utilizadas

para se referirem aos preços de equilíbrio que são realizados nos instantes 1 e 2, respectivamente. Da mesma forma, a demanda do investidor *B* para o ativo no instante *t* (*t* = 1, 2), se lhe é oferecido o ativo a um preço p_t, será[2]

$$Q_B(p_\mathrm{t}) = \max \ \ [S_B - p_\mathrm{t}\,, 0] \tag{3}$$

Antes de ser realizado no instante 1, S_B é uniformemente distribuído no intervalo [0, 2*V*]. Assim, a expectativa racional de S_B no instante 0 é $\mathrm{E}_0[S_B] = V$. Da mesma forma, antes de ser realizado no instante 2, S_A é uniformemente distribuído em [*H*, *H* + 2*V*], de modo que $\mathrm{E}_0[S_A] = \mathrm{E}_1[S_A] = H + V$. Note que *V* pode ser interpretado como uma medida da variância da notícia que é recebida pelos investidores, enquanto *H* pode ser interpretado como uma medida *ex ante* da heterogeneidade das opiniões dos investidores (vide Figura 1 abaixo). No que se segue, assumimos que $0 \leq H \leq 2V$. No entanto, os limites impostos em *H* não são determinantes para nossos resultados. Poderíamos considerar também os casos em que *H* ultrapassa 2*V*, mas isso pouco acrescentaria à análise.

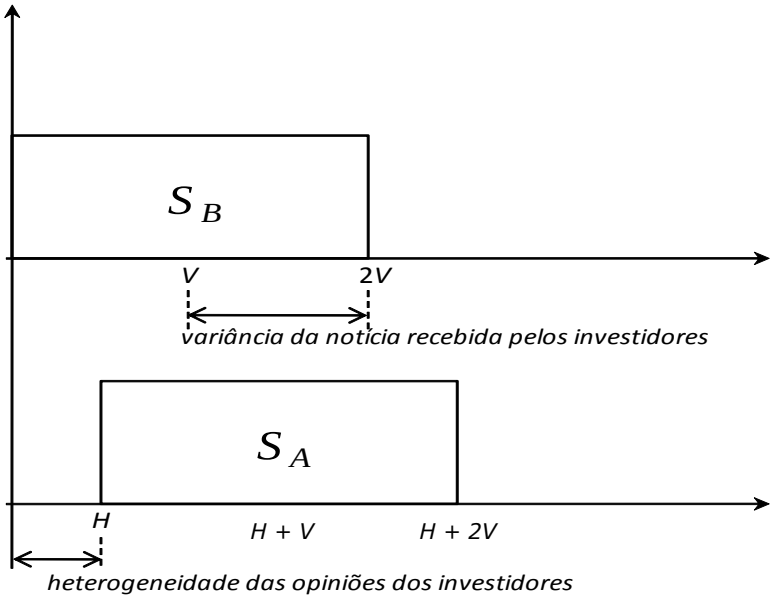

Figura 1 – Distribuição dos sinais de *A* e *B* antes do instante 1

Em virtude da neutralidade ao risco dos arbitradores, podemos sem perda de generalidade, definir o preço no instante 0 como sendo

$$P_0 = (\mathrm{E}_0[S_A] + \mathrm{E}_0[S_B])/2 = (H + V + V)/2 = V + H/2 \tag{4}$$

[2] Por simplicidade, os autores assumiram que a demanda do investidor *B* para o ativo no instante 1 depende somente de sua expectativa em relação ao dividendo final não levando em consideração a expectativa de previsão no instante 2.

Esta é apenas a expectativa *ex-ante* dos arbitradores a respeito do dividendo final antes de *A* ou *B* receberem os seus sinais.

B. O caso padrão das expectativas racionais

Antes de entrarmos na discussão a respeito da solução do modelo de divergências de opinião, é importante fazer um breve parentese a cerca do caso em que todos os participantes do mercado são racionais. Neste caso, os investidores *A* e *B*, assim como os arbitradores, reconhecem que a melhor estimativa para o dividendo final (condicionado a S_A e S_B) é dada por $(S_A + S_B)/2$, ao contrário dos seus próprios sinais. Desta forma, quando os investidores *A* e *B* são racionais, as restrições a posições vendidas não importam. Os preços refletem inteiramente todo tipo de informação assim que esta se torna disponível aos investidores:

$$P_1 = (S_B + H + V)/2 \tag{5a}$$

$$P_2 = (S_A + S_B)/2 \tag{5b}$$

Assim sendo, dado que S_A e S_B são simetricamente distribuídos e possuem a mesma variância, os retornos são homocedásticos e simetricamente distribuídos nos instantes 1 e 2.

2.2. Resolvendo o modelo de divergência de opiniões

A. Análise do instante 1: O potencial da informação não revelada

Voltando à situação em que há divergências de opinião, vamos inicialmente examinar o que ocorre no instante 1 quando a única informação privada é a pertencente ao investidor *B*. Neste instante, há dois possíveis casos.

Caso I: a informação do investidor *B* é revelada, onde, então, temos:

$$P_1 = (S_B + H + V)/2 \tag{6}$$

Caso II: a informação do investidor *B* permanece oculta, onde, então, temos:

$$P_1 = E_1[S_B|\mathrm{NR}]/2 + (H + V)/2 \tag{7}$$

Onde $E_1[S_B|\mathrm{NR}]$ é a esperança condicional no instante 1 de S_B, dado que S_B não foi revelado.

Dado o mecanismo de funcionamento do leilão proposto anteriomente, o Caso II ocorre somente se $S_B \leq P_1$, ou seja, o valor do ativo para o investidor *B* não excede o preço de mercado pois, caso contrário, ele teria anunciado uma demanda diferente de zero durante o processo, expondo seu sinal para os arbitradores. Isto sugere que há um valor limite para S_B – denotado por S_B^* - no qual se S_B for maior que S_B^*, o equilíbrio envolve a revelação de S_B.

Dado que há revelação de informação para todos os valores de $S_B > S_B^*$, então, o valor esperado de S_B condicionado à sua não-revelação, $E_1[S_B|NR]$, deve ser igual a $S_B^*/2$. Isso implica que o preço do ativo no Caso II é dado por

$$P_1 = S_B^*/4 + (H + V)/2 \tag{8}$$

No entanto, o Caso II só ocorre se $S_B \leq P_1$; então, igualando o valor de S_B^* a P_1 temos o primeiro lema proposto por Hong e Stein (1999):

Lema 1 *Seja o valor limite de S_B*

$$S_B^* = 2\,(V + H)/3 \tag{9}$$

Então para todo valor de $S_B > S_B^*$ há revelação de S_B, isto é, estaremos no Caso I.

No Caso I, em que há revelação de S_B, há dois cenários possíveis: no primeiro, S_B é muito alto – em particular, $S_B > (H + V)$ – o que implica que o valor do sinal do investidor *B* é maior que o valor da expectativa *ex ante* do investidor *A*. Como o leiloeiro começa o processo com um preço alto e vai diminuindo gradativamente, inicialmente este recebe apenas ordens de venda dos arbitradores já que o preço é maior que o valor justo para todos os participantes. Quando o leiloeiro anuncia o preço $p_1 = S_B$, o investidor *B* se manifesta, revelando seu sinal. Neste ponto, os arbitradores recebem toda a informação disponível: eles reconhecem que o valor justo do ativo é, na verdade, $(S_B + H + V) / 2$, então quando $p_1 = S_B$, eles continuam suas ordens de venda. Desta forma, o preço continua a cair até atingir $(S_B + H + V) / 2$, quando o mercado entra em equilíbrio e a negociação se encerra. Neste cenário, o investidor *B* (mais otimista) fica com uma posição comprada.

No segundo cenário do Caso I, S_B é moderadamente alto, isto é, $S_B^* < S_B \leq (H + V)$. Agora o preço anunciado pelo leiloeiro pode cair ainda mais que o investidor *B* permanecerá calado. Para qualquer preço p_1 nesta região de silêncio, e abaixo de $2V$, a estimativa

condicional do payoff final para os arbitradores é E[S_B | $S_B \leq p_1$] / 2 + (H + V) / 2 = p_1 / 4 + (H + V) / 2. Isso implica que quanto mais tempo o investidor B permanecer quieto, mais baixa se torna a estimativa dos arbitradores. Além disso, enquanto esta estimativa permanecer abaixo de p_1, os arbitradores terão uma demanda infinitamente negativa. Por sua vez, isto faz com que o leiloeiro abaixe o preço p_1 cada vez mais até que se atinja S_B, momento este em que o investidor B se manifesta, revelando seu sinal. Esta é uma boa notícia para os arbitradores pois eles percebem que estão no Caso I e não no Caso II e, então, sua estimativa salta discretamente para (S_B + H + V) / 2. Como resultado, há agora um excesso de demanda positivo, e o leiloeiro é forçado a aumentar o preço até encontrar a nova estimativa dos arbitradores e a negociação se encerrar.

Se, entretanto, $S_B \leq S_B^*$, o investidor B não se manifesta e S_B permanece oculto. Mais precisamente, dado o mecanismo de funcionamento do leilão temos que

Lema 2 *Para todos os valores $S_B \leq S_B^*$, o equilíbio envolve um resultado único para o Caso II, onde S_B permanece oculto e onde*

$$P_1 = 2\,(H + V)/3 \tag{10}$$

A probabilidade ex ante de liquidação neste equilíbrio é (H + V) / 3V. Isto é, o equilíbrio é mais provável quando a heterogeneidade de opiniões (parâmetro H) é maior.

Neste caso, o leilão ocorre conforme segue: o leiloeiro vai diminuindo o preço p_1 como antes. Mas, desta vez, antes de p_1 atingir S_B e, portanto, antes do investidor B se manifestar, o preço atinge S_B^*. Quando $p_1 = S_B^*$, a estimativa de valores dos arbitradores, p_1 / 4 + (H + V) / 2, é igual ao preço corrente. Então o mercado entra em equilíbrio e a negociação se encerra antes do investidor B se manifestar.

B. Análise do instante 2: informação oculta prévia pode ser revelada

A conclusão final da análise no instante 1 é que se S_B for suficientemente baixo, ele pode não ser revelado imediatamente. No instante 2, a meta principal é mostrar que uma baixa sinalização do investidor A, S_A, pode influenciar ainda mais para que S_B seja revelado. Portanto, o foco de nossa análise acontecerá no cenário em que S_B permanece oculto, ou seja, o Caso II. Adicionalmente, todos os outros cenários menos interessantes também serão

analisados a fim de fornecer uma completa descrição da distribuição dos retornos em ambos os instantes de tempo (1 e 2).

B.1. Caso I: o sinal do investidor *B* foi revelado no instante 1

Se S_B já foi revelado, a análise no instante 2 é muito semelhante à realizada no instante 1. Se o sinal do investior *A*, S_A, é relativamente alto, então ele será revelado no instante 2. No entanto, se ele for suficientemente baixo, ele pode permanecer oculto.

Assim sendo, temos que:

Lema 3 *Assuma que S_B foi revelado no instante 1. Então o valor limite para S_A é*

$$S_A^* = (2S_B + H)/3 \tag{11}$$

Para todos os valores de $S_A > S_A^*$, S_A também é revelado no instante 2 e

$$P_2 = (S_A + S_B)/2 \tag{12}$$

Em contrapartida, se $S_A \leq S_A^*$, temos que:

Lema 4 *Assuma que S_B foi revelado no instante 1. Se $S_A \leq S_A^*$, o equilíbrio no instante 2 requer um resultado em que S_A permanece oculto e onde*

$$P_2 = (2S_B + H)/3 \tag{13}$$

B.2. Caso II: o sinal do investidor *B* permaneceu oculto no instante 1

Até este ponto, analisamos os casos em que S_B foi revelado no instante 1. Agora, entramos nos casos em que S_B ainda não foi revelado, onde a análise no instante 2 é mais interessante e onde se encontra o ponto alto do modelo de Hong e Stein (1999). Aqui, analisaremos a relação no instante 2 entre a realização de S_A e o conjunto de novas informações que surgem para S_B. Os autores caracterizam os resultados deste caso em quatro lemas, os quais fornecem uma completa descrição das possíveis saídas dos parâmetros no instante 2.

Primeiramente, se o investidor *A* recebe boas notícias no instante 2, ou seja, se S_A se tornar maior que sua expectativa *ex ante*, nenhuma informação nova a respeito de S_B é revelada. A despeito disso, temos que

Lema 5 *Assuma que S_B permaneceu oculto no instante 1. Se $S_A \geq (H + V)$, então S_A é revelado e S_B continua abaixo do antigo valor de corte no instante 1, S_B^*. O preço de equilíbrio neste caso é dado por*

$$P_2 = (H + V)/6 + S_A/2 \tag{14}$$

Intuitivamente, podemos perceber que isto faz sentido, pois se o investidor *B* estava tão pessimista em relação a expectativa para S_A para não entrar no mercado e revelar seu sinal no instante 1, ele certamente não entrará no instante 2 se o investidor *A* se tornou ainda mais otimista e a distância entre ambos aumentou.

Agora, se o investidor *A* recebeu uma má notícia no instante 2, ou seja, se $S_A < (H + V)$, é possível que S_B possa estar situado abaixo de seu suporte inicial. Isto é, pode ser que $S_B \leq S_B^{**}$, onde S_B^{**} representa um novo valor limite abaixo de S_B^*. Desta forma, se antes tínhamos $S_B^* = 2\,(H + V)/3$, agora temos $S_B^{**} = 2\,S_A/3$. Neste caso, S_B continua oculto mas há uma revelação parcial de sua informação ao mercado dado que um novo patamar é conhecido para seu valor. Para este caso, temos que

Lema 6 *Assuma que S_B permaneceu oculto no instante 1 e que $S_A < (H + V)$, então o novo valor limite para o sinal do investidor B é*

$$S_B^{**} = 2S_A/3 \tag{15}$$

Se $S_B \leq S_B^{**}$, então S_A é revelado e o preço neste caso é dado por

$$P_2 = 2\,S_A/3 \tag{16}$$

Logo, se S_B é pequeno o suficiente em relação a S_A, ele pode permanecer parcialmente oculto no instante 2. Por outro lado, se S_B for superior ao novo valor limite S_B^{**}, ele será completamente revelado. De fato, há dois possíveis cenários quando S_B é completamente revelado. Primeiro, vamos analisar o caso em que S_B é revelado enquanto S_A permanece oculto abaixo do valor limite S_A^*.

Para este caso, temos que

Lema 7 *Assuma que S_B permaneceu oculto no instante 1 e que S_A < (H + V). Assim como no Lema 3, o valor limite para S_A é*

$$S_A^* = (2S_B + H)/3 \tag{17}$$

Se $S_A \leq S_A^*$, e simultaneamente S_B > H, então S_B é completamente revelado e o preço neste caso é dado por

$$P_2 = 2\,(S_B + H)/3 \tag{18}$$

Alternativamente, S_B e S_A podem ser revelados. Neste caso, temos que

Lema 8 *Assuma que S_B permaneceu oculto no instante 1. Para qualquer parâmetro ainda não analisado nos lemas 5 a 7, ambos S_A e S_B são completamente revelados no instante 2. O preço neste caso é dado por*

$$P_2 = (S_A + S_B)/2 \tag{19}$$

O que podemos concluir desta análise é que mantendo fixa a atual realização de S_B, quanto menor for o valor de S_A mais informação sobre S_B é revelada. Isto é perceptível nas duas frentes analisadas: primeiro, quanto menor for o valor de S_A, maior é a probabilidade de S_B ser totalmente revelado; segundo, mesmo que S_B não seja totalmente revelado, quanto menor for o valor de S_A menor será a porção de S_B que permanecerá oculta.

Segundo os autores, esta característica do modelo – a relação no instante 2 entre a realização de S_A e o conjunto de novas informações que surgem para S_B – incorpora toda a intuição econômica que os mesmos pretendiam capturar. Essencialmente, o modelo de divergências de opinião analisa o impacto da mudança de pensamento por parte do investidor previamente mais otimista (investidor *A*) na decisão do investidor previamente neutro (investidor *B*). A medida que o investidor *B* se torna disposto a oferecer suporte de compra e o investidor *A* sai do mercado é um dado importante aos arbitradores.

A Figura 2 abaixo ilustra um resumo de todos os resultados encontrados até este momento. Ela mostra como o espaço pode ser particionado nas seis regiões descritas anteriormente.

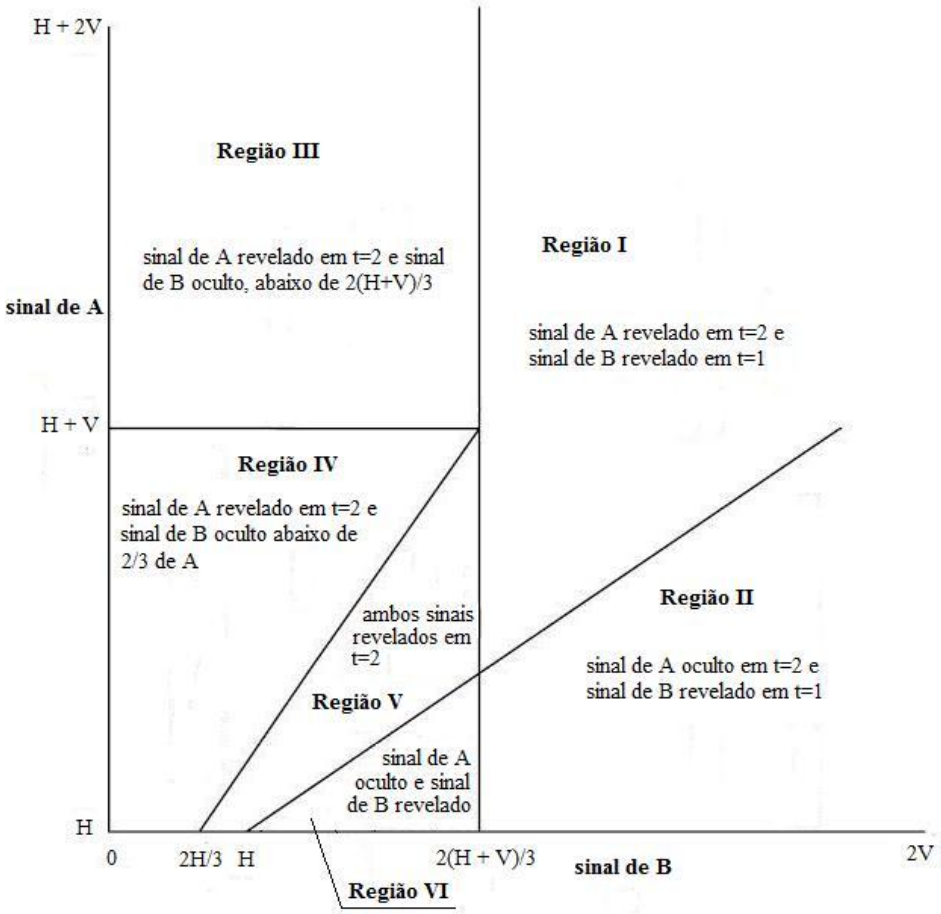

Figura 2 – Partição do espaço dependente dos sinais de A e B

Primeiramente, pode-se perceber no canto superior direito da figura, na Região I, o caso em que os dois sinais, S_A e S_B, são superiores aos seus limiares. Neste caso, temos que S_B é revelado no instante 1 e S_A é revelado no instante 2. No canto inferior direito, na Região II, temos o caso em que S_B é superior ao seu limiar, sendo, portanto, revelado no instante 1, e S_A é menor que S_A^*; neste caso, o sinal de A permanece oculto. A inclinação da reta que separa estes dois casos vem da relação de S_A^* com S_B ($S_A^* = (2S_B + H)/3$). No canto superior esquerdo, na Região III, temos o caso em que S_A é superior à sua expectativa *ex ante* ($V + H$) e, portanto, é revelado no instante 2 e o sinal de B permanece oculto (abaixo de S_B^*). Na Região IV, o sinal de A é revelado no instante 2 por ser maior que o sinal de B, que, por sua vez, é inferior ao novo patamar $S_B^{**} = 2\,S_A/3$. Esta relação determina o coeficiente da reta que separa esta região da Regiao V. Nesta região, há revelação de ambos os sinais no instante 2

pois é onde temos $2H/3 < S_B < 2(V+H)/3$ e, para uma dada realização de S_B, $S_A \in ((2S_B + H)/3\,, 3\,S_B/2)$. Desta forma, S_A e S_B não são nem tão distantes, nem tão próximos. Na região VI, temos que $S_A < S_A^*$ e $S_B > H$, sendo, portanto, o sinal de *B* revelado e o sinal de *A* não.

C. Implicações da assimetria de retornos

A simples resolução do modelo de divergências de opinião pode não deixar clara a ligação deste com os efeitos mencionados na introdução como a observação de assimetria negativa em movimentos extremos e a ligação do volume negociado com o coeficiente de assimetria. Isto posto, Hong e Stein (1999) propõem algumas maneiras de se verificar esses fenômenos associados ao seu modelo.

C.1. Assimetria em movimentos extremos

A comprovação da existência de assimetria em movimentos extremos pode ser feita calculando-se os maiores movimentos possíveis – tanto de alta quanto de baixa – dos preços nos instantes 1 e 2. Primeiramente, considerando-se a variação de preços no instante 1 como sendo

$$R_1 = P_1 - P_0 \tag{20}$$

temos que o maior valor de alta para R_1, que denotaremos como $BIG^U(R_1)$ é obtido quando S_B apresenta seu valor máximo (conforme estabelecido anteriormente, $2V$) e é completamente revelado no instante 1. Neste cenário, temos que $BIG^U(R_1) = V/2$ [3]. Analogamente, o maior valor possível (em módulo) de baixa para R_1, $BIG^D(R_1)$, é dado por $BIG^D(R_1) = V/3 - H/6$ [4], que é estritamente inferior a $BIG^U(R_1)$. Desta forma, temos que movimentos extremos de queda nos preços dos ativos são menores que os de alta no instante 1. Isto ocorre porque se S_B é muito baixo, ele não é totalmente revelado. Portanto, temos que, para o instante 1, a assimetria tende a ser positiva, o que é o oposto ao que estamos tentando demonstrar. Novamente, esta é uma consequência direta do fato das notícias ruins estarem ocultas no primeiro instante.

Consideraremos agora a variação de preços no instante 2

[3] $BIG^U(R_1) = P_1 - P_0 = (H + V + 2V)/2 - (V + H/2) = V/2$
[4] $BIG^D(R_1) = P_1 - P_0 = 2(H+V)/3 - (V + H/2) = -V/3 + H/6$

$$R_2 = P_2 - P_1 \tag{21}$$

O maior movimento de alta possível, denotado agora por $BIG^U(R_2)$, é igual a $V/2$[5]. Este valor reflete a maior realização possível de S_A, no cenário em que S_A encorpora boas notícias e nenhuma informação de S_B é revelada. No entanto, agora o maior valor possível de queda, $BIG^D(R_2)$, é dado por $2V/3$[6], que é estritamente superior a $BIG^U(R_2)$. A razão para que o movimento extremo de queda seja superior (em módulo) ao movimento extremo de alta no instante 2 é que agora aquele representa não somente toda a revelação do menor valor possível da informação do investidor *A*, mas também parte da informação do investidor *B* que estava oculta no instante 1.

Portanto, enquanto os retornos no instante 1 sugerem uma assimetria positiva em sua distribuição, os retornos no instante 2 sugerem uma assimetria negativa mais forte devido ao fato da variância neste instante ser superior à observada no instante anterior.

C.2. Coeficiente de Assimetria

Uma outra maneira de se medir a assimetria na distribuição de retornos proposta por Hong e Stein (1999) é através do cálculo do terceiro momento da distribuição, ou coeficiente de assimetria. Em seu estudo, os autores mostram que, para o instante 1, considerando as propriedades de R_1 para movimentos extremos analisadas anteriormente,

Lema 9 *Para todos os valores possíveis de H e V, temos que* $\mathrm{E}[R_1^3] \geq 0$.

Para o instante 2, o retorno R_2 tem seu coeficiente de assimetria condicionado ao fato de S_B ter sido revelado ou não no instante anterior. Mais precisamente, se S_B permaneceu oculto no primeiro instante, então o coeficiente de assimetria de R_2 é negativo. Por outro lado, se S_B foi revelado no instante 1, o coeficiente de assimetria de R_2 é levemente positivo. Neste sentido, temos que

---

[5] $BIG^U(R_2)$ ocorre quando S_A é igual ao máximo valor possível, ou seja, $H + 2V$. Neste cenário, $P_2 = S_A/2 + (H+V)/6$ (vide Lema 5) e $P_1 = 2(H+V)/3$ (vide Lema 2). Desta forma, $BIG^U(R_2) = P_2 - P_1 = (H+2V)/2 + (H+V)/6 - 2(H+V)/3 = 3V/6 = V/2$

[6] $BIG^D(R_2)$ ocorre quando S_A é igual ao menor valor possível, ou seja, H. Neste cenário, $P_2 = 2S_A/3$ (vide Lema 6) e $P_1 = 2(H+V)/3$ (vide Lema 2). Desta forma, $BIG^D(R_2) = P_2 - P_1 = 2H/3 - 2(H+V)/3 = -2V/3$

Lema 10 *Condicionado a S_B ter permanecido oculto no instante 1, temos que* $\mathrm{E}[R_2^3|S_B$ *permaneceu oculto*$] < 0$. *Por outro lado, condicionado a S_B ter sido revelado no instante 1,* $\mathrm{E}[R_2^3|S_B$ *foi revelado*$] > 0$. *Adicionalmente, Hong e Stein (1999) demonstram que, incondicionalmente,* $\mathrm{E}[R_2^3]$ *é monotonicamente decrescente na razão H/V e negativo para valores de H/V > 0.38.*

Para a análise da assimetria numa visão que não dependa do instante de tempo (1 ou 2), os autores definem o coeficiente de assimetria incondicional de curto prazo como sendo:

$$\mathrm{E}[R_S^3] = \frac{\mathrm{E}[R_1^3]+\mathrm{E}[R_2^3]}{2} \tag{22}$$

e demonstram que $\mathrm{E}[R_S^3] < 0$ para todos os valores de $H/V > 1.69$.

Desta forma, podemos concluir que um dos principais resultados do modelo é a existência de uma assimetria negativa para retornos de curto prazo em cenários em que há forte heterogeneidade de opiniões entre os investidores, ou seja, quando H for relativamente superior a V.

C.3. Volume negociado e coeficiente de assimetria condicional

Em seu trabalho, Hong e Stein (1999) associam o modelo de divergências de opinião ao volume negociado dos ativos. Especificamente, eles afirmam que quando a distância entre os valores das informações dos investidores A e B é muito grande há maior giro nos negócios dos ativos associados. Dado que as divergências de opinião no instante 1 acarretam o fato da informação neste estágio ser revelada ou não e, consequentemente, impactam o coeficiente de assimetria no instante 2, temos que o volume negociado no instante 1 projeta o grau de assimetria negativa no instante 2.

Para ilustrar mais claramente esta associação, vamos supor o caso em que $H > V$, conforme Figura 3 abaixo. No instante 1, o valor esperado do ativo para o investidor A continua sendo $H + V$. Para o investidor B, o valor do ativo é S_B. Pelo fato de $H > V$, temos que o valor de S_A é sempre maior que o preço P_1, enquanto que o valor de S_B é sempre menor ao preço de mercado. Desta forma, o investidor A é o comprador do ativo (suportado pelos arbitradores) e o investidor B fica fora do mercado quando este se encontra em equilíbrio.

Então, o volume negociado no instante 1 pode ser completamente resumido pelo montante que o investidor *A* compra dos arbitradores.

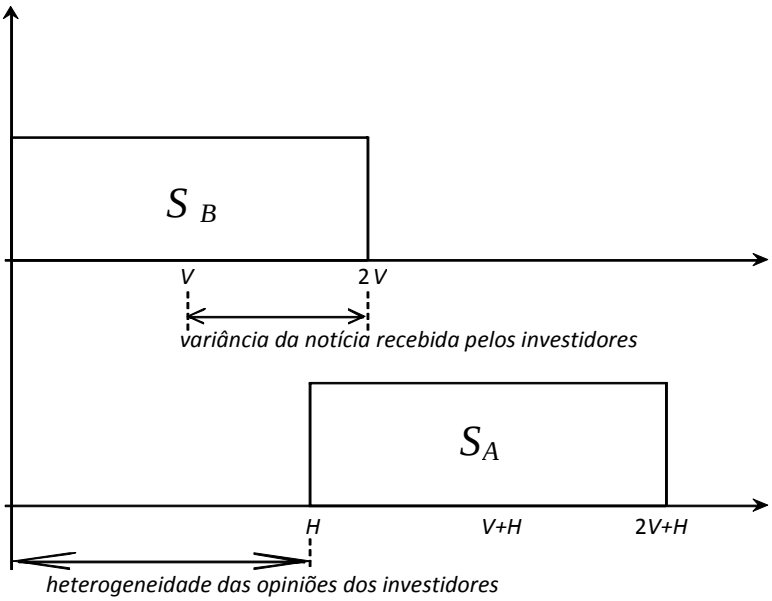

Figura 3 – Distribuição dos sinais de *A* e *B* antes do instante 1 com $H > V$

Adicionalmente, como o investidor *A* é averso ao risco, o montante que ele compra é diretamente proporcional à distância entre seu valor justo S_A e o preço de mercado. Isto é o mesmo que dizer que o investidor *A* compra mais quantidades do ativo quando o investidor *B* tem um baixo sinal, dado que o preço de mercado P_1 é diretamente proporcional a S_B. Desta forma, temos que

Lema 11 *Para $H > V$, o volume negociado no instante 1 é uma função monotonicamente decrescente de S_B. Em particular, o volume é estritamente descrescente em S_B para $S_B > S_B^*$ e atinge o valor máximo quando $S_B \leq S_B^*$.*

As implicações para a assimetria condicional seguem o lema acima, dado que somente poderá existir assimetria negativa no instante 2 se S_B não for revelado no instante 1, isto é, se $S_B \leq S_B^*$. Em outras palavras, somente haverá assimetria negativa no instante 2 se o volume negociado no instante 1 atingir seu nível máximo. Assim sendo, podemos estabelecer que para $H > V$, o grau de assimetria negativa no instante 2 é diretamente proporcional ao volume negociado no instante 1.

3. Descrição dos Dados

3.1. Fonte dos dados

Todos os dados utilizados neste estudo referem-se a ações negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo (Bovespa) e foram extraídos do sistema Economática[7]. As séries históricas de cotações são apresentadas ajustadas por proventos (dividendos, splits, etc). Para cada ativo, foram coletados dados referentes ao preço de fechamento diário da ação, volume negociado a cada dia, grau de alavancagem, capitalização de mercado da companhia e quantidade de ações emitidas (*outstanding*).

3.2. Periodicidade e período dos dados

Os artigos sobre o tema deste estudo diferem bastante entre si na periodicidade adotada, principalmente em função da disponibilidade dos dados. No estudo original de Chen, Hong e Stein (2001), foram utilizados dados diários agrupados numa janela semestral para a medição do índice de assimetria sem, contudo, justificar de forma quantitativa tal horizonte de tempo. Os históricos das variáveis relativas às ações obtidos para este trabalho têm início em janeiro de 2000, data mais distante com dados de volume negociado disponíveis, e se encerram em dezembro de 2009. Para a série temporal do Ibovespa, os dados obtidos tem início em janeiro de 1996 e se encerram em dezembro de 2009. Dado o histórico relativamente curto, utilizamos uma janela trimestral para a compilação das variáveis.

3.3. Escolha dos Ativos

A amostra deste estudo foi constituída por ações líquidas, presentes com frequência na Bolsa de Valores de São Paulo (Bovespa) no período de janeiro de 2000 a dezembro de 2009. Tal amostra foi escolhida devido à necessidade de que os ativos apresentassem níveis mínimos de liquidez que possibilitassem a realização dos testes quantitativos, visto que não faça sentido realizar testes que relacionem volume e volatilidade com papéis que sejam raramente negociados. No total, foram levadas em consideração 211 ações.

[7] O Economática é uma ferramenta própria para análise de ações e fundos. A base de dados do sistema inclui informações sobre todas as empresas listadas em bolsa dos Estados Unidos, Brasil, Argentina, Chile, Peru, Colômbia e Venezuela.

3.4. Descrição das variáveis e análise descritiva dos dados

A medida base do estudo, o coeficiente de assimetria, denotado por NCSKEW (do termo em inglês *negative coefficient of skewness*) é calculado tomando-se o negativo do terceiro momento dos retornos diários e dividindo-se pela terceira potência do desvio-padrão destes retornos. Portanto, para cada ação *i* num período de três meses *t*, temos que

$$NCSKEW_{it} = -\left(n(n-1)^{3/2}\sum R_{it}^{3}\right)/\left((n-1)(n-2)(\sum R_{it}^{2})^{3/2}\right) \tag{23}$$

Onde R_{it} representa a sequência de retornos diários do ativo *i* durante o período *t* e *n* é o número de observações dos retornos diários no período. Estes retornos são, mais precisamente, log-retornos dos preços. A normalização do terceiro momento pela terceira potência do desvio-padrão nos permite realizar comparações entre ativos com diferentes variâncias. O acréscimo do sinal de menos no terceiro momento tem a intenção de convencionar incrementos do NCSKEW como indicativos de ações mais propensas a *crashes* – isto é, tendo uma distribuição mais negativamente assimétrica.

Para a grande parte das regressões realizadas a seguir, os retornos utilizados para o cálculo da variável NCSKEW são ajustados a mercado, ou seja, representam a log variação dos preços do ativo *i* diminuído da log variação do índice Ibovespa. Entretanto, em alguns casos, também foram utilizados excessos de retornos – log variação dos preços do ativo *i* menos o log-retorno do CDB de 3 meses observado no mercado e retornos beta-ajustados.

Adicionalmente ao NCSKEW, criamos uma segunda medida de assimetria a qual não envolve terceiros momentos e, portanto, tende a ser menos influenciada por eventos extremos. Esta medida alternativa, a qual denominamos DUVOL (do termo em inglês *down-to-up volatility*), é calculada segundo a expressão

$$DUVOL_{it} = \log\{[(n_u - 1)\sum_{\mathrm{DOWN}} R_{it}^{2}]/[(n_d - 1)\sum_{\mathrm{UP}} R_{it}^{2}]\} \tag{24}$$

Ou seja, para cada ação *i* num período de três meses *t*, separamos os dias em que os retornos foram acima da média do período (n_u) dos dias em que estes foram abaixo da média (n_d) e computamos o desvio-padrão destas sub-amostras separamente. Depois tiramos o log da divisão dos desvios-padrão dos dias de baixa sobre os dias de alta. Novamente, a convenção é que um maior valor desta medida corresponda a uma maior assimetria negativa.

Em todas as regressões com dados em painel foram utilizados períodos trimestrais sem sobreposição. A variável NCSKEW foi calculada com dados de 01-Janeiro a 31-Março, 01-

Abril a 30-Junho, 01-Julho a 31-Setembro e 01-Outubro a 31-Dezembro de cada ano. Foram testados, adicionalmente, intervalos sem sobreposição com diferentes períodos – por exemplo, 01-Fevereiro a 30-Abril, 01-Março a 31-Maio, etc. Em todos os casos os resultados foram essencialmente idênticos.

Já para a série temporal do Ibovespa, devido ao pequeno histórico de dados, foram utilizadas nas regressões janelas trimestrais com e sem sobreposição.

Uma das variáveis chave do estudo é a variação do volume negociado. Mais especificamente, nós verificamos se, para uma determinada empresa, a variação no nível do volume negociado em um dado período de três meses (por exemplo, 1 de janeiro a 31 de março de 2000) é bom previsor para alterações na assimetria dos três meses seguintes (01 de abril a 30 de junho de 2000).

A fim de isolar os efeitos do volume negociado nas regressões, algumas variáveis de controle também foram incluídas. Estas variáveis podem ser divididas em dois grupos. No primeiro, se encontram aquelas que, como o volume negociado, capturam influências da variação no tempo na assimetria. Neste grupo se encontra, por exemplo, o retorno passado. Em nossas regressões, ações que vivenciaram altos retornos históricos tem maiores chances de apresentar assimetria negativa.

A segunda categoria de variáveis utilizada para previsão da assimetria são aquelas que visam a capturar características fixas das empresas. Utilizamos estas variáveis para evitar que atribuamos erroneamente ao volume negociado o poder explicativo de alguma outra característica particular das empresas analisadas. Neste grupo se encontra, por exemplo, o tamanho de mercado da empresa. Damodaran (1987) escreve que a assimetria é mais negativa, em média, nas empresas com maior valor de mercado (*large-cap firms*).

Desta forma, as variáveis utilizadas são as seguintes: $SIGMA_{it}$ é o desvio-padrão dos retornos diários do ativo *i* observado no período de três meses *t*. RET_{it} é o retorno acumulado da ação *i* também observado no período *t*. Quando calculamos NCSKEW utilizando retornos ajustados a mercado, as variáveis SIGMA e RET são computadas também com ajustes a mercado. O mesmo vale quando NCSKEW é calculado utilizando excessos de retorno e quando esta é beta-ajustada. $TURNOVER_{it}$ representa o giro dos negócios da ação *i* no período *t*, calculado dividindo-se o número de ações negociadas pelo número total de ações em circulação da empresa. $LOGSIZE_{it}$ é o log da capitalização de mercado da empresa *i*.

A Tabela 1 mostra o resumo estatístico (média e desvio-padrão) das variáveis do modelo separadas por quartis. Nota-se que a média dos valores da variável NCSKEW é negativa, indicando uma assimetria positiva para toda a amostra (lembre-se que há um sinal

negativo na fórmula de cálculo desta variável indicando que valores positivos representam assimetria negativa). No estudo original de Chen, Hong e Stein (2001), também foi observada esta particularidade para as empresas sendo que para o índice foi obtida uma assimetria negativa. Os autores associaram esta característica a uma possível maior divergência de opinião a respeito do comportamento do mercado como um todo (no caso, o índice) do que a cerca das ações individualmente. Este fato não invalida o modelo de divergências de opinião uma vez que este permite tanto assimetrias positivas quanto negativas dependendo do grau de heterogeneidade dos investidores.

Tabela 1 – Resumo descritivo das variáveis do modelo

	Todas as empresas	Quartil 4 (maiores empresas)	Quartil 3	Quartil 2	Quartil 1 (menores empresas)	Índice Ibovespa
$NCSKEW_t$						
média	-0.187	-0.180	-0.201	-0.225	-0.148	-0.165
desvio-padrão	0.806	0.782	0.770	0.827	0.840	0.823
$DUVOL_t$						
média	-0.137	-0.186	-0.174	-0.123	-0.065	-0.072
desvio-padrão	0.947	1.098	0.869	0.764	0.984	0.295
$SIGMA_t$						
média	0.004	0.003	0.003	0.003	0.007	0.001
desvio-padrão	0.004	0.002	0.003	0.003	0.006	0.001
$LOGSIZE_t$						
média	13.716	16.290	14.698	13.268	10.956	N/A
desvio-padrão	2.439	1.160	1.005	1.059	1.654	
$TURNOVER_t$						
média	0.001	0.001	0.001	0.002	0.001	0.002
desvio-padrão	0.003	0.002	0.002	0.004	0.003	0.007
RET_t						
média	0.015	0.030	0.015	0.013	0.002	0.021
desvio-padrão	0.238	0.181	0.239	0.279	0.242	0.078

Na tabela 2, é apresentada a correlação contemporânea das variáveis. Vale ressaltar a baixa correlação observada entre as variáveis NCSKEW e SIGMA o que indica que a previsão da assimetria é um exercício diferente da previsão da volatilidade.

Tabela 2 – Correlações entre as variáveis do modelo

	$NCSKEW_t$	$DUVOL_t$	$SIGMA_t$	$LOGSIZE_t$	$TURNOVER_t$	RET_t
$NCSKEW_t$	1.000	0.838	0.007	-0.008	0.008	-0.571
$DUVOL_t$		1.000	-0.003	-0.022	0.025	-0.169
$SIGMA_t$			1.000	-0.46	0.030	0.011
$LOGSIZE_t$				1.000	0.016	0.016
$TURNOVER_t$					1.000	-0.003
RET_t						1.000

Na Figura 4, pode-se ver a evolução das variáveis NCSKEW, DUVOL e TURNOVER da série do Ibovespa.

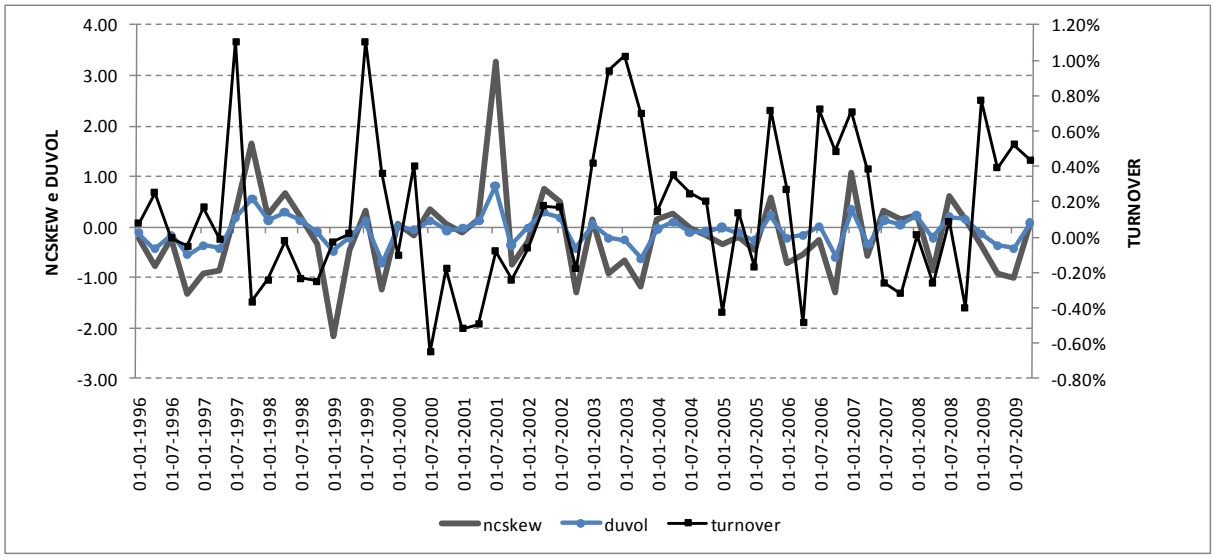

Figura 4 – Gráfico da evolução das variáveis NCSKEW, DUVOL e TURNOVER da série do Ibovespa

4. Resultados

A Tabela 3 apresenta o resultado da seguinte regressão com dados em painel

$$NCSEW_{it+1} = c_1 * NCSKEW_{it} + c_2 * SIGMA_{i+t} + c_3 * LOGSIZE_{it} + c_4 * TURNOVER_{it} + c_5 * RET_{it} + c_6 * RET_{it-1} + c_7 * RET_{it-2} \quad (25)$$

Esta regressão pode ser interpretada como um esforço para prever, com base nas informações disponíveis até o período *t*, a variação do coeficiente de assimetria no período *t* + 1. Todos os coeficientes das regressões apresentadas neste trabalho foram ajustados pelo método de Newey e West para garantir que os erros-padrão dos estimadores sejam consistentes na presença de heteroscedasticidade dos resíduos. Também foram incluídas *dummies* para cada empresa.

Tabela 3 – Resultado da regressão da variável NCSKEW com dados em painel utilizando retornos ajustados a mercado, beta-ajustados e excesos de retorno. Os valores em parenteses representam a estatística *t*

	Variável dependente $NCSKEW_{t+1}$		
	(1) Caso Base: retornos ajustados a mercado	(2) Beta ajustado	(3) excesso de retornos
$NCSKEW_t$	0.024 (1.534)	0.035 (2.200)**	0.031 (2.061)**
$SIGMA_t$	0.791 (1.782) ***	1.415 (2.806)*	0.497 (1.835)**
$LOGSIZE_t$	0.048 (4.006)*	0.036 (2.500)*	0.035 (2.820)*
$TURNOVER_t$	0.446 (3.875)*	0.823 (3.087)*	0.367 (3.417)*
RET_t	0.205 (3.447)*	0.037 (6.068)*	0.085 (1.536)
RET_{t-1}	0.330 (6.988)*	0.124 (2.462)*	0.257 (5.813)*
RET_{t-2}	0.006 (0.119)	0.062 (1.117)	0.048 (1.087)
RET_{t-3}	0.059 (1.294)	0.204 (3.532)*	0.047 (1.076)
RET_{t-4}	0.224 (4.817)*	0.015 (0.257)	0.320 (7.299)*
RET_{t-5}	0.059 (1.308)	0.110 (1.874)**	0.108 (2.359)**
No. Observações	6514	6514	6514
R^2	5.48%	4.66%	5.12%

Níveis de significância: * = 1%, **=5%, ***=10%

Na coluna 1, foram utilizados retornos ajustados a mercado (log-retorno da ação *i* diminuído do log-retorno do índice Ibovespa) para compor a variável NCSKEW. Na coluna 2, utilizamos retornos beta-ajustados e, por fim, na coluna 3, excessos de retornos (log-retorno da ação *i* diminuído do log-retorno do CDB de três meses). Os três resultados obtidos foram muito semelhantes sendo que, em particular, os coeficientes referentes ao volume negociado (TURNOVER) foram positivos e estatisticamente significativos, em linha com o que sugere o modelo de divergências de opinião sinalizando ser possível inferir o nível de assimetria negativa de um determinado trimestre com base no volume negociado do trimestre anterior. Este resultado é semelhante ao encontrado por Chen, Hong e Stein (2001) em seu estudo com dados do mercado norte-americano de julho de 1962 a dezembro de 1998.

Outro resultado alinhado ao estudo original diz respeito aos coeficientes referentes aos retornos passados: estes também são positivos evidenciando que ações que vivenciaram períodos de alta em seus preços tem mais predisposição a terem maior assimetria negativa. O tamanho de mercado da empresa, representado pela variável LOGSIZE, também apresentou relação diretamente proporcional ao coeficiente de assimetria NCSKEW nos três casos analisados. Fato este também observado pelos autores.

Na tabela 4, a regressão com retornos ajustados a mercado é apresentada novamente acrescentando-se a abertura por quartis de acordo com o valor de mercado da empresa. O grupo com as empresas com menor valor de mercado (quartil 1) contou com 54 empresas. No segundo quartil foram incluídas as 53 empresas seguintes. Nos terceiro e quarto quartis as amostras contaram com 52 empresas cada. Mais uma vez, assim como no estudo original, o coeficiente do TURNOVER para as menores empresas se mostrou bem inferior aos obtidos nos demais grupos, embora ainda positivo. Uma explicação encontrada pelos autores é que, possivelmente, a variação no volume negociado deste grupo de menores empresas seja guiada por variações nos custos de negociação. Outro fato interessante foi que o coeficiente se mostrou diretamente proporcional ao tamaho da empresa, ou seja, quanto maior o valor de mercado da empresa, maior é a influência do volume negociado na assimetria dos retornos. Este fato não foi observado nem tão pouco explicado no estudo de Chen, Hong e Stein (2001).

Tabela 4 – Resultado da regressão da variável NCSKEW com dados em painel por tamanho da empresa. Os valores em parenteses representam a estatística *t*

	Todas as empresas	Quartil 4 (maiores empresas)	Quartil 3	Quartil 2	Quartil 1 (menores empresas)
$NCSKEW_t$	0.024	0.113	0.036	0.012	0.028
	(1.534)	(3.605)*	(1.063)	(0.367)	(1.008)
$SIGMA_t$	0.791	4.094	-0.861	3.919	0.534
	(1.782) ***	(2.250)**	(-0.879)	(2.532)**	(0.930)
$LOGSIZE_t$	0.048	0144	0.057	0.063	0.045
	(4.006)*	(5.789)*	(2.467)**	(2.334)**	(2.081)**
$TURNOVER_t$	0.446	2.151	2.052	0.378	0.034
	(3.875)*	(3.052)*	(2.759)*	(2.844)*	(2.471)**
RET_t	0.205	0.071	0.186	0.430	0.097
	(3.447)*	(0.543)	(1.489)	(3.639)*	(0.911)
RET_{t-1}	0.330	0.083	0.288	0.568	0.173
	(6.988)*	(0.848)	(3.060)*	(6.080)*	(2.056)**
RET_{t-2}	0.006	-0.008	-0.043	0.020	0.136
	(0.119)	(-0.085)	(-0.451)	(0.218)	(1.597)
RET_{t-3}	0.059	0.184	-0.029	0.119	0.114
	(1.294)	(2.034)**	(-0.318)	(1.325)	(1.393)
RET_{t-4}	0.224	0.451	0.315	0.328	0.284
	(4.817)*	(4.992)*	(3.393)*	(3.689)*	(3.419)*
RET_{t-5}	0.059	0.249	0.174	0.021	0.079
	(1.308)	(2.681)*	(1.831)***	(0.233)	(0.949)
No. Observações	6514	1835	1501	1416	1762
R^2	5.48%	7.22%	7.12%	8.97%	4.50%

Níveis de significância: * = 1%, **=5%, ***=10%

A Tabela 5 apresenta o resultado da mesma regressão da equação 42 utilizando-se, neste caso, a variável DUVOL como medida de assimetria na distribuição de retornos. Aqui também foram utilizadas as três medidas de retorno (ajustados a mercado, beta ajustados, e excessos de retorno). Nota-se que os resultados foram essencialmente os mesmos da Tabela 3, na qual foi utilizada a variável NCSKEW. Este resultado torna mais evidente o poder de previsão da variação do volume negociado na assimetria dos retornos para as ações brasileiras.

Tabela 5 – Resultado da regressão da variável DUVOL com dados em painel utilizando retornos ajustados a mercado, beta-ajustados e excesos de retorno. Os valores em parenteses representam a estatística *t*

	Variável dependente $DUVOL_{t+1}$		
	(1) Caso Base: retornos ajustados a mercado	(2) Beta ajustado	(3) excesso de retornos
$DUVOL_t$	0.109	0.035	0.067
	(5.911)*	(2.200)**	(2.600)*
$SIGMA_t$	0.263	1.415	0.278
	(0.388)	(2.806)*	(0.173)
$LOGSIZE_t$	0.009	0.036	0.014
	(6.283)*	(2.500)*	(4.095)*
$TURNOVER_t$	0.217	0.823	0.210
	(2.752)*	(3.087)*	(3.310)*
RET_t	0.004	0.037	0.173
	(0.089)	(6.068)*	(2.467)*
RET_{t-1}	0.084	0.124	0.053
	(1.770)***	(2.462)*	(0.488)
RET_{t-2}	0.067	0.062	0.074
	(1.395)	(1.117)	(0.668)
RET_{t-3}	0.049	0.204	0.049
	(1.069)	(3.532)*	(0.454)
RET_{t-4}	0.131	0.015	0.105
	(2.851)*	(0.257)	(1.003)
RET_{t-5}	0.068	0.110	0.022
	(1.439)	(1.874)***	(2.074)**
No. Observações	6514	6514	6514
R^2	4.84%	4.66%	4.93%

Níveis de significância: * = 1%, **=5%, ***=10%

Na tabela 6 são apresentados os resultados da regressão da série temporal do índice Ibovespa, o qual foi utilizado como variável representativa do mercado agregado. Neste caso, devido a pequena quantidade de dados (informação de volume negociado disponível somente a partir de janeiro de 1996), o poder estatístico do estudo se mostrou muito limitado. Para se manter a coerência do trabalho, foram utilizadas as mesmas variáveis e os mesmos critérios para sua apuração. Num esforço de se tentar melhorar o poder do estudo, foram também utilizados dados sobrepostos mensalmente o que aumentou o número de amostras de 53 para 165.

Tabela 6 – Resultado da regressão da série temporal do Ibovespa com e sem dados sobrepostos (*overlapping*). Os valores em parenteses representam a estatística *t*

	Variável dependente $NCSKEW_{t+1}$		Variável dependente $DUVOL_{t+1}$	
	(1) Sem dados sobrepostos	(2) Com dados sobrepostos	(3) Sem dados sobrepostos	(4) Com dados sobrepostos
$NCSKEW_t$ ($DUVOL_t$ nas colunas 3 e 4)	0.051 (0.204)	0.691 (8.457)*	0.202 (0.768)	0.602 (7.025)*
$SIGMA_t$	-26.631 (-2.012)**	-7.463 (-1.077)	-10.697 (-2.443)**	-2.743 (-1.747)***
$TURNOVER_t$	7.724 (0.314)	10.515 (0.348)	1.148 (0.141)	4.632 (0.355)
RET_t	1.104 (0.369)	0.163 (0.181)	0.095 (0.090)	0.350 (0.879)
RET_{t-1}	0.281 (0.163)	-1.659 (-1.679)***	0.156 (0.272)	0.470 (1.200)
RET_{t-2}	0.949 (0.582)	4.322 (3.581)*	0.015 (0.028)	1.652 (4.167)*
RET_{t-3}	-0.582 (-0.375)	-2.388 (-2.153)**	-0.262 (-0.514)	-1.068 (-2.689)*
RET_{t-4}	2.263 (1.394)	-0.147 (-0.127)	1.025 (1.903)***	0.045 (0.107)
RET_{t-5}	2.016 (1.051)	0.925 (1.180)	1.079 (1.713)***	0.043 (1.339)
No. Observações	47	162	47	162
R^2	13.11%	51.01%	19.61%	44.43%

Níveis de significância: * = 1%, **=5%, ***=10%

Podemos observar na Tabela 6 que os coeficientes obtidos na regressão do índice, em particular o TURNOVER e os termos associados aos retornos, foram muito maiores que os observados na regressão com dados em corte transversal. Assim, o volume negociado e o retorno passado são informações muito importantes para a previsão da assimetria dos retornos de mercado.

5. Conclusão

Este trabalho testou o modelo de divergências de opinião de Hong e Stein (1999) com dados do mercado acionário brasileiro. Para isso, examinou-se através de uma série de regressões com dados em painel a relação existente entre o volume negociado das ações – representando o nível de desacordo entre os participantes do mercado – e o coeficiente de assimetria da distribuição de retornos destes ativos. Além de mostrarmos que a assimetria negativa é maior nos ativos que vivenciaram aumento no seu volume negociado, mostramos que esta característica também é observada em ativos que apresentaram retornos positivos nos últimos meses.

Concluímos que, independente da métrica de retorno utilizada – ajustado a mercado, beta-ajustado ou excesso de retorno – é evidente a influência do volume negociado na determinação da assimetria de retornos. Esta hipótese é observada tanto no estudo com ações individuais quanto no mercado agregado, representado pelo índice Ibovespa (embora estatisticamente o segundo seja pouco representativo).

Observamos também que esta relação é tão maior quanto for o valor de mercado da empresa. Este resultado não é justificado por nenhum fundamento teórico no modelo proposto por Hong e Stein (1999), os quais associam esta particular característica a um possível comportamento dos controladores das pequenas empresas em difundirem rapidamente as boas notícias e divulgarem notícias ruins aos poucos, o que pode levar a uma maior assimetria positiva nos retornos.

Referências

BLACK, Fischer. Studies of Stock price Volatility Changes. **Proceedings of the 1976 Meetings of the American Statistical Association, Business and Economical Statistics Section**, pp. 177-81, 1976.

BEKAERT, Geert e WU, Goujun. Asymmetric Volatility and Risk in Equity Markets. **Standford Business School Working Paper**.

CAMPBELL, John Y. e HENTSCHEL, Ludger. No New Is Good News: An Asymmetric Model of Changing Volatility in Stock-Returns. **Journal of Financial Economics**, vol. 31, pp. 281-318, 1992.

CHEN, J., HONG, H., e STEIN, J. C.. Forecasting crashes: trading volume, past returns, and conditional skewness in stock prices. **Journal of Financial Economics**, vol. 61, pp. 345-381, 2001.

CHRISTIE, Andrew A. The Stochastic Behavior of Common Stock Variances – Value, Leverage and Interest Rate Effects. **Journal of Financial Economics**, vol, 10, pp. 407-432, 1982.

CUTLER, David M., POTERBA, James M. & SUMMERS, Lawrence H. What Moves Stock Prices?. **Journal of Portfolio Management**, Vol. 15, pp. 4-12, 1989.

DAMODARAN, A. Information bias: measures and implications. **Working Paper**, New York University, 1987.

DUFFEE, Gregory R. Stock Returns and Volatility: A Firm-Level Analysis. **Journal of Financial Economics**, Vol. 37, pp. 399-420, 1995.

FRENCH, Kenneth R. & ROLL, Richard. Stock Return Variances: Arrival of Information and the Reaction of Traders. **Journal of Financial Economics**, Vol. 17, pp. 5-26, 1986.

HONG, H., e STEIN, J. C.. Differences of opinion, rational arbitrage and market crashes. **NBER Working Paper**, 1999.

PINDYCK, Robert S. Risk, Inflation, and the Stock Market. **American Economic Review**, vol, 74, pp. 334-351, 1984.

SCHWERT, G. William. Why Does Stock Market Volatility Change over Time?. **Journal of Finance**, vol. 44, pp. 1115-1153, 1989.

6. Apêndice

A. Prova dos Lemas

Prova do Lema 1: Como S_B é uniforme em [0, 2V], a previsão dos arbitradores neutros ao risco para S_B dado que o investidor B não apresentou nenhuma ordem até o preço p_1 é dada por

$$E[S_B|S_B \leq p_1] = p_1/2 \tag{A.1}$$

e, então, a estimativa dos arbitradores para o dividendo final do ativo é

$$E[D|S_B \leq p_1] = p_1/4 + (H + V)/2 \tag{A.2}$$

Para qualquer $p_1 > S_B^*$ é fácil ver que $E[D|S_B \leq p_1] - p_1 < 0$ e então o leloeiro abaixa o preço p_1 enquanto o investidor B não anuncia nenhuma ordem. Mas dado que $S_B > S_B{}^*$, então S_B será revelado e P_1 será o preço de equilíbrio.

Prova do Lema 2: Suponha que $S_B \leq S_B^*$. Então para todo preço $p_1 \geq S_B^*$, temos que $S_B - p_1 \leq 0$ e o investidor B nunca revela seu sinal. Quando $p_1 = S_B^*$, a expectativa dos arbitradores a respeito do dividendo final é

$$\mathrm{E}[D|p_1 = S_B^*] = S_B^*/4 + (H + V)/2 \tag{A.3}$$

que é igual ao preço corrente e, então, o mercado entra em equilíbrio com

$$P_1 = S_B^*/4 + (V + H)/2$$

$$P_1 = 2(V + H)/3 \tag{A.4}$$

Isto ocorre antes do investidor B se pronunciar e entrar no mercado. A probabilidade de liquidação neste equilíbrio é dado por

$$S_B^*/(2V) = (H + V)/(3V) \tag{A.5}$$

Prova do Lema 3: Dado que S_A é uniforme em [H, H + 2V], a expectativa dos arbitradores neutros ao risco dado que o investidor A não submeteu nenhuma ordem até o preço p_2 é

$$\mathrm{E}[S_A|S_A \leq p_2] = (H + p_2)/2 \tag{A.6}$$

então a estimativa dos arbitradores para o valor final do ativo é

$$\mathrm{E}[D|S_A \leq p_2] = S_B/2 + (H + p_2)/4 \tag{A.7}$$

Assim como no instante 1, a não revelação de S_A sugere um valor limite S_A^* em que para qualquer $p_2 > S_A^*$, temos que E[D | $S_A \leq p_2$] – $p_2 < 0$ e então o leiloeiro abaixa o preço p_2 enquanto não houver ordens do investidor A. Neste cenário, temos que $\mathrm{E}_2[S_A$ | NR] deve ser igual a $(H + S_A^*)/2$ o que implica que, ao igualarmos P_2 a S_A^* tenhamos

$$S_A^* = S_B/2 + (S_A^* + H)/4$$

$$S_A^* = (2S_B + H)/3 \tag{A.8}$$

Prova do Lema 4: Suponha que $S_A \leq S_A^*$. Para todo preço $p_2 \geq S_A^*$, temos que $S_A - p_2 \leq 0$ e o investidor A não revela seu sinal. Quando $p_2 = S_A^*$, a expectativa dos arbitradores a respeito do dividendo no instante 3 é

$$\mathrm{E}[D|p_2 = S_A^*] = S_B/2 + (H + S_A^*)/4 \tag{A.9}$$

que é igual ao preço corrente e, então, o mercado entra em equilíbrio com $P_2 = S_A^*$ onde temos

$$P_2 = \frac{S_B}{2} + (H + S_A^*)/4$$

$$P_2 = (2S_B + H)/3 \tag{A.10}$$

Isto ocorre antes do investidor A se pronunciar e entrar no mercado.

Prova do Lema 5: Sabemos que nenhuma nova informação sobre o valor do ativo para o investidor *B* chega no instante 2 e S_B permanece oculto ao preço de equilíbrio

$$P_1 = S_B^*/4 + (V + H)/2 \tag{A.12}$$

Se o investidor *A* recebe boas notícias no instante 2, ou seja, se S_A é maior que sua expectativa *ex ante* ($H + V$), então temos que $S_A - p_2 > 0$ para todo $p_2 > P_1$ e então S_A será revelado para $p_2 > P_1$. Então,

$$P_2 = S_B^*/4 + S_A/2 = (H + V)/6 + S_A/2 \tag{A.13}$$

será o preço de equilíbrio e o mercado entrará em equilíbrio antes que novas informações sobre S_B possam ser reveladas (lembrando que $S_B^* = 2(H + V)/3$).

Prova do Lema 6: Dado que $S_B \leq S_B^{**}$ e $S_B^{**} = 2S_A/3$, temos que S_A será revelado antes de S_B durante o leilão. Dado que S_A foi revelado, a estimativa do valor final do ativo para os arbitradores neutros ao risco dado o preço p_2 é

$$E[D|S_B \leq p_2] = S_A/2 + p_2/4 \tag{A.14}$$

Dado que $S_B \leq S_B^{**}$, então para todo preço $p_2 \geq S_B^{**}$, temos que $S_B - p_2 \leq 0$ e o investidor *B* nunca revela sua informação. Particularmente, quando $p_2 = S_B^{**}$, a expectativa dos arbitradores a respeito do dividendo final é

$$E[D|p_2 = S_B^{**}] = S_B^{**}/4 + S_A/2 \tag{A.15}$$

que é igual ao preço atual e, então, o mercado entra em equilíbrio com

$$P_2 = S_B^{**}/4 + S_A/2 = 2S_A/3 \tag{A.16}$$

Prova do Lema 7: É fácil verificar que se $S_A \leq S_A^*$ e $S_B > H$ (dado que $S_B < S_B^*$), então $S_A < S_B$. Portanto, S_B será revelado antes de S_A. Dado que S_B foi revelado, a estimativa dos arbitradores neutros ao risco a respeito do valor final do ativo dado o preço p_2 é

$$E[D|S_A \leq p_2] = S_B/2 + (H + p_2)/4 \tag{A.17}$$

Dado que $S_A \leq S_A^*$, então para todo preço $p_2 \geq S_A^*$, temos que $S_A - p_2 \leq 0$ e o investidor A nunca tem seu sinal revelado. Quando $p_2 = S_A^*$, a expectativa dos arbitradores para o valor final do ativo é

$$E[D|p_2 = S_A^*] = S_B/2 + (H + S_A^*)/4 \tag{A.18}$$

que é igual ao preço corrente e, então o mercado entra em equilíbrio com

$$P_2 = S_B/2 + (H + S_A^*)/4 = 2(S_B + H)/3 \tag{A.19}$$

Prova do Lema 8: É fácil verificar pela Figura 2 que a única região que sobra é o caso $2(H + V)/3 > S_B > 2H/3$ e para uma dada realização de S_B, $S_A \in ((2S_B + H)/3, 3S_B/2)$. Nesta região, S_A e S_B não estão muito afastados e S_B não é tão pequeno, portanto, ambos são revelados neste processo.