

Franciane Lovati Dal'Col

***Home bias* no portfolio de equities: o caso
brasileiro**

São Paulo

2018

Franciane Lovati Dal'Col

***Home bias* no portfolio de equities: o caso brasileiro**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Economia do Insper Instituto de Ensino e Pesquisa, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Economia. Área de concentração: Finanças e Macroeconomia Aplicadas

Insper Instituto de Ensino e Pesquisa
Programa de Mestrado Profissional em Economia

Orientador: Prof. Dr. Diogo Guillén

São Paulo

2018

Franciane Lovati Dal'Col
Home bias no portfolio de equities: o caso brasileiro/ Franciane Lovati Dal'Col.
– São Paulo, 2018- 57 p.

Orientador: Prof. Dr. Diogo Guillén

Dissertação (Mestrado) – Insper Instituto de Ensino e Pesquisa
Programa de Mestrado Profissional em Economia, 2018.

1. *home bias*. 2. portfolio de equities. 3. motivos de hedge. 4. macrofinanças. I.
Prof. Dr. Diogo GuillénII. Insper Instituto de Ensino e Pesquisa. III. Programa de
Mestrado Profissional em Economia. IV. *Home bias* no portfolio de equities: o caso
brasileiro

Franciane Lovati Dal'Col

***Home bias* no portfolio de equities: o caso brasileiro**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Economia do Insper Instituto de Ensino e Pesquisa, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Economia. Área de concentração: Finanças e Macroeconomia Aplicadas

Prof. Dr. Diogo Guillén- Orientador

Instituição: Insper Instituto de Ensino e Pesquisa e Itaú Asset Management

Profª. Dra. Camila Campos

Instituição: Insper Instituto de Ensino e Pesquisa

Dr. Thomas Wu

Instituição: Verde Asset Management

São Paulo

2018

Agradecimentos

Depois de dois anos de dedicação, devo muitos agradecimentos. À Deus, por ter me dado energia e foco para concluir essa etapa. Ao meu orientador, prof. Diogo Guillén, pelo tempo dedicado a me orientar, pelas suas sugestões e pelos comentários, essenciais para que eu fizesse um bom trabalho. Especialmente, agradeço pela confiança que depositou na minha capacidade de concluir esse projeto. Ao meu marido, pelo carinho e apoio durante o desgastante processo de finalizar essa dissertação. Principalmente, agradeço por não me deixar desistir, mesmo nos momentos de maior cansaço. Aos meus pais e irmã, por sempre me apoiarem em qualquer empreitada, mesmo que isso signifique menos encontros de família. Aos professores e colegas de turma do mestrado, por dois anos de muito aprendizado e trocas de ideias. À equipe de Risco de Mercado do BTG Pactual, pela compreensão nos momentos em que tive que me ausentar ou me dedicar menos que o normal ao trabalho devido às demandas do curso de mestrado.

*“There is nothing more stimulating than a case where everything goes against you.”
(The Hound of the Baskervilles, Arthur Conan Doyle)*

Resumo

O *home bias* médio observado no portfolio de equities dos investidores brasileiros foi 96% nos últimos quatro anos. Apesar de haver uma extensa literatura sobre o tema, poucos estudos exploram o contexto dos mercados emergentes, em especial o Brasil. Esse estudo investiga por que existe esse viés tão agudo sob dois aspectos. Primeiramente, verifica se há ações domésticas que, através de sua exposição aos mercados globais, estejam reduzindo (ou eliminando) a necessidade de diversificação internacional. Isso é feito comparando-se as fronteiras eficientes do portfolio doméstico com o índice internacional para checar se há ganho de diversificação. Conclui-se que, apesar de algumas ações domésticas adicionarem diversificação ao mercado nacional, as possibilidades de diversificação internacional não são esgotadas por elas. Em segundo lugar, utilizando um modelo macroeconômico de equilíbrio geral, o trabalho verifica se os motivos de hedge em relação à taxa de câmbio e à renda podem justificar o *home bias* observado. O modelo apenas com equities prevê alavancagem no mercado internacional, enquanto o modelo incluindo bonds prevê alocação de aproximadamente 15% no mercado doméstico.

Palavras-chaves: *home bias*. portfolio de equities. motivos de hedge. macrofinanças.

Abstract

The home bias observed in the Brazilian equity portfolio for the past four years was 96% in average. Although there is an extensive literature about this topic, only a few studies explore it in the emerging markets case, particularly Brazil. This work investigates why this bias is so high, focusing in two different aspects. Firstly, verifies if there are domestic stocks that, through their exposure to the global financial markets, could be lessening (or completely substituting) the need of international diversification. This is accomplished by comparing the efficient frontiers between the domestic portfolio with and without the international index to check if there is diversification gain. The conclusion is that, even if a few domestic stocks add diversification to the domestic portfolio, they don't exhaust the diversification provided by the international index. In the second part, starting from a general equilibrium macroeconomic model, the study checks if the hedging motives regarding exchange rates and income could justify the observed home bias. The equities only model predicts leverage in the domestic market to invest in the international market while the equities plus bonds modes predicts about 15% of domestic allocation.

Key-words: home bias. equity portfolio. hedging motives. macrofinance.

Sumário Executivo

Dados da Federação Mundial das Bolsas de Valores e do Fundo Monetário Internacional mostram que a alocação do investidor brasileiro no mercado de ações doméstico era 97% em 2017. Essa preferência por ativos domésticos é surpreendente porque, em um mercado sem fricções, esperaria-se que os investidores estivessem no portfolio mundial. Por isso ela é comumente chamada de *home bias in equities portfolios puzzle* na literatura econômica. Esse viés não é exclusividade do Brasil: a alocação doméstica dos países latino-americanos (exceto Chile) era 90% em 2017. Já para os países desenvolvidos, o *home bias* cai significativamente: esse número era 62% para os Estados Unidos.

Há duas vertentes da literatura que procuram explicar esse viés. Em finanças internacionais, os estudos procuram verificar se realmente o investimento internacional promove ganho de bem estar ou se haveria ativos domésticos substituindo os ativos estrangeiros. Já em macroeconomia, parte dos estudos se concentra em verificar se, dentro de um modelo macroeconômico sem fricções, os motivos de hedge poderiam ser responsáveis por esse viés: investidores preferem um portfolio que tenha maior retorno no caso da taxa de câmbio apreciar (para manter o poder de compra) e no caso da renda diminuir. Logo, se o mercado doméstico tem retorno mais alto nessas duas situações (relativamente ao estrangeiro), será possível observar maior alocação maior mercado doméstico.

Apesar de haver uma extensa literatura sobre o tema, poucos estudos exploram o contexto dos mercados emergentes. Por isso, este trabalho tem o objetivo de responder duas perguntas sobre o *home bias* no contexto brasileiro, ainda que parcialmente. Na linha de finanças internacionais, existem ativos domésticos que estariam substituindo a diversificação internacional? Já na linha de macroeconomia, a alocação de 97% no mercado doméstico é um viés alto ou poderia ser o esperado pelos motivos de hedge dos investidores brasileiros?

A fim de responder a primeira pergunta, examinamos se a exposição de empresas brasileiras aos mercados globais estaria reduzindo a necessidade de diversificação com ativos estrangeiros. Utilizando um teste estatístico que compara duas fronteiras eficientes, observou-se que as empresas exportadoras diversificam significativamente o portfolio nacional. Porém, os benefícios de diversificação do mercado global não são esgotados. É importante ressaltar que a imposição de restrições a posições vendidas e alavancagem diminui consideravelmente o aumento de bem estar obtido via diversificação.

Para responder a segunda pergunta, consideramos um modelo macroeconômico sem fricções com dois países simétricos e calculamos as covariâncias entre os retornos financeiros e a taxa de câmbio e o crescimento da renda, na mesma linha dos estudos de Couerdacier e Rey (2013) e Couerdacier e Gourinchas (2016). Não há evidências de que os motivos de hedge explicam o *home bias* no Brasil: considerando o Ibovespa como uma proxy para o retorno financeiro do país, o investidor brasileiro deveria estar aproximadamente 48% alocado no mercado nacional. Com a inclusão de bonds nominais no modelo, a alocação passa para 65%, número ainda distante do observado nos dados. O cenário fica ainda mais agudo se a assimetria entre os dois mercados é considerada: o modelo apenas com equities mostra alavancagem no mercado internacional, enquanto o modelo de bonds indica alocação doméstica próxima a 15%.

Logo, os motivos de hedge e a exposição do mercado doméstico à economia internacional explicam apenas uma pequena parte do *home bias* observado. Ainda assim, o estudo traz lições interessantes que podem ser aproveitadas. A adição de bonds nominais aumentou bastante a alocação no mercado doméstico, então é possível que a adição de outras classes de ativos consiga justificar uma parte maior do *home bias* observado. Um exemplo são os bonds atrelados à inflação, que tem volume significativo no mercado brasileiro e representam papel importante no problema de otimização do agente doméstico. Além disso, seria possível melhorar o teste estatístico realizado, impondo restrições a posições vendidas e à alavancagem. Provavelmente considerando-se essas restrições, observaria-se menos diferenças entre o perfil de risco e retorno dos portfólios domésticos e estrangeiros.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Estimativa de retornos não financeiros para Brasil e Estados Unidos. . 46

Lista de tabelas

Tabela 1 – <i>Home bias</i> por região.	15
Tabela 2 – Análise da diversificação obtida entre portfolio doméstico exceto ações correlacionadas com o índice S&P500 e o portfolio doméstico total. . .	23
Tabela 3 – Análise da diversificação obtida entre portfolio doméstico exceto exportadoras e o portfolio doméstico total.	24
Tabela 4 – Análise da diversificação obtida entre portfolio doméstico total e o índice internacional.	25
Tabela 5 – <i>Home bias</i> no modelo <i>equities only</i> com dois países simétricos.	30
Tabela 6 – <i>Home bias</i> no modelo <i>equities+bonds</i> com dois países simétricos.	30
Tabela 7 – <i>Home bias</i> no modelo <i>equities only</i> e <i>equities+bonds</i> com dois países assimétricos.	31
Tabela 8 – Seleção de ações brasileiras mais correlacionadas com o índice S&P500	42
Tabela 9 – Seleção de empresas brasileiras exportadoras.	42

Sumário

1	INTRODUÇÃO	14
2	É POSSÍVEL DIVERSIFICAR COM ATIVOS NEGOCIADOS DOMESTICAMENTE?	17
2.1	Metodologia:	18
2.1.1	<i>Mean-variance spanning test</i>	18
2.1.2	Ganho de utilidade	20
2.2	Resultados	21
3	ANÁLISE DE HOME BIAS EM UM MODELO DE EQUILÍBRIO GERAL	26
3.1	Modelo apenas com equities	27
3.2	Modelo com equities e bonds	28
3.3	Resultados	29
4	CONCLUSÃO	32
	REFERÊNCIAS	34
	APÊNDICES	36
	APÊNDICE A – DESCRIÇÃO DOS DADOS UTILIZADOS PARA O CÁLCULO DO <i>EHB</i>	37
	APÊNDICE B – DESCRIÇÃO DAS ESTATÍSTICAS DE TESTE DO <i>MEAN VARIANCE SPANNING TEST</i>	38
B.1	Estatística para o teste conjunto	38
B.2	<i>Two step down mean-variance spanning test</i>	40
	C – DESCRIÇÃO DOS DADOS UTILIZADOS PARA CONSTRUÇÃO DA FRONTEIRA EFICIENTE	41
C.1	Grupos considerados como benchmark estendido: ativos correlacionados	41
C.2	Grupos considerados como benchmark estendido: exportadoras	41
	D – CÁLCULO DAS RAZÕES DE HEDGE	43
D.1	Retornos da riqueza financeira: mercado de equities e bonds:	43

D.2	Taxa Real de câmbio:	44
D.3	Retornos da riqueza não financeira	44
D.4	Dados utilizados nas estimativas das razões de hedge:	46
	E – DERIVAÇÃO DO MODELO <i>EQUITIES-ONLY</i>	49
	F – DERIVAÇÃO DO MODELO <i>EQUITIES+BONDS</i>	54

1 Introdução

A tendência dos investidores de concentrar seus investimentos em ações domésticas, o chamado *home bias in equities portfolios*, é um dos *puzzles* mais investigados na literatura de macroeconomia e finanças internacionais. Coeurdacier e Rey (2013) [2] contam que muitas explicações já foram levantadas: motivos de hedge, custos de negociação, falta de integração dos mercados, fluxo ineficiente de informação, entre outras. Porém, não há uma explicação definitiva para o fato de que essa característica se mantém, mesmo com o mercado cada vez mais globalizado.

O estudo seminal de French e Poterba (1991) [1] mostrou que, no final dos anos 80, investidores dos Estados Unidos, Japão, Reino Unido e França mantinham aproximadamente 90% de seu portfólio em ativos domésticos. A Alemanha, apesar de ter uma alocação um pouco menor (79%), ainda tinha um viés bastante alto para o mercado financeiro interno. Isso era surpreendente na época porque, dada a diversificação que os mercados globais podem oferecer, esperaria-se que as famílias teriam uma parcela relevante de seus investimentos em ativos estrangeiros.¹

Nos últimos 30 anos esse viés se reduziu, mas não foi eliminado. Uma perspectiva mais atual desses números pode ser verificada em Coeurdacier e Rey (2013) [2]. Eles reportam que no final de 2008 o nível de investimento em ativos domésticos era 77% para Estados Unidos, 74% para Japão e 55% para o Reino Unido.

Porém, se nos voltamos para os mercados emergentes, em especial o Brasil, esse cenário é ainda mais agudo. Em [2] os autores reportam que no Brasil a parcela de investimento no mercado doméstico era 99% em 2008. Calculamos esse número para 2017 e ele se mantém próximo ao de 10 anos antes: 97%.

É importante destacar o fato de que, quanto mais significativa for uma economia dentro do mercado global, maior deveria ser a alocação dos residentes nos recursos domésticos em um modelo sem fricção. Assim, seguimos a literatura que define o *home bias* através da equação 1.1 e calculamos tal viés na tabela 1.

$$EHB_i = 1 - \frac{\text{Parcela de ativos estrangeiros no portfólio do país } i}{\text{Parcela de ativos estrangeiros no portfólio de mercado global}} \quad (1.1)$$

Tanto a literatura de finanças quanto a de macroeconomia contribuem ativamente para a investigação desse fato estilizado. No primeiro caso, investiga-se o efetivo ganho de

¹ Em um mercado global sem fricções e no qual as preferências sejam homogêneas, o modelo do CAPM internacional prevê que todos os investidores estariam no portfólio de mercado global e o *home bias* seria nulo [3]. Ainda que isso seja uma simplificação, pois as famílias tem preferências heterogêneas e há fricções nas transações financeiras entre diferentes países, a parcela de 90% parece alta.

Ano	Brasil	EUA	Chile	América Latina
2017	97%	62%	69%	89%
2016	96%	60%	65%	89%
2015	95%	59%	63%	91%
2014	97%	61%	66%	95%

Tabela 1 – América Latina inclui os países México, Colômbia, Peru e Argentina. Separamos Chile dessa relação de países porque observamos que ele reduzia o *EHB* do conjunto de maneira significativa dado que sua economia é muito mais aberta que as demais. Para uma descrição das fontes de dados, ver Apêndice A.

diversificação e bem-estar entre portfólios domésticos e internacionalmente diversificados usando técnicas de média-variância. Já no segundo caso, os estudos propõem um modelo macroeconômico com características que justifiquem um certo grau de *home bias*.

Considerando a primeira vertente, no geral a literatura examina se há características do mercado doméstico que estejam suprimindo a necessidade de diversificação internacional. Por exemplo, Rowland e Tesar (2004) [4] verificam se as multinacionais tem capacidade de diversificar o portfólio dos residentes dos países membros do G7. Encontram evidências fracas de que há um efeito de diversificação para Estados Unidos e Alemanha, mas descartam essa possibilidade para Japão, Canadá, Reino Unido, França e Itália.

Huang e Lin (2011) [5] examinam se as ETFs (Exchange Rate Funds) que representam os mercados globais podem adicionar diversificação nos portfólios domésticos e verificam que de fato elas tem essa capacidade. Finalmente, Erruza, Hogan e Hung (2007) [6] verificam que os ativos como American Depositary Receipts (ADRs) e Closed-end country funds (CFs) são capazes de reduzir ou até mesmo eliminar a necessidade do investidor americano buscar diversificação no mercado externo.

Há poucos trabalhos abordando o tema para mercados emergentes, em específico o mercado brasileiro. Driessen e Laeven (2007) [7] compararam os ganhos de diversificação dos países emergentes com o dos países desenvolvidos e concluíram que os benefícios são significativamente maiores para os mercados emergentes. Esse resultado se mantém mesmo após a imposição de restrições a posições vendidas.²

Com base em Rowland e Tesar [4], examinamos se a exposição de empresas brasileiras aos mercados globais estaria reduzindo a necessidade de diversificação com ativos estrangeiros. Utilizando um teste estatístico que compara duas fronteiras eficientes, encontramos que as empresas exportadoras diversificam significativamente o portfólio nacional. Porém, os benefícios de diversificação não são esgotados porque a adição do

² Segundo os autores, uma das explicações para esse resultado é que países emergentes não estão completamente integrados no mercado financeiro (e de bens) internacional. Por isso, países com alto índice ICGR (International Country Risk Guide), que mede risco político, econômico e financeiro, tendem a se beneficiar mais da diversificação do que os com menor índice.

índice S&P muda significativamente a fronteira eficiente.

Já na segunda vertente, Coeurdacier e Rey (2013) [2] mostram que duas necessidades de hedge podem ser responsáveis pelo *home bias*: risco de taxa real de câmbio, pois ela afeta o poder de compra; risco da renda não negociável, pois os investidores preferem ativos que paguem melhor quando a renda recebida for menor. Dessa forma, o distanciamento do portfólio diversificado não necessariamente é resultado de ineficiências, custos ou mesmo preferências distintas, mas sim, um resultado dos diferentes riscos aos quais as famílias estão expostas.³

Encontramos evidências de que os motivos de hedge não conseguem explicar o *home bias*: considerando Ibov como a carteira padrão, o investidor brasileiro deveria estar aproximadamente 48% alocado no mercado nacional. Também verificamos qual seria a alocação ótima se a carteira nacional fosse o portfólio diversificado de equities domésticas que criaremos na seção 2: nesse caso a proporção ótima de alocação seria 46%. Se incluímos bonds em nosso modelo, o *home bias* passa a ser 65% com a carteira do Ibov e 55% com o portfólio diversificado. O fato do portfólio diversificado gerar menor *home bias* provavelmente acontece porque mantemos esse portfólio estático no período inteiro (detalhes sobre a construção do subset de ações utilizado na construção desse portfólio estão no Apêndice C). Já o Ibovespa representa o portfólio diversificado a cada momento do tempo.

As próximas seções estão organizadas da seguinte maneira: a seção 2 examina se conseguimos encontrar um portfólio exclusivamente doméstico que reduza (ou elimine) a necessidade de diversificação internacional; a seção 3 verifica se os motivos de hedge poderiam justificar o *home bias* no portfólio brasileiro; e finalmente, na seção 4 fazemos as considerações finais.

³ Entre outras explicações apresentadas por Coeurdacier e Rey estão os custos de transação de capitais e de bens, bem como diferenças na estrutura legal e na cobrança de impostos entre um país e outro. Esse fator inclusive é destacado por Obstfeld e Rogoff (2000) [8] como uma das principais explicações não apenas para o *home bias* no portfólio de equities, como também para outros fatos estilizados observados em macroeconomia internacional. Além disso, [2] destacam também as fricções e vieses no processamento de informações: o comportamento dos investidores é racional, mas existe uma limitação da quantidade de informações que eles conseguem processar e no geral eles terão um viés de proximidade (as informações sobre o mercado doméstico estarão disponíveis de maneira mais rápida e detalhada).

2 É possível diversificar com ativos negociados domesticamente?

Vamos verificar se no mercado de ações brasileiro há ativos domésticos que estejam suprimindo a necessidade de diversificação.

Há duas hipóteses a serem testadas: (1) se a diversificação proveniente de empresas exportadoras, dada sua exposição aos mercados globais, estaria substituindo (completa ou parcialmente) o investimento em ativos internacionais; (2) se a diversificação proveniente de empresas mais correlacionadas com o índice S&P500 estaria substituindo (completa ou parcialmente) o investimento no índice internacional. Como comentamos, alguns estudos já foram feitos nessa linha para testar o poder de diversificação das multinacionais. Estamos estendendo um pouco essa ideia para abranger ativos que, mesmo sem ter exposição direta ao mercado internacional, tenham correlação relativamente alta com ele.

O procedimento de teste será dividido em duas partes. Inicialmente vamos verificar se há ganho estatisticamente relevante na fronteira eficiente do portfólio doméstico estendido (incluindo exportadoras ou ações de alta correlação com o mercado internacional) em relação ao portfólio doméstico *benchmark*. Porém, a mudança na fronteira eficiente após a inclusão de exportadoras ou ativos correlacionados com o mercado internacional não significa que o país esgotou as possibilidades de diversificação. Por isso, no segundo passo vamos comparar o conjunto inteiro das ações domésticas com o S&P500 para saber se a inclusão do índice causa mudança significativa na fronteira eficiente.

Para tanto, vamos comparar os portfólios *benchmark* e *benchmark* estendido descritos a seguir:

1. O *benchmark* é o portfólio de ações domésticas **exceto** exportadoras. O *benchmark* estendido é formado por todas as ações domésticas.
2. O *benchmark* é o portfólio formado de ações domésticas **exceto** ações altamente correlacionadas com o mercado americano. O *benchmark* estendido é formado por todas as ações domésticas.
3. O *benchmark* é o portfólio formado por todas as ações domésticas. O *benchmark* estendido é formado pelas ações domésticas e pelo S&P500.

Escolhemos usar apenas o S&P500 como índice internacional porque na segunda parte do trabalho analisaremos o *home bias* exclusivamente em relação aos Estados Unidos,

então manteremos a análise restrita a esse país. Porém, seria possível fazer a mesma análise usando outros mercados ou mesmo uma ponderação de diversos mercados.

As próximas seções estão organizadas da seguinte forma: em 2.1.1 descrevemos as estatísticas de teste usadas para definir se há ou não mudança na fronteira eficiente; em 2.1.2 descrevemos a medida de utilidade usada na análise qualitativa entre os diferentes portfólios; em 2.2 descrevemos e discutimos os resultados obtidos.

2.1 Metodologia:

2.1.1 Mean-variance spanning test

O *mean variance spanning test* é uma forma de determinar se a fronteira eficiente dos K ativos do *benchmark* é estatisticamente igual à fronteira eficiente dos $N + K$ ativos do *benchmark estendido*. Não rejeitar a hipótese nula de *spanning* significa constatar que os K ativos do *benchmark* *span* os $N + K$ ativos do *benchmark estendido*. Existem algumas versões para esse teste estatístico, utilizaremos a metodologia via regressão multivariada criada por Huberman e Kandel (1987) [10], especialmente devido sua simplicidade.

Seguindo Kan e Zhou (2012) [9], considere o teste univariado: os K ativos *benchmark* tem retornos R_{Kt} de dimensão $1 \times K$ e os N ativos do *benchmark estendido* tem retornos R_{Nt} de dimensão $1 \times N$:

$$R_{N2} = \alpha + \beta R_{Kt} + \epsilon_t \quad (2.1)$$

Onde as seguintes condições são respeitadas: $Cov[R_{Kt}, \epsilon'_t] = 0$, $E[\epsilon_t] = 0$ e $E[\epsilon_t \epsilon'_t] = \Sigma$ é positiva definida. Além disso, os coeficientes α tem dimensão $N \times 1$ e β tem dimensão $N \times K$. A hipótese nula (H_0) consiste em testar as seguintes restrições:

$$\begin{aligned} H_0-1: \quad \alpha &= \vec{0}_N \\ H_0-2: \quad \delta &= \beta \vec{1}_K - \vec{1}_N \end{aligned} \quad (2.2)$$

Isso é equivalente a testar se a fronteira eficiente dos K ativos do *benchmark* é equivalente ao conjunto $N + K$ do *benchmark estendido*. Quando 2.2 é válida, para todo ativo do conjunto N , conseguimos encontrar um portfólio formado pelos ativos do conjunto K que tem a mesma média, porém variância menor ou igual, pois R_{Kt} e ϵ_t são decorrelacionados e Σ é positiva definida.

O apêndice B mostra a definição de três estatísticas de teste apresentadas em [9]: razão de verossimilhança (LR), teste de Wald (W) e multiplicadores de lagrange (LM). Aqui definiremos apenas a estatística de teste F , robusta para menores amostras:

$$F_{test} = \left(\frac{1}{U^{1/2}} - 1 \right) \left(\frac{T - K - N}{N} \right) \sim F_{2N, 2(T-K-N)}$$

No caso de $N=1$:

$$F_{test} = \left(\frac{1}{\bar{U}} - 1 \right) \left(\frac{T - K - 1}{2} \right) \sim F_{2, 2(T-K-1)} \quad (2.3)$$

Onde $U = \frac{\|\hat{\Sigma}\|}{\|\tilde{\Sigma}\|}$, e $\hat{\Sigma}$ e $\tilde{\Sigma}$ são os estimadores de máxima verossimilhança dos modelos não restrito e restrito, respectivamente.¹

Em 2.3 estamos testando a hipótese conjunta 2.2. Kan e Zhou (2012) apresentam um teste estatístico que avalia as duas hipóteses de maneira separada. Isso é interessante porque, no caso de rejeitarmos H_0 , teríamos um indicativo de qual parte da hipótese nula é responsável pela rejeição: H_0-1 ou H_0-2 . A primeira parte (H_0-1) avalia a diferença estatística entre os portfólios tangentes das duas fronteiras e tem menor acurácia estatística, pois a estimativa de α depende das estimativas das médias dos retornos, que podem variar bastante no tempo. Já a segunda parte (H_0-2), avalia a diferença estatística entre os portfólios de mínima variância. Ela tem maior acurácia pois depende apenas da estrutura de correlação entre os retornos, que varia de forma mais lenta no tempo. Além disso, a melhora do perfil de risco-retorno do portfólio tangente é mais importante que no de mínima variância para o investidor.

Para testar exclusivamente H_0-1 , fazemos um teste estatístico (semelhante ao F-teste GRS) que compara o portfólio tangente da fronteira eficiente com K ativos e com $N + K$ ativos. Chamaremos esse teste de *2-Step #1* daqui em diante.

$$F_1 = \frac{T - K - N}{N} \left(\frac{\|\bar{\Sigma}\|}{\|\hat{\Sigma}\|} - 1 \right) \sim F_{N, T-K-N} \quad (2.4)$$

Onde $\hat{\Sigma}$ é a estimativa de Σ para o modelo não restrito e $\bar{\Sigma}$ é a estimativa para o modelo com a imposição da restrição $\alpha = \vec{0}$. Em seguida testamos H_0-2 dado H_0-1 , que chamamos de *2-Step #2*:

$$F_2 = \frac{T - K - N + 1}{N} \left(\frac{\|\tilde{\Sigma}\|}{\|\bar{\Sigma}\|} - 1 \right) \sim F_{N, T-K-N+1} \quad (2.5)$$

Onde $\tilde{\Sigma}$ é a estimativa de Σ para o modelo englobando as duas restrições e $\bar{\Sigma}$ é a estimativa para o modelo com apenas uma restrição. No apêndice B.2 descrevemos em linhas gerais como calculamos essas estatísticas de teste.

¹ A notação $\|A\|$ indica a norma da matriz A.

Há duas desvantagens na abordagem apresentada. A primeira é que ela não é robusta à heterocedasticidade dos resíduos, característica importante quando lidamos com retornos financeiros. Rowland e Tesar (2004) [4] resolvem esse problema usando o método dos momentos generalizados, mas não conseguimos implementar essa metodologia. Os testes via regressão apresentam sistematicamente maior rejeição da hipótese de *spanning*, quando comparado à metodologia via método dos momentos. Por isso, além de fazermos os testes estatísticos aqui apresentados, também avaliaremos as diferenças na razão de Sharpe e na utilidade do investidor para os portfólios testados. Esse conjunto de testes podem dar um indicativo se há um portfólio doméstico que replica, total ou parcialmente, o portfólio internacional.

O segundo problema dessa metodologia (tanto via regressão multivariada quanto via método dos momentos) é que não conseguimos testar a hipótese nula de *spanning* aplicando restrições às posições dos portfólios, ou seja, são permitidas posições vendidas e alavancagem. Vamos atacar essa questão de maneira qualitativa, fazendo uma comparação entre as métricas de razão de Sharpe e utilidade para esses portfólios com e sem a imposição de restrições no posicionamento do portfólio.

2.1.2 Ganho de utilidade

Embora o teste estatístico permita identificar se há mudança na fronteira eficiente dos ativos, ele não consegue mostrar qual o tamanho dessa mudança e nem se ela é economicamente significativa. Para medir isso, Rowland e Tesar (2004) [4] propõem calcular o ganho de utilidade associado ao perfil de risco-retorno de uma fronteira eficiente em relação à outra. Essa análise é feita apenas se rejeitarmos a hipótese de *spanning*, pois se essa hipótese não for rejeitada, não há evidências de que as duas fronteiras eficientes sejam diferentes.

Na equação 2.6, C_t denota o consumo permanente no período t de um indivíduo investido no portfólio ótimo do *benchmark* e C_t^* é o consumo de um indivíduo investido no portfólio ótimo do *benchmark estendido*. O ganho é medido em ζ :

$$U_0(C_0) = U_0(C_0^*(1 - \zeta)) \quad (2.6)$$

A partir disso é possível ter uma medida, ainda que qualitativa, do ganho de bem estar com a mudança para o portfólio mais diversificado. Em [4], os autores utilizam a função utilidade Epstein-Zin-Weil, pois ela permite diferenciar os parâmetros de aversão ao risco γ e elasticidade de substituição intertemporal θ .

$$U_t = [c_t^{(1-\theta)} + \beta[\mathbf{E}_t(U_{t+1}^{1-\gamma})]^{\frac{1-\theta}{1-\gamma}}]^{\frac{1}{1-\theta}} \quad \text{for } \gamma, \theta > 0; \quad \gamma, \theta \neq 1 \quad (2.7)$$

Assumindo que os retornos dos dois portfólios tem distribuição log-normal, ou seja a distribuição dos retornos do portfólio *benchmark* e do portfólio *benchmark estendido* são, respectivamente, $\ln(R_{Kt}) \sim N(\mu_K - (1/2)\sigma_K^2, \sigma_K^2)$ e $\ln(R_t) \sim N(\mu - (1/2)\sigma^2, \sigma^2)$, podemos escrever a utilidade esperada de um indivíduo investido em um determinado portfólio ótimo da fronteira eficiente:

Para o portfólio *Benchmark* temos a utilidade:

$$\mathbf{E}_t U(C_t) = W_t \left\{ 1 - \beta \left[(1 - \theta) \left(\mu_K - \frac{\gamma \sigma_K^2}{2} \right) \right] \right\}^{-\frac{1}{1-\theta}}$$

Para o portfólio *Benchmark estendido* temos a utilidade:

$$\mathbf{E}_t U(C_t^*) = W_t \left\{ 1 - \beta \left[(1 - \theta) \left(\mu - \frac{\gamma \sigma^2}{2} \right) \right] \right\}^{-\frac{1}{1-\theta}} \quad (2.8)$$

W_t representa a riqueza do investidor em determinado instante t , assume-se que seja exógena. Usando 2.8, calculamos o nível de utilidade associado a cada um dos portfólios e, em seguida, verificamos a redução percentual no consumo necessária para tornar o investidor indiferente as dois portfólios analisados.

2.2 Resultados

Utilizando a metodologia abordada em 2.1, vamos verificar se é possível atingir algum nível de diversificação mesmo sem acessar o mercado internacional. Estamos usando retornos semanais entre janeiro/1996 e julho/2018 para 31 ações do mercado brasileiro e para o índice S&P500. No apêndice C fornecemos detalhes sobre os critérios de escolha dos ativos. A partir disso, criamos os portfólios *benchmark* e *benchmark estendido*, como foi definido no início da seção 2. Os benefícios da diversificação são analisados da perspectiva de um investidor brasileiro, então converteremos todos os retornos para a moeda BRL utilizando as cotações disponíveis na Bloomberg.

Uma das desvantagens desse tipo de análise de portfólio é que a dinâmica da correlação dos preços pode mudar no tempo, principalmente quando temos um conjunto temporal extenso. Por isso, além de analisar o conjunto total de dados (22 anos), também analisamos subconjuntos temporais de 11 anos e 7 anos, a fim de verificar se encontramos resultados equivalentes.

Dado que o teste de *spanning* não impõe restrições de alavancagem ou posição no portfólio e o investidor comum está sujeito a essas restrições, o resultado desse teste pode não estar refletindo a realidade dos investidores. Por isso, foi feito o exercício de calcular o perfil de risco-retorno do portfólio tangente incluindo essas restrições e compará-lo aos

resultados obtidos sem essa imposição. Apesar de não ser possível testar a hipótese de *spanning*, conseguimos avaliar qualitativamente a diferença entre o ganho de utilidade e o aumento da razão de Sharpe nos dois casos. Os cálculos foram feitos no *software R* ²

Reportamos os resultados para os três testes realizados nas tabelas 2, 3 e 4. Na primeira avaliamos o benchmark estendido de ações com alta correlação com o índice internacional ³. Rejeitamos a hipótese de *spanning* em todos os testes realizados para os períodos mais longos (22 anos e 11 anos) ao nível de 5% de confiança, exceto no *2-Step #1*. Isso mostra que há sim uma diferença nas fronteiras, mas ela vem principalmente do portfolio de mínima variância. Nos subconjuntos em que H0 foi rejeitada, notamos um aumento médio de utilidade e razão de Sharpe de, respectivamente, 1.6% e 9.7%.

Na segunda reportamos o teste em que o benchmark estendido é formado por ações de exportadoras ⁴. Rejeitamos a hipótese de *spanning* para todos os testes ao nível de 5% de confiança, exceto no *2-Step #1*. Notamos um aumento médio de utilidade e razão de Sharpe de, respectivamente, 4% e 21.5%. O mesmo ocorre se o benchmark estendido é o índice S&P: rejeitamos H0 em todos os testes. Logo, apesar das exportadoras adicionarem diversificação ao universo das ações domésticas, elas não esgotam as possibilidades de diversificação internacional. Porém, vemos aumento menos expressivo de utilidade e razão de Sharpe (respectivamente 1% e 12.8%).

Na próxima seção, usaremos esse portfolio ótimo localmente diversificado dentro do modelo macroeconômico para verificar se ele reduziria o *home bias*. Vamos comparar esses resultados com o obtido considerando-se a carteira padrão sendo o Ibovespa (que é o mais usualmente feito na literatura).

² As funções criadas pela autora para realização dos testes estatísticos mencionados estão disponíveis sob demanda. Utilizou-se o pacote estatístico **fPortfolio** para obter as fronteiras eficientes, bem como os portfolios tangentes e de mínima variância.

³ No apêndice C.1 descrevemos em detalhes quais ações estão nesse conjunto.

⁴ No apêndice C.1 descrevemos em detalhes quais ações estão nesse conjunto.

A Portfolio sem restrições: permite posições vendidas, compradas e alavancagem						
Período	1996-2018	2008-2018	1996-2007	2011-2018	2004-2011	1996-2004
# ativos benchmark	23	23	23	23	23	23
# ativos benchmark estendido	8	8	8	8	8	8
# Obs	1186	593	593	395	395	395
LR p-value	0%	0%	0%	16%	5%	18%
W p-value	0%	0%	0%	14%	4%	17%
LM p-value	0%	0%	0%	18%	5%	19%
F p-value	0%	0%	0%	22%	7%	24%
2-Step test - 1	100%	100%	100%	100%	100%	100%
2-Step test - 2	0%	0%	0%	2%	5%	16%
Utility gain (%) ($\gamma = 2$ e $\theta = 5$)	1,27%	1,65%	1,96%	NA	NA	NA
Sharpe ratio change % change	4,92%	10,53%	13,70%	NA	NA	NA
Absolute Change	0,033483	0,064079	0,155283	NA	NA	NA
B Portfolio sem alavancagem e apenas com posições compradas						
Utility gain (%) ($\gamma = 2$ e $\theta = 5$)	0,53%	0,00%	0,37%	NA	NA	NA
Sharpe ratio change % change	1,02%	0,00%	0,68%	NA	NA	NA
Absolute Change	0,005475	0	0,005801	NA	NA	NA

Tabela 2 – *Benchmark* formado por ações domésticas, exceto as relativamente mais correlacionadas com o índice S&P500 no período; *Benchmark estendido* formado por todas as ações domésticas. Para cada subconjunto temporal de dados analisamos as correlações do período, então as ações que fazem parte do benchmark e do benchmark estendido são diferentes entre eles. Rejeitamos a hipótese de *spanning* ao nível de 5% de confiança para os períodos mais longos (22 anos e 11 anos) em todos os testes, exceto o *2-Step #1*. Dessa forma conseguimos perceber que as fronteiras eficientes são diferentes, mas a diferença no portfolio tangente não é expressiva. A tabela também apresenta as mudanças de utilidade e razão de Sharpe associadas ao portfolio tangente sem restrições (parte **A**) e com restrições (parte **B**) para os conjuntos em que rejeitamos H_0 . Esse teste foi realizado para elucidar se restrições de investimento reduziram a capacidade do *benchmark estendido* de diversificar o portfolio. Nota-se que essa capacidade se reduz bastante, a melhora média de utilidade passa de 1.6% para 0.3% enquanto a aumento médio da razão de Sharpe passa de 9.7% para 0.6%. É possível inferir que no teste de *spanning* considerando essas restrições, teríamos uma rejeição menor na hipótese nula.

A Porfolio sem restrições: permite posições vendidas, compradas e alavancagem						
Período	1996-2018	2008-2018	1996-2007	2011-2018	2004-2011	1996-2004
# ativos benchmark	24	24	24	24	24	24
# ativos benchmark estendido	7	7	7	7	7	7
# Obs	1186	593	593	395	395	395
LR p-value	0%	0%	0%	0%	0%	1%
W p-value	0%	0%	0%	0%	0%	1%
LM p-value	0%	0%	0%	0%	0%	1%
F p-value	0%	0%	0%	0%	0%	2%
2-Step test - 1	100%	100%	100%	100%	100%	100%
2-Step test - 2	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Utility gain (%) ($\gamma = 2$ e $\theta = 5$)	1,15%	2,33%	5,64%	0,84%	0,78%	13,15%
Sharpe ratio change % change	4,18%	14,31%	25,79%	13,62%	11,69%	59,59%
Absolute Change	0,028605	0,084175	0,264242	0,164435	0,157470	0,414444
B Porfolio sem alavancagem e apenas com posições compradas						
Utility gain (%) ($\gamma = 2$ e $\theta = 5$)	0,69%	0,00%	3,38%	-0,22%	1,75%	9,04%
Sharpe ratio change % change	1,92%	0,00%	11,41%	0,62%	7,03%	24,96%
Absolute Change	0,010221845	0	0,088316094	0,006335163	0,073132834	0,117582597

Tabela 3 – *Benchmark* formado por ações domésticas exceto as exportadoras e *Benchmark estendido* formado por todas ações domésticas. Rejeitamos a hipótese de *spanning* ao nível de 5% de confiança para todos os conjuntos temporais, exceto no teste *2-Step #1*. O subconjunto de exportadoras se manteve o mesmo em todo o período pois não conseguimos dados suficientes para modificá-lo temporalmente. A tabela também apresenta as mudanças de utilidade e razão de Sharpe associadas ao portfolio tangente sem restrições (parte **A**) e com restrições (parte **B**) para os conjuntos em que rejeitamos H_0 . Esse teste foi realizado para elucidar se restrições de investimento reduziriam a capacidade do *benchmark estendido* de diversificar o portfolio. Nota-se que essa capacidade se reduz bastante, a melhora média de utilidade passa de 4% para 2.4% enquanto a aumento médio da razão de Sharpe passa de 21.5% para 7.4%. É possível inferir que no teste de *spanning* considerando essas restrições, teríamos uma rejeição menor na hipótese nula.

A Porfolio sem restrições: permite posições vendidas, compradas e alavancagem						
Período	1996-2018	2008-2018	1996-2007	2011-2018	2004-2011	1996-2004
# ativos benchmark	31	31	31	31	31	31
# ativos benchmark estendido	1	1	1	1	1	1
# Obs	1186	593	593	395	395	395
LR p-value	0%	0%	0%	0%	0%	0%
W p-value	0%	0%	0%	0%	0%	0%
LM p-value	0%	0%	0%	0%	0%	0%
F p-value	0%	0%	0%	0%	0%	0%
2-Step test - 1	98%	97%	98%	92%	97%	99%
2-Step test - 2	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Utility gain (%) ($\gamma = 2$ e $\theta = 5$)	1,57%	0,63%	0,67%	0,18%	1,07%	
Sharpe ratio change % change	12,28%	14,13%	12,71%	15,90%	4,61%	17,43%
Absolute Change	0,087647	0,095034	0,163835	0,218095	0,069323	0,193514
B Porfolio sem alavancagem e apenas com posições compradas						
Utility gain (%) ($\gamma = 2$ e $\theta = 5$)	-0,52%	0,42%	-0,41%	-2,12%	0,00%	0,00%
Sharpe ratio change % change	1,68%	4,03%	0,06%	14,35%	0,00%	0,14%
Absolute Change	0,009127	0,017996	0,000530	0,146845	0,000000	0,000852

Tabela 4 – *Benchmark* formado por ações domésticas e *Benchmark estendido* formado por ações domésticas e o índice S&P500. Rejeitamos a hipótese de *spanning* em todos os testes, exceto no *2-Step #1*. Logo, as fronteiras eficientes são diferentes, mas a diferença no portfolio tangente não é expressiva. A tabela também apresenta as mudanças de utilidade e razão de Sharpe associadas ao portfolio tangente sem restrições (parte **A**) e com restrições (parte **B**) para os conjuntos em que rejeitamos H_0 . Esse teste foi realizado para elucidar se restrições de investimento reduziriam a capacidade do *benchmark estendido* de diversificar o portfolio. Nota-se que essa capacidade se reduz bastante, a variação média de utilidade passa de 1% para -0.4% enquanto a aumento médio da razão de Sharpe passa de 12.4% para 3.4%. É possível inferir que no teste de *spanning* considerando essas restrições, teríamos uma rejeição menor na hipótese nula. Um resultado digno de nota é a redução da utilidade, mesmo com o aumento da razão de Sharpe. O portfolio diversificado com S&P tem variância bem menor, mas também tem retorno médio menor. Com as preferências utilizadas, verificamos a melhora de utilidade proveniente da redução da variância do portfolio é compensada pela piora da utilidade devido à redução do retorno médio do portfolio diversificado.

3 Análise de home bias em um modelo de equilíbrio geral

Como já mencionado, uma das justificativas mais exploradas na literatura de macroeconomia financeira internacional para o distanciamento do portfolio completamente diversificado e sem fricções previsto por Lucas (1982) [3] são os motivos de hedge.

Quanto a primeira necessidade de hedge, caso o mercado doméstico ofereça maior retorno (relativamente ao mercado internacional) justamente no momento em que a moeda aprecia, o *home bias* aparece. Consideraremos duas proxies para o retornos financeiros do Brasil: o índice de mercado (Ibovespa) e o portfolio ótimo doméstico obtido na seção 2. Encontramos uma correlação positiva e relativamente alta para as duas proxies: 74% para o índice Ibovespa e 57% para o portfolio diversificado.¹

Já no caso do risco de renda não negociável o *home bias* aparece se os retornos financeiros domésticos forem altos (relativamente ao mercado estrangeiro) quando o retorno da renda for baixo (também relativamente ao mercado estrangeiro). Há uma discussão na literatura se essa covariância é ou não negativa. Por um lado o estudo de Baxter e Jermann (1997) [11] encontra uma covariância bastante positiva entre essas duas variáveis. Diante disso eles argumentam que essa necessidade de hedge deveria aumentar o viés para ativos estrangeiros e não reduzir.²

Porém, há estudos desafiando tanto as premissas teóricas quanto a estimativa empírica das variáveis de [11]. Do ponto de vista teórico, Heathcote e Perri (2013) [12] mostram que, em um modelo com dois países, dois bens, com consumo e investimento diferenciados e crescimento endógeno do capital (diferentemente de [11] que considera o capital fixo), é possível observar uma correlação negativa entre renda e capital.³ Já Julliard (2002) [13] afirma que a conclusão de [11] é resultado de uma má especificação econométrica, pois eles consideram que o movimento de renda e capital nos diferentes países são independentes, o que não é verdade. Uma vez que se considere essa dependência, o hedge de renda não pioraria o *home bias*.

Como há uma variedade de abordagens para calcular esse retorno, escolhemos a

¹ Os apêndices D.1 e D.2 descrevem, respectivamente, e os cálculos dos retornos financeiros e da taxa de câmbio real.

² O retorno da renda não financeira é estimado impondo a restrição de que a razão entre renda e capital é estacionária para determinar o retorno da renda e do capital. A partir disso chega-se à conclusão de que as duas variáveis são positivamente correlacionadas. Do ponto de vista teórico, partem da premissa que há apenas um bem negociável nas duas economias e que o capital é fixo.

³ Esse modelo também faz premissas bastante fortes, como considerar utilidade logarítmica e, conseqüentemente, elasticidade de substituição entre os bens domésticos e estrangeiros unitária. Segundo [2], se aumentarmos a elasticidade de substituição, os resultados convergem para os de [11].

proposta por Couerdacier e Gourinchas (2016) [14]. Descrevemos a metodologia de cálculo em detalhes no apêndice D.3. Para os dados de Brasil encontramos correlação positiva entre os retornos financeiros e não financeiros relativos entre os dois países: 57% para o Ibovespa e 46% para o portfólio diversificado. Logo, o modelo apenas com equities mostra de fato que o *home bias* é pior do que pensamos. Enquanto o hedge de taxa de câmbio melhora o *home bias*, o hedge de renda piora. Ao final, no modelo apenas com equities, encontramos que a alocação ótima do investidor no mercado nacional seria 48% (usando Ibov) e 46% usando o portfólio diversificado.

[2] e [14] mostram que, apesar do modelo envolvendo apenas equities não conseguir de explicar o *home bias*, um modelo que envolva outras classes de ativos poderia ser capaz de fazê-lo. Entre os argumentos utilizados estão o fato de que o mercado de dívida é mais adequado para proteger os investidores da taxa real de câmbio. Além disso, como há substituíbilidade entre os diferentes tipos de ativos, os modelos que envolvem apenas equities não contam a história completa.

Todavia, nos dados de Brasil observamos uma correlação de apenas 10% entre os retornos da taxa real de câmbio e dos bonds nominais brasileiros, diferentemente dos dados reportados na literatura. Ainda assim, verificamos que a inclusão de bonds melhora o cenário de *home bias*: a alocação ótima do investidor no mercado nacional se torna 65% (para a proxy Ibov) e 55% (proxy portfólio diversificado).

É importante ressaltar também que esses números são resultado da análise de dois países simétricos. Considerando a assimetria entre Brasil e Estados Unidos, obtemos vieses muito maiores: o modelo apenas com equities prevê -2% e -4.6% de *home bias* (alavancagem no mercado internacional) para o Ibovespa e o portfólio diversificado, respectivamente; o modelo incluindo bonds, prevê 15.4% e 7.3% de *home bias* para o Ibovespa e o portfólio diversificado, respectivamente. O pior resultado do portfólio diversificado provavelmente tem relação com o fato de ser um portfólio estatico de um subset de ações do mercado brasileiro, enquanto o Ibovespa representa um portfólio diversificado diferente a cada momento do tempo.

Nas próximas duas seções deste trabalho apresentaremos o modelo composto apenas de ações em 3.1 e, em seguida, na seção 3.2 o modelo incluindo *bonds* nominais. Ambas análises tem como base [2] e [14]. Finalmente, na seção 3.3 apresentamos os resultados obtidos.

3.1 Modelo apenas com equities

Com base no trabalho de Couerdacier e Rey (2013) [4], definimos um modelo com dois países simétricos (H e F) e um agente representativo em cada um. Os dois países produzem apenas um bem utilizando capital (fixo) e trabalho. Abaixo a expressão

de aproximação de primeira ordem do portfólio ótimo obtida após derivação do modelo (disponível no apêndice E):

$$S = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1 + 1/\sigma}{\delta} \frac{RE\hat{R}_t}{\hat{d}_t} - \frac{1 - \delta}{\delta} \frac{w_t \hat{l}_t}{\hat{d}_t} \right) \quad (3.1)$$

Onde $w_t \hat{l}_t = w_{H,t} \hat{l}_{H,t} - w_{F,t} \hat{l}_{F,t} = \hat{r}_t^n$ é a renda do trabalho relativa entre os dois países (o que empiricamente chamamos de retorno não financeiro), $\hat{d}_t = \hat{d}_{H,t} - \hat{d}_{F,t} = \hat{r}_t^f$ são os dividendos relativos (que chamamos de retorno financeiro) e $RE\hat{R}_t$ é a taxa de câmbio real dos dois países. Fazendo a covariância com os dividendos temos a seguinte expressão:

$$S = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1 - \delta}{\delta} \frac{cov(\hat{r}_t^n, \hat{r}_t^f)}{var(\hat{r}_t^f)} + \frac{1}{2} \frac{1 - 1/\sigma}{\delta} \frac{cov(RE\hat{R}_t, \hat{r}_t^f)}{var(\hat{r}_t^f)} \quad (3.2)$$

O termo $1/2$ de 3.2 representa o portfólio quando não há motivo algum de hedge no modelo sem fricções e de preferências homogêneas. Nesse caso, o agente investiria metade de sua riqueza em cada país para obter diversificação máxima.

O termo $\frac{1-\delta}{\delta} \frac{cov(w_t \hat{l}_t, \hat{d}_t)}{var(\hat{d}_t)}$ traduz o efeito de hedge de renda não negociável, com $\delta \approx 1 - \frac{COMP}{Y-T} = 0.4$. Se as ações domésticas pagam mais que as ações estrangeiras quando a renda doméstica é menor (relativamente ao país estrangeiro), então os agentes terão um viés para investir no mercado doméstico.

Já o termo $\frac{1-1/\sigma}{\delta} \frac{cov(RE\hat{R}_t, \hat{d}_t)}{var(\hat{d}_t)}$ traduz o efeito do hedge de taxa de câmbio no *home bias*. Esse efeito pode ser diferente dependendo se a aversão ao risco é maior ou menor do que 1. Em nossa análise consideramos $\sigma = 2$, como comumente utilizado na literatura. Nesse caso, as famílias escolhem o portfólio que tenha maior retorno quando os bens ficam mais caros (taxa de câmbio aprecia).

Como já mencionado na seção anterior, o apêndice D explica com detalhes como obtivemos os dados empíricos para fazer o cálculo dessas covariâncias.

3.2 Modelo com equities e bonds

Seguindo o trabalho de Couerdacier e Gourinchas (2016) [14], definimos um modelo de dois períodos com dois países simétricos (H e F) e um agente representativo em cada um. Os agentes podem negociar ações e bonds internacionalmente. No apêndice F descrevemos em maiores detalhes a derivação da expressão do portfólio ótimo com bonds e ações:

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2} - \frac{1 - \delta}{\delta} \beta_{r^n, r^f} + \frac{1 - \frac{1}{\sigma}}{\delta} \beta_{RER, r^f} \\
b &= \frac{1}{2} \left(\left(1 - \frac{1}{\sigma}\right) \beta_{RER, r^b} - (1 - \delta) \beta_{r^n, r^b} \right)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Onde β_{RER, r^b} e β_{r^n, r^b} são, respectivamente, os retornos condicionais dos bonds à taxa real de câmbio e ao retorno da renda não financeira. Já β_{RER, r^f} e β_{r^n, r^f} são, respectivamente, os retornos condicionais do mercado de ações à taxa de câmbio e ao retorno não financeiro. Esses parâmetros são calculados com base na projeção dos retornos de bonds e equities na taxa de câmbio real e nos retornos não financeiros:

$$\begin{aligned}
\Delta R\hat{E}R - E_0 \Delta R\hat{E}R &\equiv \beta_{RER, r^b} \hat{r}^b + \beta_{RER, r^f} \hat{r}^f + u_q \\
\hat{r}^n &\equiv \beta_{r^n, r^b} \hat{r}^b + \beta_{r^n, r^f} \hat{r}^f + u_n
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Onde u_q e u_n são os resíduos dessas regressões.

3.3 Resultados

Após obter todos os dados (descritos detalhadamente no apêndice D), finalmente calculamos a alocação esperada no mercado doméstico a partir das covariâncias incondicionais (modelo *equities-only*) e condicionais (modelo *equities e bonds*).

A tabela 5 resume os dados obtidos para o modelo *equities-only* em ambas as proxies. O nível ótimo de *home bias* calculado a partir dos fatores encontrados com a proxy 1 é 48%. Já o nível encontrado com a proxy 2 é ainda maior: 46%. Em concordância com [11], encontramos que a covariância positiva entre os retornos não financeiros e financeiros relativos torna o *home bias* "worst than you think". O hedge de taxa de câmbio melhora esse cenário quase na mesma medida, gerando um *home bias* de quase 50%, que seria o previsto em um modelo sem fricções.

A tabela 6 mostra as razões de hedge condicionais encontradas com base em 3.4. Os resultados ali expostos estão alinhados com os encontrados na literatura: a covariância entre os retornos financeiros e não financeiros relativos condicional aos bonds é negativa, enquanto a incondicional é positiva. Após a inclusão dos bonds, a alocação ótima do investidor no mercado doméstico é 65% para a proxy 1 e 55% para a proxy 2. Todavia, esse número ainda é baixo se comparado com o dado observado em 2017 (97%).

Os resultados das tabelas 5 e 6 foram obtidos a partir do modelo de países simétricos. Couerdacier e Gourinchas [14] também derivam o modelo com países assimétricos e chegam na seguinte expressão para o *home bias*:

	Proxy 1: Ibovespa		Proxy 2: Portfolio Diversificado	
	$\frac{cov(\hat{R}ER, \hat{r}^f)}{var(\hat{r}^f)}$	$\frac{cov(\hat{r}^n, \hat{r}^f)}{var(\hat{R}^f)}$	$\frac{cov(\hat{Q}, \hat{r}^f)}{var(\hat{r}^f)}$	$\frac{cov(\hat{r}^n, \hat{r}^f)}{var(\hat{r}^f)}$
	Razão de Hedge	0,38	0,35	0,38
T-stat	11	6,5	6,4	4,8
P-valor	0%	0%	0%	0,8%
R2	58%	32%	32,3%	20,3%
Home Bias	48%		46%	

Tabela 5 – Todos os fatores de ambas as proxies tem relevância estatística a 5% de confiança. O nível ótimo de *home bias* calculado a partir dos fatores encontrados com a proxies 1 e 2 são, respectivamente, 48% e 46%. Logo, os números apresentados na Tabela 1 não podem ser justificados pelos motivos de hedge do modelo macroeconômico apenas com equities. Os resultados estão alinhados com os encontrados em [14] para os países G7 (tabelas 2 e 3).

	Proxy 1: Ibovespa			
	$\beta_{RER,rb}$	$\beta_{RER,rf}$	$\beta_{r^n,rb}$	$\beta_{r^n,rf}$
Razão de Hedge	1,04	-0,03	1,2	-0,11
T-stat	51,3	-2,6	14,4	-2,1
P-valor	0%	1%	0%	4%
R2	98,6%		72,8%	
Home bias	65%			

	Proxy 2: Portfolio diversificado			
	$\beta_{RER,rb}$	$\beta_{RER,rf}$	$\beta_{r^n,rb}$	$\beta_{r^n,rf}$
Razão de Hedge	1,01	-0,01	1,05	-0,04
T-stat	61	-1,2	12,2	-0,71
P-valor	0%	23,5%	0	48%
R2	95,5%		71,5%	
Home bias	55%			

Tabela 6 – Todos os fatores da proxy Ibovespa tem relevância estatística a 5% de confiança. Já na proxy do portfolio diversificado, os fatores $\beta_{RER,rf}$ e $\beta_{r^n,rf}$ não tem relevância estatística. Encontramos valores de *home bias* de 65% e 55% para, respectivamente, as proxies 1 e 2. Os resultados da proxy 1 estão alinhados com os exibidos nas tabelas 2 e 3 de [14]. A inclusão dos bonds torna o fator do retorno não financeiro negativo e significativo também para as economias dos G7.

Portfolio assimétrico no modelo com equities:

$$S = \omega + (1 - \omega) \left(\frac{1 - 1/\sigma}{\delta} \frac{cov(\hat{R}ER_t, \hat{r}_t^f)}{var(\hat{r}_t^f)} - \frac{1 - \delta}{\delta} \frac{cov(\hat{r}_t^n, \hat{r}_t^f)}{var(\hat{r}_t^f)} \right)$$

Portfolio assimétrico no modelo com bonds+equities:

$$S = \omega + (1 - \omega) \left(\frac{1 - 1/\sigma}{\delta} \beta_{RER,rf} - \frac{1 - \delta}{\delta} \beta_{r^n,rf} \right) \quad (3.5)$$

Onde ω é o tamanho do país em relação ao mercado mundial. No caso do Brasil,

	Proxy 1: Ibovespa	Proxy 2: Portfolio ótimo
Equities Only Model	-2,04%	-4,57%
Equities+Bonds Model	15,43%	7,26%

Tabela 7 – Os números de *home bias* ficam bem maiores quando consideramos o tamanho relativo das duas economias. No modelo de equities esperamos que o país doméstico se alavanque no mercado internacional. Observamos que a diferença entre o modelo de equities e o modelo incluindo bonds se mantém a mesma, apenas o nível de home bias muda em relação ao exibido nas tabelas 5 e 6.

a participação média no mercado mundial nos últimos quatro anos foi de 1,07% e a dos Estados Unidos foi de 39,4%. Dessa forma, se considerarmos o conjunto desses dois países, o Brasil tem uma participação de 2,65%. Calculamos então o *home bias* considerando a diferença entre as economias do Brasil e dos Estados Unidos, utilizando as mesmas covariâncias (condicionais e incondicionais) exibidas nas tabelas 5 e 6 dentro de 3.5. Os resultados obtidos estão resumidos na tabela 7.

Couerdacier e Gourinchas (2016) também calculam esses números para os G7 em [14] (Tabela 4) e encontram *home bias* de 12,5% (modelo com equities) e 101,7% (modelo com equities+bonds) para os Estados Unidos em relação ao conjunto dos G7. Nesse caso o ganho do modelo de bonds em relação ao de equities é muito maior do que no caso brasileiro. Isso acontece porque a diferença entre o efeito da taxa de câmbio e da renda é maior para os Estados Unidos em relação aos G7 do que para o Brasil em relação aos Estados Unidos. Nas Tabelas 2 e 3 de [14] verifica-se que os fatores incondicionais entre Estados Unidos e o conjunto G7 são $\frac{cov(RE\hat{R}_t, \hat{r}_t^f)}{var(\hat{r}_t^f)} = 0,733$ e $\frac{cov(\hat{r}_t^n, \hat{r}_t^f)}{var(\hat{r}_t^f)} = 0,595$, enquanto para Brasil encontramos, respectivamente, 0,38 e 0,35. Já as covariâncias condicionais dos Estados Unidos em relação aos G7 são $\beta_{RE, r^f} = -0,013$ e $\beta_{r^n, r^f} = -0,252$, enquanto para Brasil encontramos, respectivamente, -0,03 e -0,11. Dado que a magnitude e a diferença entre essas covariâncias é maior, verificamos um efeito maior para Estados Unidos em relação aos G7 do que para Brasil em relação aos Estados Unidos. Além disso, para eles $\delta = 0,19 < 0,4$, o que coloca maior peso no termo de renda não negociável, pois esse termo é multiplicado por $1 - \delta$.

4 Conclusão

Os números da tabela 1 mostram que o Brasil diversifica muito pouco o portfólio de equities internacionalmente, menos que os países desenvolvidos e até mesmo que a média dos países latino-americanos. O objetivo desse trabalho foi tentar elucidar por que isso acontece.

Na seção 2 verificamos se alguma combinação dos ativos domésticos poderia reduzir a necessidade de investimento em ativos internacionais. Observamos que as exportadoras conseguem reduzir a necessidade de diversificação, mas não eliminá-la. Como pode ser observado nos resultados das tabelas 3 e 4, mesmo com a inclusão de exportadoras, o índice internacional adiciona diversificação. Se comparamos as partes A e B da tabela 4, verificamos que a restrição de posições compradas reduz a melhora da razão de sharpe e da utilidade associadas ao portfólio tangente. Isso provavelmente explica porque verificamos uma mudança significativa na fronteira eficiente, mas não observamos menor *home bias* nos dados.

Na sessão 3 utilizamos um modelo macroeconômico de equilíbrio geral para verificarmos se os motivos de hedge em relação aos riscos de taxa de câmbio e de renda seriam os responsáveis pelo alto nível de *home bias* do Brasil. O modelo apenas com equities não evidenciou existência de *home bias*: encontramos que o portfólio deveria ser quase completamente diversificado, com aproximadamente 50% de nível ótimo de investimento doméstico para ambas as proxies utilizadas para o retorno financeiro (dados da tabela 5). Já com a inclusão dos bonds nominais, encontramos viés para os ativos domésticos: a alocação doméstica seria 65% com a proxy Ibovespa e 55% com a proxy do portfólio diversificado construída na seção 2. Ainda assim, não conseguimos explicar o nível de 97% verificado nos dados. Esse cenário piora quando consideramos a assimetria entre os dois países analisados: a tabela 7 mostra que no modelo de equities deveríamos observar alavancagem no mercado internacional, enquanto o modelo de bonds indica alocação doméstica próxima a 15%.

Dessa forma, os motivos de hedge e a exposição do mercado doméstico à economia internacional explicam apenas uma pequena parte do *home bias* observado. Seja analisando outros aspectos da questão, como os vieses informacionais ou os custos, seja aprimorando a metodologia aqui apresentada, há muito espaço para investigação. O teste estatístico, por exemplo, deveria comparar fronteiras eficientes com alavancagem limitada, mais alinhada com a realidade dos investidores. No que diz respeito ao modelo macroeconômico, poderíamos incluir novas classes de ativos e verificar se elas introduziram maior *home bias*. Os bonds atrelados à inflação, por exemplo, tem volume significativo no mercado

brasileiro e provavelmente representam papel importante no problema de otimização do agente doméstico. Então, seria interessante complementar esse estudo com a inclusão desses ativos.

Referências

- [1] French K., Poterba J. *Investor Diversification and International Equity Markets*. American Economic Review 1991 Citado na página 14.
- [2] Coeurdacier N., Rey H. *Home Bias in Open Economy Financial Macroeconomics*. Journal of Economic Literature 2013 Citado 4 vezes nas páginas 14, 16, 26 e 27.
- [3] Lucas R. *Interest rates and currency prices in a two-country world*. Journal of Monetary Economics 1982 Citado 2 vezes nas páginas 14 e 26.
- [4] Rowland P., Tesar L. *Multinationals and the gains from international diversification*. Review of Economic Dynamics 2004 Citado 5 vezes nas páginas 15, 20, 27, 49 e 51.
- [5] Huang M., Lin J. *Do ETFs provide effective internacional diversification?*. Research in International Business and Finance 2011 Citado na página 15.
- [6] Erruza V., Hogan K., Hung M. *Can the gains from international diversification be achieved without trading abroad*. Journal of Banking and Finance 2007 Citado na página 15.
- [7] Driessen J., Laeven L. *International portfolio diversification benefits: cross-country evidence from local perspective*. Journal of Banking and Finance 2007 Citado na página 15.
- [8] Obstfeld M., Rogoff K. *The six major puzzles in international macroeconomics: is there a common cause?*. NBER Macroeconomics Annual 2000 Citado na página 16.
- [9] Kan R., Zhou G. *Tests of Mean-Variance Spanning* Annals of Economics and Finance (2012) Citado 4 vezes nas páginas 18, 38, 39 e 40.
- [10] Huberman G., Kandel S. *Mean-Variance Spanning* The Journal of Finance (1987) Citado na página 18.
- [11] Baxter M., Jermann U. *The International Diversification Puzzle is worst than you think*. The American Economic Review 1997 Citado 2 vezes nas páginas 26 e 29.
- [12] Heathcote J., Perri F. *The International Diversification Puzzle Is Not As Bad As You Think*. Journal of Political Economy 2013 Citado na página 26.
- [13] Julliard C. *The International Diversification Puzzle Is Not Worse than You Think*. Working Paper, LSE 2002 Citado na página 26.

-
- [14] Coeurdacier N., Gourinchas P. *When bonds matter: home bias in goods and assets*. Journal of Monetary Economics 2016 Citado 11 vezes nas páginas [27](#), [28](#), [29](#), [30](#), [31](#), [43](#), [44](#), [45](#), [46](#), [54](#) e [57](#).
- [15] Cambell J., Shiller R. *The Dividend-Price Ratio and Expectations of Future Dividends and Discount Factors*. The Review of Financial Studies 1988 Citado na página [44](#).
- [16] Seber, G. A. F. *Multivariate Observations*. J. Wiley & Sons, New York 1984 Citado na página [39](#).

Apêndices

APÊNDICE A – Descrição dos dados utilizados para o cálculo do *EHB*

- A capitalização do mercado mundial foi obtida no Guia Estatístico Anual da *World Federation of Exchanges* (WFE). O guia está disponível no *website* da WFE apenas para o período de 2014 a 2017.
- Os investimentos agregados dos países no exterior foram obtidos na *Consumer Portfolio Investment Survey* (CPIS) do Fundo Monetário Internacional (FMI). A tabela específica utilizada foi *Geographic Breakdown of Total Portfolio Investment Assets: Equity and Investment Fund Shares*.

APÊNDICE B – Descrição das estatísticas de teste do *mean variance spanning test*

B.1 Estatística para o teste conjunto

Seguindo a segunda seção de Kan e Zhou (2012) [9], considere a regressão multivariada em notação matricial:

$$Y = XB + E \quad (\text{B.1})$$

Onde Y é uma matriz $T \times N$ em que cada linha tem um retorno R_{Nt} , X é uma matriz $T \times (K + 1)$ em que cada linha contém $[1 \ R_{Kt}]'$, $B = [\alpha \ \beta]'$ e E é uma matriz de erros $T \times N$ em que cada linha contém um elemento de erro ϵ'_t . Assume-se que $T \geq N + K + 1$ e que $X'X$ é inversível. Os estimadores de máxima verossimilhança B e Σ dentro do modelo sem restrições são dados por:

$$\begin{aligned} \hat{B} &\equiv [\alpha \ \beta]' = (X'X)^{-1}(X'Y) \\ \hat{\Sigma} &= \frac{1}{T}(Y - X\hat{B})'(Y - X\hat{B}) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Definimos H_0 matricialmente também:

$$\Theta = [\alpha \ \delta]' = 0_{2 \times N} \quad (\text{B.3})$$

Assim, $\Theta = AB + C$, onde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0_K' \\ 0 & -\mathbf{1}_K' \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 0_K' \\ \mathbf{1}_K' \end{bmatrix}$$

Dessa forma, o estimador de máxima verossimilhança de Θ é dado por $\hat{\Theta} \equiv [\hat{\alpha} \ \hat{\delta}]' = A\hat{B} + C$. Se definirmos $\tilde{\Sigma}$ o estimador de máxima verossimilhança do modelo restrito por B.3, definimos $U = \frac{\|\hat{\Sigma}\|}{\|\tilde{\Sigma}\|}$. O teste de razão de verossimilhança para verificar se o modelo restrito é equivalente ao não restrito é dado por:

$$LR = -T \ln(U) \sim \chi_{2N}^2 \quad (\text{B.4})$$

Em [9] os autores mostram uma forma de calcular a estatística de teste sem precisar estimar o modelo com restrição. Definimos a matriz \hat{G} :

$$\hat{G} = TA(X'X)^{-1}A' = \begin{bmatrix} 1 + \hat{\mu}_K' \hat{V}_{11}^{-1} \hat{\mu}_K & \hat{\mu}_K' \hat{V}_{11}^{-1} \mathbf{1}_K \\ \hat{\mu}_K' \hat{V}_{11}^{-1} \mathbf{1}_K & \mathbf{1}_K' \hat{V}_{11}^{-1} \mathbf{1}_K \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Onde $\mu_K = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_{Kt}$ e $V_{11} = R'_{Kt} R_{Kt}$. A partir de Seber (1984 p.410) [16], temos:

$$\tilde{\Sigma} - \hat{\Sigma} = \hat{\Theta}' \hat{G}^{-1} \hat{\Theta} \quad (\text{B.6})$$

Então, com B.5 e B.6 podemos encontrar U apenas usando a estimativa do modelo não restrito:

$$\frac{1}{U} = \frac{\|\tilde{\Sigma}\|}{\|\hat{\Sigma}\|} = \|\hat{\Sigma}^{-1} \tilde{\Sigma}\| = \|\hat{\Sigma}^{-1} (\hat{\Sigma} + \hat{\Theta}' \hat{G}^{-1} \hat{\Theta})\| = \|I_N + \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\Theta}' \hat{G}^{-1} \hat{\Theta}\| = \|I_2 + \hat{H} \hat{G}^{-1}\| \quad (\text{B.7})$$

Onde \hat{H} é definido por:

$$\hat{H} = \hat{\Theta} \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\Theta}' \quad (\text{B.8})$$

Sejam λ_1 e λ_2 os autovalores de $\hat{H} \hat{G}^{-1}$, onde $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0$, Kan e Zhou (2012) definem:

$$\frac{1}{U} = (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) \quad (\text{B.9})$$

Dessa forma, eles as estatísticas de teste são:

$$\begin{aligned} LR &= T \sum_{i=1}^2 \ln(1 + \lambda_i) \sim \chi_{2N}^2 \\ W &= T \sum_{i=1}^2 \lambda_i \sim \chi_{2N}^2 \\ LM &= T \sum_{i=1}^2 \frac{\lambda_i}{1 + \lambda_i} \sim \chi_{2N}^2 \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Onde LR é o teste de razão de verossimilhança, W é o teste de Wald e LM é o teste do multiplicador de Lagrange. Os autores ressaltam porém, que esses testes não são confiáveis para pequenas amostras.

B.2 Two step down mean-variance spanning test

Essa seção descreve o cálculo das estatísticas definidas em 2.4 e 2.5 usando a mesma notação de [9].

Sejam a , b , c e d as métricas relacionadas ao *benchmark estendido* de $N + K$ ativos:

$$\begin{aligned}\hat{a} &= \hat{\mu}'\hat{V}^{-1}\hat{\mu} \\ \hat{b} &= \hat{\mu}'\hat{V}^{-1}\mathbf{1}_{N+K} \\ \hat{c} &= \mathbf{1}'_{N+K}\hat{V}^{-1}\mathbf{1}_{N+K} \\ \hat{d} &= \hat{a}\hat{c} - \hat{b}^2\end{aligned}\tag{B.11}$$

Sejam a_1 , b_1 , c_1 e d_1 as métricas relacionadas ao *benchmark* de K ativos:

$$\begin{aligned}\hat{a}_1 &= \hat{\mu}_1'\hat{V}_{11}^{-1}\hat{\mu}_1 \\ \hat{b}_1 &= \hat{\mu}_1'\hat{V}_{11}^{-1}\mathbf{1}_K \\ \hat{c}_1 &= \mathbf{1}'_K\hat{V}_{11}^{-1}\mathbf{1}_K \\ \hat{d}_1 &= \hat{a}_1\hat{c}_1 - \hat{b}_1^2\end{aligned}\tag{B.12}$$

Com base em B.11 e B.12, podemos reescrever as estatísticas de teste 2.4 e 2.5 da seguinte forma:

$$\begin{aligned}F_1 &= \frac{T - K - N}{N} \left(\frac{\|\bar{\Sigma}\|}{\|\hat{\Sigma}\|} - 1 \right) = \frac{T - K - N}{N} \left(\frac{\hat{a} - \hat{a}_1}{1 + \hat{a}_1} \right) \sim F_{N, T-K-N} \\ F_2 &= \frac{T - K - N + 1}{N} \left(\frac{\|\tilde{\Sigma}\|}{\|\bar{\Sigma}\|} - 1 \right) = \left[\left(\frac{\hat{c} + \hat{d}}{\hat{c}_1 + \hat{d}_1} \right) \left(\frac{1 + \hat{a}_1}{1 + \hat{a}} \right) - 1 \right] \sim F_{N, T-K-N+1}\end{aligned}\tag{B.13}$$

Essa foi a expressão utilizada para criar a função de cálculo da estatística de teste.

APÊNDICE C – Descrição dos dados utilizados para construção da fronteira eficiente

Obtivemos 1186 retornos semanais entre jan/1996-ago/2018 para 97 ações do mercado de ações brasileiro na plataforma Bloomberg. Esses 97 ativos representavam, ao final de agosto, 2.9bi BRL (cerca de 88% do market cap da bolsa brasileira). Dentro desses ativos, escolhemos os que faziam parte do estudo a partir dos seguintes critérios:

- Estão na carteira atual do mercado.
- São negociados desde jan/1996.
- Para evitar problemas relacionados com a falta de liquidez, escolhemos ativos com um volume diário médio negociado maior que 2m BRL nos últimos seis meses.

A partir desses critérios finalizamos a seleção com 31 ativos domésticos, que representam aproximadamente 70% do mercado de hoje. Chegamos a fazer teste incluindo ativos sem histórico longo, porém isso causa distorções no portfolio de mínima variância. Para evitar essas distorções, decidimos nos limitar ao universo de ativos negociados durante todo o período. A lista completa de ativos que fazem parte da análise está disponível sob demanda.

C.1 Grupos considerados como benchmark estendido: ativos correlacionados

Como comentamos na seção 2.2, foram realizados testes com os seis subconjuntos temporais. Em cada um desses subconjuntos analisamos a estrutura de correlação dos dados e escolhemos as oito ações de maior correlação com o índice S&P. A tabela 8 indica quais ativos estavam na seleção do *benchmark estendido* e a correlação média de cada subconjunto.

C.2 Grupos considerados como benchmark estendido: exportadoras

Para definir quais empresas são exportadoras, extraímos da plataforma Bloomberg os seguintes dados: % de receita via exportação e % de receitas de fontes estrangeiras.

1996-2018	2008-2018	1996-2007	2011-2018	2004-2011	1996-2004
ITUB4 BS Equity	ITUB4 BS Equity	ABEV3 BS Equity	ITUB4 BS Equity	ITUB4 BS Equity	ABEV3 BS Equity
PETR4 BS Equity	VALE3 BS Equity	ITUB4 BS Equity	VALE3 BS Equity	PETR4 BS Equity	ITUB4 BS Equity
BBDC4 BS Equity	BBDC4 BS Equity	PETR4 BS Equity	BBDC4 BS Equity	BBDC4 BS Equity	PETR4 BS Equity
ITSA4 BS Equity	BBAS3 BS Equity	BBDC4 BS Equity	ITSA4 BS Equity	ITSA4 BS Equity	BBDC4 BS Equity
GGBR4 BS Equity	ITSA4 BS Equity	ITSA4 BS Equity	BRKM5 BS Equity	GGBR4 BS Equity	ITSA4 BS Equity
CSNA3 BS Equity	GGBR4 BS Equity	VIVT4 BS Equity	GGBR4 BS Equity	CSNA3 BS Equity	TIMP3 BS Equity
GOAU4 BS Equity	GOAU4 BS Equity	GGBR4 BS Equity	PCAR4 BS Equity	GOAU4 BS Equity	GGBR4 BS Equity
FIBR3 BS Equity	FIBR3 BS Equity	ELET3 BS Equity	CSNA3 BS Equity	FIBR3 BS Equity	ELET3 BS Equity
42.2%	52.3%	34.6%	39.2%	62.7%	32.6%

Tabela 8 – Selecionamos para todos os subconjuntos os oito ativos mais correlacionados com o S&P. Na última linha está especificada a correlação média.

Ativo	% Receita via exportação	% Receitas de fontes estrangeiras
VALE3 BS Equity	2,6%	89,8%
FIBR3 BS Equity	90,5%	90,5%
GGBR4 BS Equity	63,6%	63,6%
BRFS3 BS Equity	0,0%	52,9%
EMBR3 BS Equity	87,5%	87,5%
GOAU4 BS Equity	0,0%	63,6%

Tabela 9 – Definimos como empresa exportadora as empresas com % de receita via exportação maior que 50% ou % de receitas de fontes estrangeiras maior que 50%.

Chegamos a encontrar histórico da primeira variável apenas para algumas ações e a segunda variável está indisponível. Por isso, decidimos manter o mesmo portfólio de exportadoras para todos os subconjuntos temporais. A tabela 9 mostra quais ativos são considerados exportadores em nossa análise.

APÊNDICE D – Cálculo das razões de hedge

D.1 Retornos da riqueza financeira: mercado de equities e bonds:

Os retornos dos índices Ibovespa (proxy 1) e SP500 foram obtidos da Bloomberg. Utilizamos também a composição do portfolio ótimo encontrado em 2.2 como proxy 2 de retorno financeiro a fim de verificar se ela poderia minimizar o *home bias*.

Couerdacier e Gourinchas (2016) [14] divergem dessa definição pois consideram que o retorno financeiro das empresas tem uma componente no mercado de ações e outra no mercado de débito corporativo. Porém, pontuam que os resultados obtidos considerando-se somente os índices dos mercados de ações são equivalentes. Optamos por usar a abordagem mais simplificada em nosso estudo porque o mercado de débito corporativo no Brasil não é tão transparente e líquido quanto o mercado dos países G7. Os retornos relativos reais serão calculados da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 R_t^f &= R_t^{Ibov} - R_t^{SPX} = \left(\ln \frac{Ibov_t}{Ibov_{t-1}} - i_t^{CDI} \right) - \left(\ln \frac{SPX_t}{SPX_{t-1}} - i_t^{Fed} \right) \\
 R_t^f &= R_t^{OpPort} - R_t^{SPX} = \left(\ln \frac{OpPort_t}{OpPort_{t-1}} - i_t^{CDI} \right) - \left(\ln \frac{SPX_t}{SPX_{t-1}} - i_t^{Fed} \right) \quad (D.1)
 \end{aligned}$$

Onde R_t^{OpPort} é o retorno gerado pela portfolio ótimo no momento t .

Para os retornos dos bonds nominais, utilizamos como proxy as taxas dos futuros de DI 3M e da Libor US 3M. Calculamos o retorno de uma posição comprada *rolling* em um bond sem cupons que paga a taxa pré determinada por esses futuros. No caso do Brasil, ajustamos as taxas de juros do período entre 1998 e 1999 para não mostrar as alterações provocadas pela mudança de regime cambial no final de 1997. A quebra de estrutura ocorrida nessa época tornou nossas estimativas das razões de hedge inconsistentes.

D.2 Taxa Real de câmbio:

A taxa de câmbio real é definida como o preço estrangeiro para um bem doméstico, de forma que um aumento representa uma apreciação:

$$Q = \frac{P_H}{P_F} \quad \text{log-linearizando:} \quad \hat{Q}_t = \hat{P}_{H,t} - \hat{P}_{F,t} \quad (\text{D.2})$$

Onde P_F já está denominado na moeda doméstica. Para Brasil usaremos o índice IPCA trimestral divulgado pelo Instituto de Pesquisas Econômicas Aplicadas (Ipea) e no caso dos Estados Unidos usaremos o CPI obtido na base de dados de indicadores econômicos da Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE).

D.3 Retornos da riqueza não financeira

Assumindo que a razão dividendo/preço da riqueza não financeira seja estacionária (Campbell e Shiller (1988) [15]), Couerdacier e Gourinchas (2016) chegam na expressão teórica que o retorno da riqueza não financeira deveria seguir:

$$r_{t+1}^n - E_t r_{t+1}^n = (E_{t+1} - E_t) \sum_{s=0}^{\infty} \rho^s \Delta w_{t+1+s} - (E_{t+1} - E_t) \sum_{s=0}^{\infty} \rho^s r_{t+1+s}^n \quad (\text{D.3})$$

Dessa forma o log-retorno esperado da riqueza não financeira depende positivamente do crescimento da renda e negativamente da revisão das expectativas dos retornos futuros, ambos descontados pelo fator de desconto estocástico ρ . Do ponto de vista empírico, os autores estimam um vetor autoregressivo (VAR) em primeiras diferenças da forma:

$$Z_{t+1} = \mathbf{A}Z_t + \epsilon_{t+1} \quad (\text{D.4})$$

Onde $Z_t = (\tilde{r}_t, \Delta w_t, \Delta k_t, \Delta \ln Q)$. Cada um dos parâmetros desse VAR é definido a seguir:

1. \tilde{r}_t é a aproximação para os retornos esperados da riqueza não financeira. Em [14] eles assumem que a expectativa de retorno não financeiro é igual à de retorno financeiro.
2. Δw_t é o retorno do log da renda do trabalho (que será definida a seguir).
3. Δk_t é o retorno do log da renda do capital (que será definida a seguir).
4. $\Delta \ln Q$ é o retorno logarítmico da taxa de câmbio real, como já especificada na seção D.2.

Para construir esse VAR precisaremos definir w_t e k_t . A definição mais direta de w_t seria considerá-lo como a massa salarial agregada ($COMP$). Porém, os autores divergem dessa definição argumentando que também há uma parcela de rendimento misto (renda dos autônomos) que é contabilizada como capital mas na realidade é renda. Para conseguir efetuar essa separação, os autores de [14] partem da definição do produto:

$$Y = COMP + M + \Pi + T \quad (D.5)$$

Onde M é a renda dos autônomos (tanto referente ao trabalho quanto aos lucros), Π é o excedente operacional bruto e T são os impostos. Em [14] os autores usam o excedente operacional líquido e adicionam a depreciação. Como para Brasil apenas o dado de excedente operacional bruto estava disponível, precisamos efetuar essa pequena mudança e utilizar apenas o dado bruto.

No modelo, o produto pode ser dividido entre a riqueza não financeira (W), a riqueza do capital (K) e os impostos (T). A riqueza do trabalho é obtida somando-se a massa salarial e a parcela de renda do trabalho dos autônomos (aqui representada por $0 < \nu < 1$). Dessa forma, K e W são dados por:

$$K = \Pi + (1 - \nu)M - I \quad \text{e} \quad W = COMP + \nu M \quad (D.6)$$

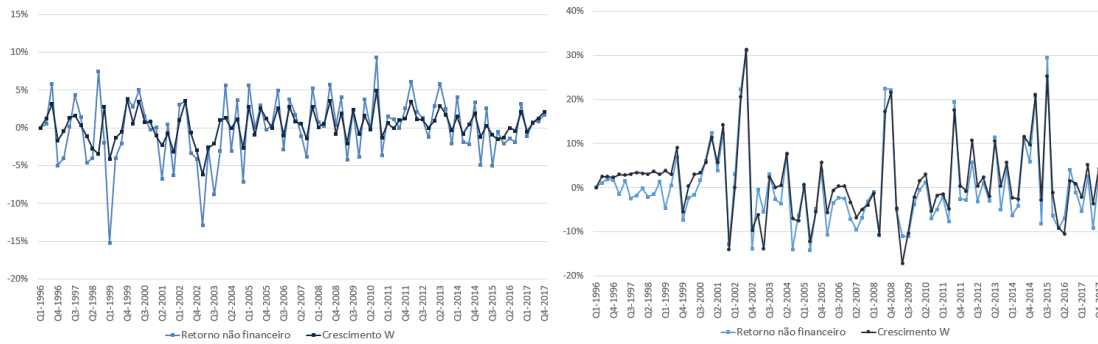
Onde I é a formação bruta de capital fixo excluindo o investimento residencial. A razão ν é a parcela de renda do trabalho no total da renda:

$$\nu = \frac{COMP}{COMP + \Pi} \quad (D.7)$$

O apêndice D.4 descreve detalhadamente as fontes de dados utilizadas e as transformações feitas para construir os valores de W e K especificados acima. A partir desses dados, construímos D.4 e obtivemos a matriz \mathbf{A} e os resíduos ϵ_{t+1} . Com isso podemos calcular os retornos não financeiros a partir de [14]:

$$r_{t+1}^n - E_t r_{t+1}^n = \left(\vec{e}'_{\Delta w} - \rho \vec{e}'_{\Delta \bar{r}} \vec{A} \right) (\mathbb{I} - \rho \vec{A})^{-1} \epsilon_{t+1} \quad (D.8)$$

Onde \vec{e}'_y é um vetor que seleciona a variável a variável y em Z . A partir dessa especificação, usando $\rho = 0.98$, calculamos o retornos não financeiros. A figura 1 ilustra a diferença entre o crescimento da renda com a nossa estimativa de retorno não financeiro para Brasil (proxy 1) e Estados Unidos.



(a) r^n vs Δw para Brasil.

(b) r^n vs Δw para Estados Unidos.

Figura 1 – Os retornos não financeiros são mais voláteis que o crescimento da renda, em concordância com o encontrado em Couerdacier e Gourinchas (2016) [14]. Encontramos alta correlação entre as duas séries, aproximadamente 80% para Brasil e 90% para Estados Unidos.

D.4 Dados utilizados nas estimativas das razões de hedge:

Neste apêndice vamos detalhar os dados utilizados para calcular os retornos financeiro (r^f) e não financeiro (r^n), bem como a parcela de renda financeira δ descritas na seção 3. O período analisado foi 1996-01 a 2018-01.

- Taxa nominal de câmbio: obtida na plataforma Bloomberg.
- Índice de preços: para o Brasil utilizamos o IPCA obtido no *website* do Ipea e para Estados Unidos usamos o índice de preços obtidos na base de dados da OCDE.
- PIB: dados de Brasil obtidos das Contas Nacionais Trimestrais do IBGE e dados dos Estados Unidos foram obtidos na base de dados das Contas Nacionais Trimestrais da OCDE.
- Formação Bruta de Capital Fixo (FBCF): dados de Brasil obtidos das Contas Nacionais Trimestrais do IBGE e dados dos Estados Unidos foram obtidos na base de dados das Contas Nacionais Trimestrais da OCDE.
- Massa salarial do Brasil:
 - Período de 2012-01 a 2018-01: obtida na Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua do IBGE (Pnad). Dados trazidos ao valor de milhões de reais de 1995. Série obtida no *website* do Instituto de Pesquisas Econômicas Aplicadas (Ipea) indentificada pelo nome **Massa de rendimento real de todos os trabalhos**.
 - Período 2002-01 a 2011-04: utilizamos como proxy as variações da série de rendimento médio das regiões metropolitanas obtido na Pesquisa Mensal do Emprego

(PME) do IBGE. Série encontrada no *website* do Ipea identificada pelo nome **Rendimento médio real habitual**.

- Período 1996-01 a 2001-04: utilizamos como proxy o índice de massa de salários do trabalho principal calculado pelo IBGE usando a metodologia antiga da PME. Encontrado no *website* do Ipea, identificado como **Massa de rendimentos do trabalho principal - índice**. A série foi dessazonalizada no Eviews usando-se o método *Census X12*.
- Massa salarial dos Estados Unidos: dados obtidos nas Contas Nacionais Trimestrais da OCDE.
- Investimento residencial Brasil: utilizamos a Pesquisa de Orçamentos Familiares (POF) do IBGE (2008) para encontrar a parcela do investimento das famílias em residências dentro da Formação Bruta de Capital Fixo (FBCF). Para 2008 encontramos que essa fração era 15.4% no ano em que a pesquisa foi feita. Estendemos essa parcela para o período entre 2003-01 e 2018-01 a partir do **Índice volume Material de construção** divulgado na Pesquisa Mensal do Comércio (PMC) do IBGE. Como não encontramos dados para estender essa série até 1996-01, vamos manter a parcela estática em 18.2%, que é a razão para 2003-01.
- Investimento residencial Estados Unidos: disponível nas Contas Nacionais Anuais da OCDE entre 1996 e 2016 (é o dado *dwellings*, definido como construções residenciais). Utilizamos a razão anual para os dados trimestrais de cada ano. Como o ano de 2017 ainda não está disponível, usamos a razão de 2016 também para esse ano.
- Excedente operacional bruto - inclusive autônomos para Brasil: a série disponível no *website* do Ipea é **Excedente operacional bruto - inclusive autônomos** para o período de 1996-2015 (série anual). Como essa série tem uma correlação alta com a série de lucros brutos das empresas listadas do país, optamos por estendê-la e trimestralizá-la até 2017 com base nesse dado.
- Lucros Brutos das empresas brasileiras listadas: dados trimestrais de 1998-01 a 2018-01 obtidos na plataforma Bloomberg (campo GROSS_PROFIT).
- Excedente operacional bruto - inclusive autônomos para Estados Unidos: dados obtidos nas Contas Nacionais Trimestrais da OCDE.
- Rendimento misto (M): fração do excedente operacional bruto e rendimento misto. A razão foi obtida utilizando o dado de rendimento misto e excedente operacional brutos nas contas nacionais anuais no *website* das Organização das Nações Unidas (ONU). Para os dados de Estados Unidos, os anos de 1996-1998 e 2016-2017 não estavam disponíveis, então utilizamos a razão média dos três anos adjacentes. Já

para Brasil, não estão disponíveis os anos 2015-2017, então utilizamos a razão média dos três anos anteriores.

APÊNDICE E – Derivação do Modelo *equities-only*

Com base no trabalho de Couerdacier e Rey (2013) [4], definimos um modelo com dois países simétricos (H e F) e um agente representativo em cada um. Os dois países produzem apenas um bem utilizando capital (fixo) e trabalho. As preferências dos agentes dos dois países são dadas por:

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\frac{C_{i,t}^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{l_{i,t}^{1+\omega}}{1+\omega} \right) \quad (\text{E.1})$$

Onde $i = H, F$ representam a função utilidade do agente representativo de cada um dos dois países, $\sigma > 0$ é a aversão ao risco e $\omega > 0$ é a elasticidade de Frish. O agregado de consumo é dado por:

$$C_{i,t} = \left[a^{1/\phi} (c_{i,t}^i)^{\frac{\phi-1}{\phi}} + (1-a)^{1/\phi} (c_{j,t}^i)^{\frac{\phi-1}{\phi}} \right]^{\frac{\phi}{\phi-1}}, \text{ com } i \neq j$$

Onde $c_{i,t}^i$ é o consumo do bem produzido domesticamente e $c_{j,t}^i$ é o consumo do bem produzido no exterior pelo país i . A variável $1/2 < a < 1$ representa o *home bias* no consumo.

A firma representativa dos países produzem bens utilizando trabalho e capital, seguindo uma função de produção Cobb-Douglas:

$$y_{i,t} = \theta_i (k_0)^\delta (l_{i,t})^{1-\delta} \quad (\text{E.3})$$

Onde $0 < \delta < 1$, k_0 é o estoque de capital inicial do país (se mantém fixo no presente modelo) e $\theta_{i,t}$ é o fator total de produtividade (variável exógena nesse contexto). Uma parcela $1 - \delta$ é paga aos trabalhadores $w_{i,t} l_{i,t} = (1 - \delta) p_{i,t} y_{i,t}$ e outra parcela δ é paga aos investidores via dividendos $d_{i,t} = \delta p_{i,t} y_{i,t}$. Os mercados financeiros não tem fricções e temos negociação internacional de ações. Cada agente começa apenas com ações domésticas, mas muda seu portfolio nas condições de equilíbrio. A restrição orçamentária é dada por:

$$P_{i,t} C_{i,t} + p_{i,t}^S S_{i,t+1}^i + p_{j,t}^S S_{j,t+1}^i = w_{i,t} l_{i,t} + (d_{i,t} + p_{i,t}^S) S_{i,t}^i + (d_{j,t} + p_{j,t}^S) S_{j,t}^i \quad (\text{E.4})$$

Onde $p_{i,t}^S$ é o preço da ação i no momento t . Maximizando E.1 sujeito a E.4, temos o lagrangeano:

$$L = \left(\frac{C_{i,t}^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{l_{i,t}^{1+\omega}}{1+\omega} \right) - \lambda_t \left(w_{i,t} l_{i,t} + (d_{i,t} + p_{i,t}^S) S_{i,t}^i + (d_{j,t} + p_{j,t}^S) S_{j,t}^i - P_{i,t} C_{i,t} + p_{i,t}^S S_{i,t+1}^i + p_{j,t}^S S_{j,t+1}^i \right) \quad (\text{E.5})$$

As condições de primeira ordem do consumo são dadas por:

$$\begin{aligned} U'(C_{i,t}^i) &= \lambda_t p_{i,t} && \text{consumo do bem doméstico no país } i \\ U'(C_{j,t}^i) &= \lambda_t p_{j,t} && \text{consumo do bem estrangeiro no país } i \\ U'(C_{i,t}) &= \lambda_t P_{i,t} && \text{consumo agregado no país } i \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

A partir das condições de primeira ordem do consumo, chegamos às funções de demanda:

$$\begin{aligned} \frac{U'(C_{i,t}^i)}{U'(C_{i,t})} &= \frac{\lambda_t p_{i,t}}{\lambda_t P_{i,t}} \\ \frac{U'(C_{i,t}) \frac{\partial c_{i,t}^i}{\partial C_{i,t}}}{U'(C_{i,t})} &= \frac{p_{i,t}}{P_{i,t}} \\ \text{Onde: } \frac{\partial c_{i,t}^i}{\partial C_{i,t}} &= a^{1/\phi} (c_{i,t}^i)^{-1/\phi} C_{i,t}^{(1/\phi)} \\ \text{Assim, temos: } c_{i,t}^i &= a \left(\frac{p_{i,t}}{P_{i,t}} \right)^{-\phi} C_{i,t} \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

Analogamente, a demanda pelo bem $c_{j,t}^i$ é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{U'(C_{j,t}^i)}{U'(C_{i,t})} &= \frac{\lambda_t p_{j,t}}{\lambda_t P_{i,t}} \\ \frac{U'(C_{i,t}) \frac{\partial c_{j,t}^i}{\partial C_{i,t}}}{U'(C_{i,t})} &= \frac{p_{j,t}}{P_{i,t}} \\ \text{Onde: } \frac{\partial c_{j,t}^i}{\partial C_{i,t}} &= (1-a)^{1/\phi} (c_{j,t}^i)^{-1/\phi} C_{i,t}^{(1/\phi)} \\ \text{Assim, temos: } c_{j,t}^i &= (1-a) \left(\frac{p_{j,t}}{P_{i,t}} \right)^{-\phi} C_{i,t} \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

As condições de primeira ordem intertemporal para as ações são dadas por:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial S_{j,t+1}^i} &= \lambda_{t+1}(d_{j,t+1} + p_{j,t+1}^S) - \lambda_t p_{j,t}^S = 0 \\
 E_0 \lambda_{t+1}(d_{j,t+1} + p_{j,t+1}^S) &= \lambda_t p_{j,t}^S \\
 E_0 \frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} &= E_0 \frac{p_{j,t}^S}{(d_{j,t+1} + p_{j,t+1}^S)}
 \end{aligned} \tag{E.9}$$

As condições de primeira ordem intertemporal para o consumo são dadas por:

$$\begin{aligned}
 \beta^t U'(C_{i,t}) &= \lambda_t P_{i,t} \\
 E_0 \beta^{t+1} U'(C_{i,t+1}) &= E_0 \lambda_{t+1} P_{i,t+1} \\
 E_0 \beta \frac{C_{i,t+1}^{-\sigma}}{C_{i,t}^{-\sigma}} &= E_0 \frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} \frac{P_{i,t+1}}{P_{i,t}} \\
 E_0 \frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} &= E_0 \beta \left(\frac{C_{i,t+1}}{C_{i,t}} \right)^{-\sigma} \frac{P_{i,t}}{P_{i,t+1}}
 \end{aligned} \tag{E.10}$$

Substituindo E.10 em E.9, temos a equação de euler para a alocação de ações no país i :

$$1 = E_0 \left[\beta \left(\frac{C_{i,t+1}}{C_{i,t}} \right)^{-\sigma} \frac{P_{i,t}}{P_{i,t+1}} \frac{(d_{j,t+1} + p_{j,t+1}^S)}{p_{j,t}^S} \right] \quad \text{para } j = H, F \tag{E.11}$$

Usando E.7, podemos calcular o índice agregado de preços do país i :

$$\begin{aligned}
 p_{i,t} c_{i,t}^i + p_{j,t} c_{j,t}^i &= P_{i,t} C_{i,t} \\
 P_{i,t} &= \frac{1}{C_{i,t}} (p_{i,t} c_{i,t}^i + p_{j,t} c_{j,t}^i) \\
 P_{i,t} &= \frac{1}{C_{i,t}} \left(p_{i,t} a \left(\frac{p_{i,t}}{P_{i,t}} \right)^{-\phi} C_{i,t} + p_{j,t} (1-a) \left(\frac{p_{j,t}}{P_{i,t}} \right)^{-\phi} C_{i,t} \right) \\
 P_{i,t} &= \left[a(p_{i,t})^{1-\phi} + (1-a)(p_{j,t})^{1-\phi} \right]^{\frac{1}{1-\phi}}, \quad \text{com } i \neq j
 \end{aligned} \tag{E.12}$$

As condições de *clearing* dos mercados de bens e financeiros são dadas por:

$$\begin{aligned}
 c_{H,t}^H + c_{H,t}^F &= y_{H,t} \quad , \quad c_{F,t}^F + c_{F,t}^H = y_{F,t} \\
 S_{H,t}^H + S_{H,t}^F &= S_{F,t}^F + S_{F,t}^H = 1
 \end{aligned} \tag{E.13}$$

A partir disso, os autores de [4] derivam o portfolio que replica a alocação eficiente na aproximação de primeira ordem das equações. Da definição já conhecida de taxa real de câmbio $REER_t = \frac{P_{H,t}}{P_{F,t}}$, log-linearizamos essa expressão e encontramos:

$$\begin{aligned}
 RER_t &= \frac{P_{H,t}}{P_{F,t}} = \frac{[a(p_{H,t})^{1-\phi} + (1-a)(p_{F,t})^{1-\phi}]^{\frac{1}{1-\phi}}}{[a(p_{F,t})^{1-\phi} + (1-a)(p_{H,t})^{1-\phi}]^{\frac{1}{1-\phi}}} \\
 R\hat{E}R_t &= \hat{P}_{H,t} - \hat{P}_{F,t} = (2a-1)\frac{p_{H,t}}{p_{F,t}} = (2a-1)\hat{q}_t
 \end{aligned} \tag{E.14}$$

Onde q_t são os termos de trade entre os dois países. Devido ao *home bias* no consumo, uma melhora nos termos de trade gera apreciação da taxa de câmbio. Com o mercado em equilíbrio, a razão entre as utilidades marginais do consumo agregado no país H e F são proporcionais à taxa de câmbio, é o que os autores chamam de condição de *risk sharing*:

$$\begin{aligned}
 U'(C_{H,t}) &= \lambda_t P_{H,t} \\
 U'(C_{F,t}) &= \lambda_t P_{F,t} \\
 \frac{C_{H,t}^{-\sigma}}{P_{H,t}} &= \frac{C_{F,t}^{-\sigma}}{P_{F,t}} \\
 \left(\frac{C_{H,t}}{C_{F,t}}\right)^{-\sigma} &= \frac{P_{H,t}}{P_{F,t}} = RER_t
 \end{aligned} \tag{E.15}$$

Log-linearizando E.15, temos:

$$-\sigma(\hat{C}_{H,t} - \hat{C}_{F,t}) = (2a-1)\hat{q}_t \tag{E.16}$$

Como partimos do pressuposto de que os dois países são simétricos, a simetria nos permite dizer que existe um portfólio ótimo $S = S_H^H = S_F^F = 1 - S_H^F = 1 - S_F^H$. Ou seja, o nível de alocação no país doméstico (tanto do ponto de vista do país H quanto do ponto de vista de F) é S . A partir disso, existe um único portfólio ótimo S consistente com a condição determinada em E.16 e ele satisfaz a restrição orçamentária "estática".

$$P_{i,t}C_{i,t} = w_{i,t}l_{i,t} + Sd_{i,t} + (1-S)d_{j,t} \quad \text{Onde: } i = H, F \tag{E.17}$$

Subtraindo-se E.17 de H e F , temos:

$$\begin{aligned}
 P_{H,t}C_{H,t} - P_{F,t}C_{F,t} &= (w_{H,t}l_{H,t} - w_{F,t}l_{F,t}) + S(d_{H,t} - d_{F,t}) + (1-S)(d_{H,t} - d_{F,t}) \\
 \text{Log-linearizando: } P_{H,t}\hat{C}_{H,t} - P_{F,t}\hat{C}_{F,t} &= (1-\delta)(w_{H,t}\hat{l}_{H,t} - w_{F,t}\hat{l}_{F,t}) + (2S-1)\delta(\hat{d}_{H,t} - \hat{d}_{F,t})
 \end{aligned} \tag{E.18}$$

Do problema da firma sabemos que a parcela de riqueza que é direcionada ao trabalho em estado estacionário é $1 - \delta$. Da condição de *risk sharing* explicitada em E.15, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \left(\frac{C_{H,t}}{C_{F,t}}\right)^{-\sigma} \left(\frac{P_{H,t}}{P_{F,t}}\right)^{-\sigma} \left(\frac{P_{H,t}}{P_{F,t}}\right)^{\sigma} &= \frac{P_{H,t}}{P_{F,t}} \\ \left(\frac{C_{H,t}P_{H,t}}{C_{F,t}P_{F,t}}\right)^{-\sigma} &= \left(\frac{P_{H,t}}{P_{F,t}}\right)^{1-\sigma} \end{aligned}$$

Log-linearizando a expressão acima:

$$\begin{aligned} -\sigma(C_{H,t}\hat{P}_{H,t} - C_{F,t}\hat{P}_{F,t}) &= (1 - \sigma)(\hat{P}_{H,t} - \hat{P}_{F,t}) \\ (C_{H,t}\hat{P}_{H,t} - C_{F,t}\hat{P}_{F,t}) &= \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right) (2a - 1)\hat{q}_t \end{aligned} \quad (\text{E.19})$$

Usando E.19 e definindo a renda do trabalho relativa entre os dois países $w_{H,t}\hat{l}_{H,t} - w_{F,t}\hat{l}_{F,t} = \hat{w}_t\hat{l}_t$ e os dividendos relativos $\hat{d}_{H,t} - \hat{d}_{F,t} = \hat{d}_t$, a expressão E.18 obtem-se o portfolio aproximado em primeira ordem:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right) R\hat{E}R_t &= (1 - \delta)(\hat{w}_t\hat{l}_t) + (2S - 1)\delta(\hat{d}_t) \\ S &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1 + 1/\sigma}{\delta} \frac{R\hat{E}R_t}{\hat{d}_t} - \frac{1 - \delta}{\delta} \frac{\hat{w}_t\hat{l}_t}{\hat{d}_t}\right) \end{aligned} \quad (\text{E.20})$$

Fazendo a covariância com os dividendos temos a seguinte expressão:

$$S = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1 - \delta}{\delta} \frac{\text{cov}(\hat{w}_t\hat{l}_t, \hat{d}_t)}{\text{var}(\hat{d}_t)} + \frac{1}{2} \frac{1 - 1/\sigma}{\delta} \frac{\text{cov}(R\hat{E}R_t, \hat{d}_t)}{\text{var}(\hat{d}_t)} \quad (\text{E.21})$$

Onde $R\hat{E}R_t$ é a taxa de câmbio real entre os dois países, $\hat{w}_t\hat{l}_t = \hat{r}^n$ é o que chamamos de retorno não financeiro relativo e $\hat{d}_t = \hat{r}_t^f$ é o retorno financeiro relativo.

O termo $1/2$ de E.21 representa o portfolio quando não há motivo algum de hedge no modelo sem fricções e de preferências homogêneas. Nesse caso, o agente investiria metade de sua riqueza em cada país para ter diversificação máxima.

O termo $\frac{1-\delta}{\delta} \frac{\text{cov}(\hat{w}_t\hat{l}_t, \hat{d}_t)}{\text{var}(\hat{d}_t)}$ representa o efeito de hedge de renda não negociável. Em nossa análise consideramos $\delta \approx 1 - \frac{COMP}{Y-T} = 0.4$, ou seja, esse termo tem um peso bastante alto. Se as ações domésticas pagam mais que as ações estrangeiras quando a renda doméstica é menor (relativamente ao país estrangeiro), então os agentes terão um viés para investir no mercado doméstico.

Já o termo $\frac{1-1/\sigma}{\delta} \frac{\text{cov}(R\hat{E}R_t, \hat{d}_t)}{\text{var}(\hat{d}_t)}$ representa o efeito do hedge de taxa de câmbio no *home bias*. Esse efeito pode ser diferente dependendo se a aversão ao risco é maior ou menor do que 1. Em nossa análise consideramos $\sigma = 2$, como comumente utilizado na literatura.

APÊNDICE F – Derivação do Modelo

equities+bonds

Nesta seção faremos a mesma abordagem simplificada do apêndice A1 de Couerda-
cier e Rey (2016) [14]. Considere um modelo de dois períodos ($t = 0, 1$) com dois países
simétricos (H e F). Os agentes dos dois países tem preferências dadas por:

$$U_i = \frac{C_{i,0}^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \beta \frac{C_{i,1}^{1-\sigma}}{1-\sigma} \quad (\text{F.1})$$

Onde $i = H, F$ são os países doméstico e estrangeiro, respectivamente. Omitimos a
desutilidade do trabalho porque ela não será importante na definição do portfolio ótimo. A
decisão das firmas é semelhante à do modelo apenas com equities, definida em E.3, sendo
que a participação da renda do trabalho na renda total (ou da renda não financeira) é
 $1 - \delta$. Os agentes de ambos países tem acesso aos mercados financeiros internacionais e a
negociação de ativos acontece no instante $t = 0$. No instante seguinte os agentes gastam
completamente a renda obtida via trabalho w_i (ou ativos financeiros (retornos de ações
 d_i^f ou de bonds d_i^b). A restrição orçamentária nos dois períodos é dada por:

$$\begin{aligned} \text{Em } t = 0: \quad P_{i,0}C_{i,0} + \sum_j (p_S^j S_{ij,1} + p_B^j B_{ij,1}) &= w_{i,0}l_{i,0} + \sum_j (S_{ij,1}(p_S^j + d_{j,0}^f) + B_{ij,1}d_{j,0}^b) \\ \text{Em } t = 1: \quad P_{i,1}C_{i,1} &= \sum_j (S_{ij,1}d_j^f + B_{ij,1}d_j^b) \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

Onde $S_{ij,t}$ e $B_{ij,t}$ são as alocações de riqueza em bonds e equities de cada país i
nos ativos do país j , sendo que $i = H, F$ e $j = H, F$. Além disso, os mercados estão em
equilíbrio:

$$\begin{aligned} \text{Mercado de equities:} \quad S_{HH,t} + S_{HF,t} &= S_{FH,t} + S_{FF,t} = 1 \\ \text{Mercado de bonds:} \quad B_{HH,t} + B_{HF,t} &= B_{FH,t} + B_{FF,t} = 0 \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

O lagrangeano desse problema de otimização é dado por:

$$\begin{aligned}
 L = \frac{C_{i,0}^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \beta \frac{C_{i,1}^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \\
 \lambda_0 \left[w_{i,0} l_{i,0} + \sum_j (S_{ij,1} p_S^j + d_{j,0}^f) + B_{ij,0} d_{j,0}^b \right] - P_{i,0} C_{i,0} + \sum_j (p_S^j S_{ij,1} + p_B^j B_{ij,1}) \\
 - \lambda_1 \left[\sum_j (S_{ij,1} d_j^f + B_{ij,1} d_j^b) - P_{i,1} C_{i,1} \right] \quad (\text{F.4})
 \end{aligned}$$

Fazendo as condições de primeira ordem do consumo, temos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial C_{i,0}} &= C_{i,0}^{-\sigma} - \lambda_0 P_{i,0} = 0 \\
 \frac{\partial L}{\partial C_{i,1}} &= \beta C_{i,1}^{-\sigma} - \lambda_1 P_{i,0} = 0 \\
 M_i &= \frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \beta \left(\frac{C_{i,1}}{C_{i,0}} \right)^{-\sigma} \frac{P_{i,0}}{P_{i,1}} \quad (\text{F.5})
 \end{aligned}$$

Onde M_i é o fator estocástico de desconto de cada país i .

No próximo passo, subtraímos as restrições orçamentárias de H e F nos dois instantes e usando F.3, encontramos (para simplificar a notação, já consideramos as variáveis como $H - F$):

$$\begin{aligned}
 \text{Em } t = 0: \quad P_0 C_0 &= w_0 l_0 + \sum_j (2S_{Hj,0} - 1) d_{j,0}^f + 2 \sum_j (S_{Hj,0} - S_{Hj,1}) p_S^j \\
 &\quad - 2 \sum_j p_B^j B_{Hj,1} + 2 \sum_j B_{Hj,1} d_{j,1}^b = X_0 \\
 \text{Em } t = 1: \quad P_1 C_1 &= w_1 l_1 + \sum_j (2S_{Hj,1} - 1) d_{j,1}^f + 2 \sum_j B_{Hj,1} d_{j,1}^b = X_1 \quad (\text{F.6})
 \end{aligned}$$

Log-linearizando essas expressões e retirando os termos de segunda ordem, temos:

$$\begin{aligned}
 \text{Em } t = 0: \quad \hat{X}_0 &= \hat{w}_0 l_0 + (2S - 1) \delta \hat{d}_0^f \\
 &\quad + 2b p_B \hat{b} + 2b (\hat{d}_0^b - p_B \hat{p}_B) \\
 \text{Em } t = 1: \quad \hat{X}_1 &= \hat{w}_1 l_1 + (2S - 1) \hat{d}_1^f + 2b \hat{d}_1^b \quad (\text{F.7})
 \end{aligned}$$

Onde $b = B/X$, é a razão entre a alocação em bonds e o produto agregado, \hat{b} é o rebalanceamento do portfolio de bonds entre um instante e outro, S é a alocação ótima nos ativos domésticos, tanto pro país H quanto para o país F (dado que os países são

simétricos, essa alocação é a mesma). A partir de F.5, podemos calcular $\hat{X}_1 - \hat{X}_0$ a partir de $M_H - M_F$:

$$M_H - M_F = \beta \left[\frac{P_{H,0}}{P_{H,1}} \left(\frac{C_{H,1}}{C_{H,0}} \right)^{-\sigma} - \frac{P_{F,0}}{P_{F,1}} \left(\frac{C_{F,1}}{C_{F,0}} \right)^{-\sigma} \right]$$

Multiplicando os dois termos por $\left(\frac{P_{i,1}}{P_{i,0}} \right)^{-\sigma+\sigma}$, temos:

$$M_H - M_F = \beta \left[\left(\frac{P_{H,0}}{P_{H,1}} \right)^{1-\sigma} \left(\frac{C_{H,1}P_{H,1}}{C_{H,0}P_{H,0}} \right)^{-\sigma} - \left(\frac{P_{F,0}}{P_{F,1}} \right)^{1-\sigma} \left(\frac{C_{F,1}P_{F,1}}{C_{F,0}P_{F,0}} \right)^{-\sigma} \right] \quad (\text{F.8})$$

Log-linearizando F.8, temos

$$\begin{aligned} \hat{M}_H - \hat{M}_F &= (1 - \sigma)(\hat{P}_{H,0} - \hat{P}_{H,1}) - (1 - \sigma)(\hat{P}_{F,0} - \hat{P}_{F,1}) \\ &\quad - \sigma(C_{H,1}\hat{P}_{H,1} - C_{H,0}\hat{P}_{H,0}) + \sigma(C_{F,1}\hat{P}_{F,1} - C_{F,0}\hat{P}_{F,0}) \\ \hat{M} &= (1 - \sigma)(R\hat{E}R_0 - R\hat{E}R_1) - \sigma(\hat{X}_1 - \hat{X}_0) \\ \hat{X}_1 - \hat{X}_0 &= \Delta\hat{X} = -\frac{1}{\sigma}\hat{M} + \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right)\Delta R\hat{E}R \end{aligned} \quad (\text{F.9})$$

Logo, subtraindo $X_1 - X_0$ em F.6 e substituindo o resultado de F.9 temos:

$$-\frac{1}{\sigma}\hat{M} + \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right)\Delta R\hat{E}R = (1 - \delta)\Delta\hat{w}l + \delta(2S - 1)\delta\Delta\hat{d}^f + 2b(\Delta\hat{d}^b - p_B\hat{p}_B) - 2b\hat{b}p_B \quad (\text{F.10})$$

Considerando válida a premissa de mercados localmente completos, a condição de *risk-sharing* já demonstrada em E.19 é válida. Dessa forma, podemos reescrever F.10:

$$2bp_B(\hat{p}_B + \hat{b}) = (1 - \delta)\Delta\hat{w}l + \delta(2S - 1)\delta\Delta\hat{d}^f + 2b\Delta\hat{d}^b - \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right)\Delta R\hat{E}R \quad (\text{F.11})$$

O termo $2bp_B(\hat{p}_B + \hat{b})$ é a suavização intertemporal do portfolio de bonds, afetando apenas a expectativa. Em estado estacionario, esse termo pode ser considerado zero. Se consideramos ainda que a variação da renda é o retorno de renda não negociável ($\hat{w}l = \hat{R}^n$,

), *avariação dos dividendos é o retorno financeiro*(

$\Delta\hat{d}^f = \hat{r}^f$) e a variação dos dividendos dos bonds é o retorno dos bonds ($\Delta\hat{d}^b = \hat{r}^b$), temos:

$$\left(1 - \frac{1}{\sigma}\right)\Delta R\hat{E}R - (1 - \delta)\Delta\hat{r}^n = \delta(2S - 1)\delta\Delta\hat{r}^f + 2b\Delta\hat{r}^b \quad (\text{F.12})$$

Considerando os vetores com os retornos $\hat{r}^j = v^{j'}\hat{\epsilon}$ (onde $j = f, b, n$) e as inovações da taxa real de câmbio $\Delta RER - E_0 R\hat{E}R = v^{RER'}\hat{\epsilon}$, podemos reescrever F.12 matricialmente:

$$V \begin{pmatrix} \delta(2S - 1) \\ 2b \end{pmatrix} = (1 - 1/\sigma)v^{RER} - (1 - \delta)v^n \quad (\text{F.13})$$

Onde $V = (v^f, v^b)$ é a matriz de fatores condicionais para equities e bonds. Para F.13 ser válida duas condições precisam ser satisfeitas: a dimensão dos vetores $v^{j'}$ e $v^{RER'}$ é $k = 2$ (pois existem dois fatores de risco) e $\det V \neq 0$. Na seção 3.2 já mostramos as equações para os portfólios de equilíbrio que são encontradas a partir de F.13. Em 3.3 estão os portfólios de equilíbrio e em 3.4 a matriz V .

Couerdacier e Gourinchas (2016) [14] também provam esses resultados para múltiplos instantes de tempo e para países assimétricos, mas em nosso trabalho nos concentramos em derivar modelo inicial mais simples e utilizamos os resultados deles para a análise dos dados.