

**INSPER INSTITUTO DE ENSINO E PESQUISA**

**Programa de Mestrado Profissional em Economia**

**Erica Pui Lan Yam**

**APREÇAMENTO DA CONVEXIDADE DE ATIVOS  
INDEXADOS A PERCENTUAL DO CDI NOS MODELOS DE  
VASICEK E COX-INGERSOLL-ROSS**

**São Paulo  
2010**

Erica Pui Lan Yam

**Apreçamento da convexidade de ativos indexados ao percentual do  
CDI nos modelos de Vasicek e Cox-Ingersoll-Ross**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Economia do Insper Instituto de Ensino e Pesquisa, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Economia.

Área de concentração: Finanças

Orientador: Prof. Dr. Alberto Masayoshi Faria  
Ohashi - Insper

**São Paulo**  
**2010**

Yam, Erica Pui Lan

Apreçamento da convexidade de ativos indexados ao percentual do CDI nos modelos de Vasicek e Cox-Ingersoll-Ross/ Erica Pui Lan Yam; orientador Alberto Masayoshi Faria Ohashi. - São Paulo: Insper, 2010.

82 f.

Dissertação (Mestrado - Programa de Mestrado Profissional em Economia. Área de concentração: Finanças) - Insper Instituto de Ensino e Pesquisa.

1.Convexidade 2.Percentual do CDI 3.Taxa de juros

# FOLHA DE APROVAÇÃO

Erica Pui Lan Yam

Apreçamento da convexidade de ativos indexados ao percentual do CDI nos modelos de Vasicek e Cox-Ingersoll-Ross

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Economia Insper, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Economia.  
Área de concentração: Finanças

Aprovado em: Julho/2010

## Banca examinadora

Prof. Dr. Alberto Masayoshi Faria Ohashi

Instituição: Insper

Assinatura: \_\_\_\_\_

Prof. Dr. Eurilton Alves Araújo Junior

Instituição: Insper

Assinatura: \_\_\_\_\_

Prof. Dr. Pedro José Catuogno

Instituição: UNICAMP

Assinatura: \_\_\_\_\_

# DEDICATÓRIA

*Aos meus pais,  
meus verdadeiros mestres.*

## RESUMO

YAM, Erica Pui Lan. **Apreçamento da convexidade de ativos indexados ao percentual do CDI nos modelos de Vasicek e Cox-Ingersoll-Ross.** São Paulo, 2010. 82 f. Dissertação (Mestrado) - Insper Instituto de Ensino e Pesquisa, São Paulo, 2010.

Devido à convexidade intrínseca dos ativos indexados ao percentual do CDI, o resultado esperado desses ativos que tenham seu risco de delta neutralizado com contratos de futuros de DI é diferente de zero. Esse resultado esperado, que chamaremos de prêmio de convexidade, deve ser incorporado ao preço do ativo em questão no momento de sua negociação, embora o mercado geralmente ignore este efeito. Utilizamos os modelos de taxa de curto prazo Vasicek e Cox-Ingersoll-Ross para a obtenção de fórmulas fechadas deste prêmio de convexidade. Sugerimos também as opções do IDI como produto natural a ser utilizado para extrairmos as estimativas dos parâmetros requeridos pelas fórmulas e também como o instrumento de mercado a ser empregado para fins de *hedge* da convexidade. Fazemos a análise de sensibilidade das fórmulas obtidas e simulamos sua utilização em uma carteira onde é feito *hedge* de delta e vega, empregando opções do IDI e futuros de DI de mesmo prazo da operação. Os resultados dessas simulações com tais fórmulas são parecidos e satisfatórios para o período analisado.

Palavras-chave: convexidade; percentual do CDI; taxa de juros; modelo Vasicek; modelo Cox-Ingersoll-Ross

## Abstract

YAM, Erica Pui Lan. **Convexity pricing of assets indexed to a percentage of the CDI index in Vasicek and Cox-Ingersoll-Ross models**. São Paulo, 2010. 82 p. Dissertation (Mastership) - Insper Instituto de Ensino e Pesquisa, São Paulo, 2010.

Due to the intrinsic convexity of assets indexed to a percentage of the CDI index, the expected result of these assets that have been delta hedged with DI Future contracts is not zero. The expected result, which we call convexity premium, should be incorporated into the asset price when its negotiation, although market practioners usually ignore this effect. We use Vasicek and Cox-Ingersoll-Ross short rate models to obtain closed form formulae of this convexity premium. We also suggest the IDI options as the natural product to be used for the estimation of the parameters employed in the formulae, as well as to hedge the convexity. We make the sensitivity analysis of these formulae and simulate their application on a delta and vega hedged portfolio, using IDI options and DI futures with the same maturity of the studied asset. The results for both formulae produce similar and satisfactory results.

Keywords: convexity; CDI percentage; interest rates; Vasicek model; Cox-Ingersoll-Ross model

## Lista de Figuras

1.1	Resultado de um ativo indexado ao CDI e seu <i>hedge</i> em função de movimentos da taxa de juros . . . . .	12
3.1	Processos da taxa de curto prazo nos modelos de Vasicek e CIR . . . . .	35
3.2	Estruturas a termo das taxas de juros nos modelos de Vasicek e CIR . . . . .	37
3.3	Árvore binomial do modelo CIR . . . . .	44
4.1	Resultado de convexidade em função do percentual do CDI . . . . .	47
4.2	Sensibilidade do prêmio de convexidade no modelo de Vasicek . . . . .	51
4.3	Sensibilidade do prêmio de convexidade no modelo de CIR . . . . .	52
4.4	Gregas do prêmio de convexidade no modelo de Vasicek . . . . .	57
4.5	Gregas do prêmio de convexidade no modelo de CIR . . . . .	58
4.6	Vega do prêmio de convexidade em função do prazo . . . . .	59
5.1	Trajetórias das taxas de juros . . . . .	62
5.2	Volatilidade estimada por EWMA . . . . .	67
5.3	Volatilidades implícitas nas opções de IDI . . . . .	68
6.1	Simulação do <i>hedge</i> de delta . . . . .	71
6.2	Simulação do <i>hedge</i> de vega e delta . . . . .	73
6.3	Perfil do gama de um ativo indexado ao CDI e de uma opção do IDI em função das taxas de juros . . . . .	74

## Lista de Tabelas

3.1	Modelos de taxa de curto prazo . . . . .	28
4.1	Prêmio de convexidade no modelo Vasicek . . . . .	53
4.2	Prêmio de convexidade no modelo CIR . . . . .	54
5.1	Estimativas dos parâmetros de Vasicek por máxima verossimilhança . . . . .	62
5.2	Estimativas dos parâmetros de CIR por máxima verossimilhança . . . . .	65
6.1	Prêmios de convexidade obtidos pelas fórmulas e pelo <i>hedge</i> de delta . . . . .	70
6.2	Prêmios de convexidade obtidos pelo <i>hedge</i> de delta e pelo <i>hedge</i> de vega . . . . .	72

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>10</b>
1.1	Operações indexadas ao percentual do CDI . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Teoria de apreçamento por não arbitragem através de martingale</b>	<b>15</b>
2.1	Apreçamento por não arbitragem em tempo discreto . . . . .	15
2.1.1	Definições . . . . .	16
2.1.2	Apreçamento através da medida martingale equivalente . . . . .	18
2.2	Modelagem em tempo contínuo aplicada à renda fixa . . . . .	20
2.2.1	Processos de Itô . . . . .	21
2.2.2	Estrutura a termo das taxas de juros . . . . .	23
2.2.3	Taxa de juros de curto prazo . . . . .	23
2.2.4	Preços dos títulos zero cupom em mercados viáveis . . . . .	24
2.2.5	Medida Martingale Equivalente e Preço de mercado do risco . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Preços de títulos zero cupom e de opções do IDI pelos modelos de Vasicek e CIR</b>	<b>27</b>
3.1	Estrutura a termo das taxas de juros . . . . .	27
3.1.1	Modelos de taxas de juros . . . . .	27
3.1.2	Vasicek (1977) . . . . .	29
3.1.3	Cox-Ingersoll-Ross (1985) . . . . .	33
3.2	Apreçamento de opções do IDI . . . . .	37
3.2.1	Opção do IDI . . . . .	37
3.2.2	Paridade <i>call-put</i> . . . . .	38
3.2.3	Opção do IDI pelo modelo de Vasicek . . . . .	38
3.2.4	Opção do IDI pelo modelo de CIR . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Convexidade do percentual do CDI</b>	<b>45</b>
4.1	Apreçamento da convexidade pelo modelo de Vasicek . . . . .	47
4.2	Apreçamento da convexidade pelo modelo de CIR . . . . .	49
4.3	Análise de sensibilidade . . . . .	51

<b>5</b>	<b>Dados e estimação</b>	<b>60</b>
5.1	Dados . . . . .	60
5.2	Estimação . . . . .	60
5.2.1	Estimação por máxima verossimilhança . . . . .	60
5.2.2	Volatilidade implícita . . . . .	66
<b>6</b>	<b>Simulações e resultados</b>	<b>69</b>
6.1	<i>Hedge</i> de Delta . . . . .	69
6.2	<i>Hedge</i> de Vega e Delta . . . . .	70
<b>7</b>	<b>Conclusão</b>	<b>75</b>
	<b>Referências</b>	<b>78</b>
<b>A</b>	<b>Modelo de Black</b>	<b>82</b>

# Capítulo 1

## Introdução

O Certificado de Depósito Interfinanceiro (CDI) é o instrumento através do qual as instituições financeiras trocam recursos entre si. O índice de mesmo nome divulgado pela Cetip é a média das taxas negociadas durante o dia para operações cujo prazo é um dia útil. Operações indexadas a um percentual do CDI são amplamente realizadas no Brasil, tais como em empréstimos, *swaps* e títulos privados. Provavelmente devido ao histórico de altas taxas de inflação e instabilidade econômica, o mercado brasileiro preferiu utilizar como *benchmark* a taxa pós-fixada CDI à taxa pré-fixada. Na seção 1.1 citamos alguns exemplos dessas operações.

Uma operação indexada a um percentual  $\rho$  do CDI de principal unitário vale, no vencimento em  $T$ ,

$$\prod_{i=0}^T [((1 + CDI_i)^{(1/252)} - 1)\rho + 1], \quad (1.1)$$

onde  $CDI_i$  é a taxa diária do CDI anualizada na base 252.

No mercado de *swaps*, os praticantes usualmente apreçam esse ativo (ou passivo), em um instante  $t < T$ , através da fórmula

$$\prod_{i=0}^t [((1 + CDI_i)^{(1/252)} - 1)\rho + 1] \frac{[((1 + DI)^{(1/252)} - 1)\rho + 1]^{T-t}}{(1 + DI)^{(T-t)/252}}, \quad (1.2)$$

onde  $DI$  é a taxa pré (DI futuro<sup>1</sup>) de mesmo vencimento da operação, usada como expectativa do CDI ainda não realizado. É possível encontrar essa fórmula nos manuais de marcação a mercado da Andima e de fundos de investimentos.

No trabalho trataremos os ativos ou passivos indexados ao percentual do CDI no caso particular de ativos em operações de *swaps*. Faremos isso pois esses ativos tipicamente possuem curva de desconto igual à curva livre de risco, ou seja, a taxa pré. Contudo, é possível generalizar os resultados do trabalho para ativos com risco de crédito.

---

<sup>1</sup>O contrato de DI futuro é negociado na BM&F e tem valor \$100 mil no vencimento, sendo seu preço calculado por  $PU = \frac{100,000}{(1+DI)^{\frac{du}{252}}}$ , onde  $du$  é o número de dias úteis até o vencimento.

Pelo fato de serem pós fixadas, essas operações muitas vezes são vistas como isentas de riscos. Isso só é verdade quando o percentual é 100. De fato, quando observamos (1.2), é fácil verificar que qualquer outro percentual gera risco pré, ou seja, perdas ou ganhos são consequência de movimentos da taxa pré fixada. Quando não se deseja esta exposição, deve-se fazer o *hedge* de delta, que nada mais é do que a estratégia montada com a finalidade de neutralizar o risco da operação associado a movimentos do preço do ativo objeto, no caso, da taxa de juros. É óbvia portanto a escolha do contrato DI futuro para esse fim. O delta também pode ser visto como a derivada parcial do preço do ativo em relação à taxa de juros.

O número de contratos do DI futuro necessários no *hedge* de delta pode ser obtido numericamente:

$$\Delta = N \frac{\frac{[(1+DI-\varepsilon)^{\frac{1}{252}} - 1]^{\rho+1}]^{T-t}}{(1+DI-\varepsilon)^{\frac{T-t}{252}}} - \frac{[(1+DI)^{\frac{1}{252}} - 1]^{\rho+1}]^{T-t}}{(1+DI)^{\frac{T-t}{252}}}}{100000 \left[ \frac{1}{(1+DI-\varepsilon)^{\frac{T-t}{252}}} - \frac{1}{(1+DI)^{\frac{T-t}{252}}} \right]},$$

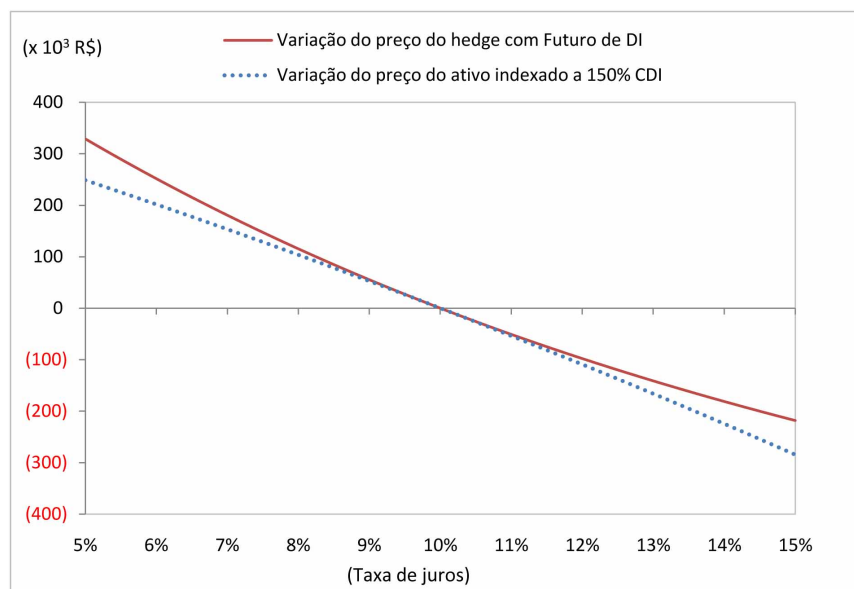
onde  $\Delta$  é o número de contratos do DI futuro,  $N$  é o principal da operação e  $\varepsilon$  é a variação da taxa pré, sendo usualmente utilizado o valor de 1 ponto básico (variação mínima na cotação dos contratos na BM&F).

O que não é tão óbvio é o fato de que esse *hedge* não é perfeito devido à diferença de convexidade entre os dois ativos. A figura 1.1 ilustra essa situação. O gráfico foi obtido ao simularmos o resultado de um ativo indexado a 150% do CDI e também do seu *hedge* com contratos de DI futuro, para diferentes movimentos da taxa de juros. Os resultados tanto do ativo indexado ao CDI quanto do futuro de DI são expostos na perspectiva do aplicador, mas na prática o que se deve fazer é tomar posições contrárias nos dois ativos para neutralizar o risco de delta (comprar o ativo de CDI e vender o contrato de DI ou vice-versa). O que observamos no exemplo é que o resultado do *hedge* é sempre maior do que o do ativo indexado ao CDI. Isso significa que, neste exemplo, uma carteira composta pelos dois ativos sempre gerará resultados positivos para o comprador do ativo indexado ao CDI e resultados negativos para o vendedor, desde que haja algum movimento da taxa pré. No exemplo, a convexidade é positiva, o que ocorre sempre que  $\rho > 1$  (a convexidade é negativa quando  $0 < \rho < 1$  e a situação se inverte). Esse ganho certo pode ser entendido como um prêmio, que deve ter um preço no momento da negociação do ativo.

Devido à convexidade, o delta varia conforme a taxa de juros muda. A fim de mantermos o delta da carteira nulo são necessários rebalanceamentos frequentes. A cada rebalanceamento é computado um ganho ou perda, conforme exposto acima. Portanto, o resultado da carteira de delta nulo até o final da operação pode ser atribuído à convexidade (chamaremos de prêmio de convexidade) e nosso interesse é encontrar uma fórmula para apreçá-lo.

Aqui cabe uma analogia com as opções. Podemos comparar essa convexidade positiva a uma opção de compra sem preço de exercício, onde a perda é limitada a zero. Outra forma é observar que os ganhos serão tão maiores quanto mais a taxa pré se mover, ou seja, quanto maior for a volatilidade. Isto significa que à fórmula (1.2) deve-se incluir um prêmio por esta opcionalidade.

Neste trabalho propomos uma fórmula para apreçar o prêmio de convexidade, a partir dos modelos de Vasicek (1977) e Cox , Ingersoll e Ross (CIR) (1985).



**Figura 1.1:** Simulação do resultado de um ativo indexado a 150% do CDI, de principal R\$1 milhão, vencimento em 8 anos e do seu *hedge* com contratos de DI futuro (montado no instante  $t = 0$ ), para diferentes movimentos da taxa de juros. No instante  $t = 0$ , o cenário da taxa de juros é de 10% a.a. e os resultados são de posição aplicada.

Devido à similaridade com o ativo indexado ao CDI, achamos que a opção do IDI é o produto mais adequado para a partir dele extrairmos as estimativas dos parâmetros necessários no apreçamento do prêmio de convexidade. O IDI (índice de taxa média de depósitos interfinanceiros de um dia) nada mais é do que a capitalização diária do CDI em forma de índice, exatamente como o produto em questão com  $\rho = 1$ . Indo além, uma vez que a convexidade implica riscos de vega<sup>2</sup> e gama<sup>3</sup>, além do delta, propomos a opção do IDI como ativo natural a ser utilizado para o *hedge* das operações indexadas ao percentual do CDI. Atualmente as opções do IDI tem como principal finalidade ser empregado como instrumento de especulação das decisões do Comitê de Política Monetária (COPOM).

Realizamos dois testes empíricos: um com *hedge* de delta apenas e outro com *hedge* de delta e *hedge* de vega da carteira. No primeiro deles estimamos por máxima verossimilhança e

<sup>2</sup>vega é a variação do valor do ativo derivativo devido a mudanças na volatilidade do ativo objeto

<sup>3</sup>gama é a variação do delta em decorrência de mudanças no preço do ativo objeto

por um modelo heterocedástico de alisamento exponencial da volatilidade (EWMA) os parâmetros necessários para a utilização da fórmula de apreçamento da convexidade, a partir das taxas de juros de vários vencimentos. Os preços do modelo *ex-ante* são então comparados ao prêmio de convexidade efetivo obtido após o *hedge* de delta da carteira. No segundo teste, utilizamos na fórmula de apreçamento a volatilidade implícita da opção do IDI, que também é utilizado como instrumento de *hedge* de vega. Essa simulação do *hedge* de delta e vega, com rebalanceamentos diários até o vencimento da operação, tem a finalidade de diminuir a exposição às estimativas históricas de volatilidade, utilizando um instrumento de mercado para neutralizar esse risco.

No restante do trabalho assumiremos um mercado incompleto, viável e sem fricções.

O trabalho está organizado da seguinte forma: no capítulo seguinte fazemos uma breve revisão de alguns conceitos usados no apreçamento por não arbitragem, com emprego de martingales, necessários para o entendimento dos modelos de taxas de juros. No capítulo 3, demonstramos os principais resultados utilizados neste trabalho, a saber: as fórmulas de apreçamento de títulos zero cupom nos modelos de Vasicek e CIR, apresentadas na primeira parte do capítulo; e as fórmulas de apreçamento das opções do IDI, com respeito aos mesmos modelos, resumidos na segunda parte. O capítulo 4 é dedicado à análise da convexidade das operações indexadas ao percentual do CDI, bem como o desenvolvimento das fórmulas de apreçamento do prêmio de convexidade. No capítulo 5 expomos o método e os resultados de estimação, necessários para as simulações, que são apresentadas no capítulo 6. Por fim, o capítulo 7 compreende as conclusões do trabalho.

## 1.1 Operações indexadas ao percentual do CDI

São muitos os produtos que podem utilizar a indexação ao CDI, com diferentes participantes, propósitos, métodos de taxação, garantias, etc. Citamos como exemplos as transações de financiamento e crédito, os *swaps* e as operações combinadas.

Entre as operações de financiamento e crédito mais comuns citamos as debêntures, empréstimos, certificados de depósito bancário (CDB) e cédulas de crédito bancário (CCB). Além do percentual do CDI, aceitam outras formas de remuneração (condicionadas ao tipo de produto), tais como indexação a diversos índices de inflação, taxas pré-fixadas em Reais, taxas pré-fixadas em moeda estrangeira, taxas pós-fixadas, entre outras.

As debêntures são títulos mobiliários representativos de dívida que asseguram a seus detentores direito de crédito sobre a empresa emissora. Apenas as empresas S.A. não financeiras podem emitir debêntures, tendo a instituição financeira apenas o papel de intermediar a emissão dos títulos. Já no caso dos empréstimos, os credores são instituições financeiras que repassam recursos aos seus clientes físicos ou jurídicos. De forma análoga, a CCB é um título de crédito

emitido em favor de uma instituição financeira, porém tem o objetivo de facilitar a pulverização do risco de crédito através de cessão e securitização por ser título negociável. O CDB é o mais conhecido título de captação de recursos pelos bancos. Nas operações de crédito, é comum o percentual ser usado como forma de expressar o *spread* de crédito das pessoas físicas e jurídicas, uma vez que o CDI é uma aproximação da taxa básica de juros da economia.

O *swap* é um derivativo no qual os participantes trocam fluxos de caixa entre si e é muito utilizado para fins de *hedge*. Os tipos mais comuns são os *swaps* de taxas de juros e de moedas, embora em tese qualquer ativo ou risco poderia ser alvo de troca (*commodities*, índices, etc). No *swap* de taxa de juros mais tradicional, uma das partes é indexada ao percentual do CDI enquanto que a outra remunera uma taxa pré-fixada. Outro tipo bastante comum é o *swap* cambial em que se trocam Reais remunerados pelo CDI por Dólares remunerados pelo cupom cambial, com liquidação financeira. A grande vantagem dos *swaps* é a adequação sob medida das necessidades específicas de cada empresa.

O CDI é muito utilizado também em operações “casadas” envolvendo títulos e *swaps*. Como mencionado anteriormente, os produtos de crédito podem remunerar o investidor das mais diversas formas. Um investidor que queira comprar o risco de crédito de uma empresa, mas que não deseja incorrer os riscos de mercado da forma de pagamento (taxa pré, inflação, moeda, etc) pode cotar uma operação combinada (título mais *swap*) em que a forma de pagamento é indexada ao percentual do CDI.

Embora não seja uma operação, vale mencionar a importância que o percentual do CDI tem na indústria de fundos, funcionando como um dos principais *benchmarks* de retorno.

## Capítulo 2

### Teoria de apreçamento por não arbitragem através de martingale

Os famosos trabalhos de Black e Scholes (1973) e Merton (1973) deram início aos modelos de apreçamento baseados na ausência de arbitragem dos mercados, o que permitiu obter preços justos independentes das preferências dos investidores. Baseados nesta idéia, contribuições posteriores de Harrison e Kreps (1979) e Harrison e Pliska (1981), que introduziram o conceito de martingales à técnica, geraram a teoria de apreçamento por não arbitragem (ou chamados por alguns como Teorema Fundamental de Apreçamento de Ativos).

Na primeira parte deste capítulo, apresentamos os conceitos fundamentais deste teorema em tempo discreto. Contudo, sua aplicação ao mercado de renda fixa se dá usualmente em tempo contínuo e é desenvolvida na segunda parte. Utilizamos como referências Musiela e Rutkowski (2005) e Elliott e Kopp (2005).

Assumiremos que o mercado é perfeito, livre de fricções. Portanto, não há custos de transação ou depósitos de margem, vendas a descoberto são permitidas, recursos para empréstimo são ilimitados e os ativos são infinitamente divisíveis.

#### 2.1 Apreçamento por não arbitragem em tempo discreto

Seja  $H_T$  o *payoff* de um derivativo com vencimento em  $T$  sobre um ativo de risco  $S$ , ou seja,  $H_T = f(S_T)$ . Dada a incerteza de  $S_T$ ,  $H_T$  é uma variável aleatória no espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . O valor do derivativo hoje  $H_0$  pode ser dado pela esperança  $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\beta H_T)$ , onde  $\beta$  é o fator de desconto temporal. Obviamente a esperança depende da medida de probabilidade  $\mathbb{P}$ , que no mundo real reflete as preferências por risco individuais dos investidores.

Contudo, se for possível montar um portfolio auto-financiável que replica perfeitamente  $H_T$ , então ambos o derivativo e seu portfolio replicante devem ter o mesmo preço. A essência do apreçamento por não arbitragem reside no fato de que os investidores irão explorar as diferenças de preços caso elas ocorram. A evolução desta idéia é o teorema fundamental, que garante que um mercado é livre de arbitragem se, e somente se, o processo de preços descontados é martingale sob uma medida de probabilidade equivalente. Através deste teorema, averiguar a

ausência de arbitragem é equivalente a verificar a existência da medida martingale equivalente.

### 2.1.1 Definições

Seja  $\mathbb{T} = \{0, 1, \dots, T\}$  o conjunto das datas ou instantes possíveis de negociação. Fixe um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  que representa os possíveis estados da natureza. Defina por  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$  a filtração deste espaço de probabilidade, que guarda o conjunto de informações disponíveis pelos investidores em  $t$  ( $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$  e para  $s \leq t$ ,  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ ).

Assuma  $S = \{S_t^i : t \in \mathbb{T}, i = 0, 1, \dots, d\}$ , de dimensão  $d + 1$ , a evolução dos preços dos ativos, onde  $S^0$  representa o ativo livre de risco enquanto que os outros  $d$  ativos são de risco. O processo  $S$  é adaptado à filtração  $\mathbb{F}$ , ou seja,  $S_t^i$  é  $\mathcal{F}_t$ -mensurável, o que significa que os investidores conhecem os vetores de preços  $(S_u^i : u \leq t)$  no instante  $t$ .

Por  $S^0$  designamos um ativo livre de risco e aqui será usado como numerário, embora qualquer ativo não negativo possa ser utilizado para este fim. Assumiremos que  $S^0(0) = 1$ . O fator de desconto  $\beta = \frac{1}{S_t^0}$  representa a quantidade monetária que deve ser investida no instante 0 para que se recupere 1 unidade em  $t$ .

### Estratégias auto-financiáveis

Dado o mercado modelado por  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{T}, \mathbb{F}, S)$ , um portfolio de investimento (ou estratégia de negociação) em  $t \geq 1$  é dado pela  $\mathbb{R}^{d+1}$ -variável aleatória  $\theta_t = (\theta_t^i)_{0 \leq i \leq d}$ , cujo valor é

$$\begin{aligned} V_0(\theta) &= \theta_1 \cdot S_0, \\ V_t(\theta) &= \theta_t \cdot S_t = \sum_{i=0}^d \theta_t^i S_t^i, \quad t \in \mathbb{T}, \quad t \geq 1. \end{aligned}$$

Aqui,  $a \cdot b$  denota o produto interno usual em  $\mathbb{R}^{d+1}$  para  $a, b \in \mathbb{R}^{d+1}$ .

Em  $t$ , os investidores fazem o rebalanceamento do portfolio e decidem a estratégia  $\theta_{t+1}$ , mantida pelo intervalo  $(t, t + 1]$ , baseado nos preços  $S_t$ . Isso significa dizer que  $\theta_{t+1}$  é  $\mathcal{F}_t$ -mensurável.

A estratégia  $\theta$  é auto-financiável se variações de  $V_t(\theta)$  advém somente de variações dos investimentos, sem aporte ou retirada de capital. Isso é o mesmo que

$$\theta_{t+1} \cdot S_t = \theta_t \cdot S_t, \quad t = 1, 2, \dots, T - 1.$$

Seja o processo de ganhos associado à estratégia  $\theta$  definido como

$$G_0(\theta) = 0,$$

$$G_t(\theta) = \sum_{i=1}^t \theta_i \cdot \Delta S_i. \quad (2.1)$$

É fácil de ver que  $\theta$  é auto-financiável se, e somente se,

$$V_t(\theta) = V_0(\theta) + G_t(\theta), \quad t \in \mathbb{T}. \quad (2.2)$$

### Mercado viável

Seja  $\Theta$  a classe de todas as estratégias auto-financiáveis. A classe de estratégias admissíveis  $\Theta_a$  compreende as estratégias auto-financiáveis em que  $V_t(\theta) \geq 0, t \in \mathbb{T}$ .

Uma oportunidade de arbitragem envolve uma estratégia  $\theta \in \Theta_a$  tal que

$$\begin{aligned} V_0(\theta) &= 0, \\ V_T(\theta) &\geq 0, \text{ e} \\ \mathbb{P}\{V_T(\theta) > 0\} &> 0. \end{aligned}$$

O mercado é dito viável quando não há oportunidades de arbitragem.

### Estratégia replicante

Seja  $H$  um contingente a ser recebido em  $T$ , tal que  $H$  é uma variável aleatória não negativa  $\mathcal{F}_T$ -mensurável sobre  $(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ . Uma estratégia admissível  $\theta$  replica  $H$  se

$$V_T(\theta) = H.$$

Em um mercado viável, o processo de valor de  $H$  e da estratégia que o replica são iguais.

$$H_t = V_t(\theta)$$

Isso se baseia na ideia de que os investidores são racionais e que portanto exploram as oportunidades de arbitragem que eventualmente surjam. Esta técnica permite que se encontre um preço justo independentemente das preferências individuais.

É possível demonstrar que, em um mercado viável, duas estratégias replicantes de  $H$  apresentarão o mesmo processo de valor e portanto o preço por arbitragem é de fato único.

O mercado é dito completo quando todos os ativos contingentes são replicáveis.

## 2.1.2 Apreçamento através da medida martingale equivalente

### Martingale

Fixe um espaço de probabilidade filtrado  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F}, \mathbb{T})$ . O processo  $M = (M_t)_{t \in \mathbb{T}}$  é  $(\mathbb{F}, \mathbb{Q})$ -martingale,  $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ , se

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(M_{t+1} | \mathcal{F}_t) = M_t.$$

Ou seja,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\Delta M_{t+1} | \mathcal{F}_t) = 0.$$

Intuitivamente, para um ativo que siga um processo martingale, sua melhor estimativa futura é seu valor atual.

Se  $M = (M_t)$  é martingale e  $\phi = (\phi_t)_{t \in \mathbb{T}}$  é um processo previsível, ou seja,  $\phi_{t+1}$  é  $\mathcal{F}_t$ -mensurável, então o processo  $X$ , dado por

$$\begin{aligned} X_0 &= 0 \\ X_t &= \phi_1 \Delta M_1 + \phi_2 \Delta M_2 + \dots + \phi_t \Delta M_t \end{aligned}$$

é a transformação martingale de  $M$  por  $\phi$ , para o qual temos que

$$\mathbb{E}(\Delta X_{t+1} | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\phi_{t+1} \Delta M_{t+1} | \mathcal{F}_t) = \phi_{t+1} \mathbb{E}(\Delta M_{t+1} | \mathcal{F}_t) = 0.$$

Logo,  $X$  também é martingale.

### Existência da medida martingale equivalente e ausência de arbitragem

Aqui estabelecemos o porquê da utilização de martingales na técnica de apreçamento por não arbitragem, através da seguinte proposição: um mercado finito<sup>1</sup> é viável se, e somente se, existe uma medida martingale equivalente para  $S$  (primeiro teorema fundamental).

Demonstração:

Assuma que existe uma estratégia  $\theta$  tal que

$$\begin{aligned} V_0(\theta) &= 0 \text{ e} \\ V_T(\theta) &\geq 0 \text{ q.c.} \end{aligned}$$

Suponha agora que  $\tilde{S}_t$ , processo de preços descontado pelo ativo livre de risco  $S_t^0$ ,

<sup>1</sup>em um modelo de mercado finito, todas as quantidades relevantes assumem um número finito de valores, ou seja, temos um conjunto discreto e finito de instantes de negociação  $\mathbb{T} = \{0, \dots, T^*\}$ , bem como de espaço amostral  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_d\}$ .

$$\tilde{S}_t = \{1, \beta_t S_t^1, \dots, \beta_t S_t^d\}$$

é  $(\mathbb{F}, \mathbb{Q})$ -martingale. Então, pelas fórmulas (2.1) e (2.2), a estratégia  $\theta \in \Theta_a$  terá processo de valor descontado por  $S^0$  dado por

$$\tilde{V}_t(\theta) = \sum_{i=1}^d \left( \theta_1^i S_0^i + \sum_{u=1}^t \theta_u \Delta \tilde{S}_u^i \right). \quad (2.3)$$

Observamos que  $\tilde{V}_t(\theta)$  é uma constante  $V_0(\theta)$  mais uma soma de transformações de martingales. Por conseguinte,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\tilde{V}_t(\theta)) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(V_0(\theta)) = V_0(\theta).$$

Se por hipótese  $V_0(\theta) = 0$ , então

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\tilde{V}_T(\theta)) = 0,$$

ou seja,

$$\mathbb{Q}(\tilde{V}_T(\theta) > 0) = 0.$$

Portanto, a existência da medida martingale  $\mathbb{Q}$  impede que haja oportunidades de arbitragem, ou seja, procurar a existência de medidas sob as quais  $\tilde{S}$  é martingale equivale a verificar se o mercado é viável.

A medida martingale é também conhecida por medida risco-neutro. Um investidor que não queira assumir riscos de  $H$  deve montar a carteira replicante, obtendo retornos iguais à taxa livre de risco.

Provar o caminho inverso, ou seja, que em todo mercado viável é possível encontrar uma medida martingale equivalente, utiliza o teorema de separação de hiperplano e não demonstraremos aqui (ver Elliott e Kopp (2005, p.57)).

### Preço por não arbitragem

Suponha que o mercado é viável e que  $\mathbb{Q}$  é a medida martingale equivalente. O contingente  $H(\omega)$ ,  $\mathcal{F}_T$ -mensurável, representa o *payoff* de um contrato no vencimento  $T$  caso  $\omega \in \Omega$  ocorra. Queremos encontrar seu preço corrente  $\pi(H)$  em  $t = 0$ . Se  $H$  é replicável, então existe uma estratégia  $\theta \in \Theta_a$  tal que  $V_T(\theta) = H$ . Logo, o valor da estratégia descontado pelo ativo livre de risco será

$$\tilde{V}_T(\theta) = \beta_T H. \quad (2.4)$$

Por ser uma transformação de martingales,  $\tilde{V}(\theta)$  é também um martingale. Assim,

$$\tilde{V}_t(\theta) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\tilde{V}_T(\theta) | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\beta_T H | \mathcal{F}_t).$$

Ou seja,

$$V_t(\theta) = \beta_t^{-1} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\beta_T H | \mathcal{F}_t). \quad (2.5)$$

Em particular, o valor presente em  $t = 0$  será

$$\pi(H) = \tilde{V}_0(\theta) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\beta_T H | \mathcal{F}_0) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\beta_T H).$$

### Unicidade da medida martingale equivalente e mercado completo

O segundo teorema fundamental estabelece que um mercado viável e finito é completo se, e somente se, admite uma única medida martingale equivalente.

Demonstração:

Suponha um mercado viável e completo e que  $\mathbb{Q}$  e  $\mathbb{Q}'$  são medidas martingales de  $S$ , tal que  $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P} \sim \mathbb{Q}'$ . Se  $H$  é replicável por  $\theta \in \Theta_a$ , então por (2.3) e (2.4) temos que

$$\beta_T H = \tilde{V}_T(\theta) = V_0(\theta) + \sum_{t=1}^T \theta_t \cdot \Delta \tilde{S}_t. \quad (2.6)$$

Como o processo descontado de cada ativo  $S^i$  é martingale tanto em  $\mathbb{Q}$  como em  $\mathbb{Q}'$ , a somatória de (2.6) tem expectativa nula em ambas as medidas. Portanto,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\beta_T H) = V_0(\theta) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}'}(\beta_T H),$$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(H) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}'}(H). \quad (2.7)$$

A equação (2.7) vale para toda variável aleatória  $\mathcal{F}$ -mensurável  $H$ , pois o modelo é completo por hipótese. Logo, concluímos que  $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}'$  e que a medida martingale equivalente é única.

Não faremos a prova do caminho inverso, ou seja, de que em um modelo incompleto existe mais de uma medida martingale equivalente (ver Elliott e Kopp (2005, p.89)).

## 2.2 Modelagem em tempo contínuo aplicada à renda fixa

O apreçamento em tempo contínuo é uma simplificação da realidade e utiliza os mesmos conceitos desenvolvidos anteriormente, porém sua abstração facilita a obtenção de resultados através do cálculo estocástico.

Em tempo contínuo,  $t \in [0, T]$  e novamente assumimos o espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  e a filtração  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ , contínuo à direita. Os preços dos ativos são descritos pelo processo estocástico  $S : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ , de dimensão  $d + 1$ . Isso significa que, ao se fixar  $t$ , temos uma variável aleatória  $S_t(\cdot)$ , no espaço mensurável  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Mas, ao se fixar  $\omega$ , temos a trajetória do preço no tempo dada pela função  $X_t(\omega)$ , representando uma possível realização.

Os modelos em tempo contínuo utilizam em geral o movimento Browniano para representar o processo de preços dos ativos, sendo um dos processos martingales mais conhecidos. Contudo, os funcionais gerados pelo movimento Browniano têm em geral variação ilimitada e não são diferenciáveis.

### 2.2.1 Processos de Itô

#### Movimento Browniano

O movimento Browniano padrão  $(W_t)_{t \geq 0}$  é um processo estocástico sob um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  que possui trajetórias contínuas e incrementos Gaussianos independentes. Ou seja,

1.  $W_0 = 0$  q.c.
2.  $t \mapsto W_t(\omega)$  é contínuo q.c.
3. Para  $s \leq t$ , os incrementos  $W_t - W_s$  são variáveis aleatórias de distribuição normal  $N(0, t - s)$  e independentes de  $\mathcal{F}_s$ .

Um processo  $X$  é dito seguir um movimento Browniano aritmético quando

$$dX_t = \mu dt + \sigma dW_t,$$

onde

$$\begin{aligned} dW_t &= \phi \sqrt{dt}, \\ \phi &\sim N(0, 1). \end{aligned}$$

Neste caso, o processo não é mais um passeio aleatório puro, apresentando uma tendência caracterizada por  $\mu$ . O movimento Browniano geométrico, por sua vez, é da forma

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t.$$

Os processos acima são bastante utilizados em modelagem financeira. São casos particulares dos processos de Itô, na sua forma diferencial.

## Processos de Itô

Um processo de Itô  $(X_t)_{t \geq 0}$  tem a forma

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s, \quad (2.8)$$

onde

1.  $X_0$  é  $\mathcal{F}_0$ -mensurável
2.  $K$  e  $H$  são adaptados a  $\mathcal{F}_t$
3.  $\int_0^T |K_s| ds < \infty$  q.c. e  $\int_0^T |H_s|^2 ds < \infty$  q.c

Se  $H$  é um processo simples em  $[0, T]$ , ou seja, para uma partição  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ ,

$$H_t = H_0(\omega) + \sum_{i=0}^{n-1} H_i(\omega) \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}, \quad \forall t \in [0, T],$$

pode-se demonstrar que, se  $H$  é previsível ( $H_i$  é  $\mathcal{F}_{t_i}$ -mensurável), então

$$\mathbb{E} \left( \left( \int_0^t H_s dW_s \right)^2 \right) = \mathbb{E} \left( \int_0^t H_s^2 ds \right). \quad (2.9)$$

Este resultado é chamado de isometria de Itô. Além disso, temos a propriedade martingale

$$\mathbb{E} \left( \int_0^t H_s dW_s \mid \mathcal{F}_s \right) = \int_0^s H_u dW_u, \quad s \leq t. \quad (2.10)$$

As relações (2.9) e (2.10) são válidas para qualquer integrando  $H$  mensurável satisfazendo os itens 2 e 3 acima.

## Fórmula de Itô

Suponha um processo de Itô da forma (2.8) e uma função  $f$  com derivada de segunda ordem contínua. Então a fórmula de Itô estabelece que

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X \rangle_s,$$

onde  $\langle X \rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds$  é a variação quadrática do componente martingale de  $X$  e também

$$\int_0^t f'(X_s) dX_s = \int_0^t f'(X_s) K_s ds + \int_0^t f'(X_s) H_s dW_s.$$

Para o caso em que  $F = F(t, X_t)$ , a fórmula fica

$$F(t, X_t) = F(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial s}(s, X_s) ds + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s, X_s) d\langle X \rangle_s.$$

### 2.2.2 Estrutura a termo das taxas de juros

Denominaremos por  $B(t, T)$  o preço de um título zero cupom no instante  $t \leq T$  e com vencimento em  $T$ . Estes ativos têm valor fixo no vencimento (convencionaremos  $B(T, T) = 1$ ) e seus preços relacionam-se com taxas de juros  $Y(t, T)$  pela fórmula

$$B(t, T) = e^{-Y(t, T)(T-t)}, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.11)$$

Aqui utilizamos a capitalização contínua, por sua adequação à modelagem em tempo contínuo, embora na prática sejam utilizadas outras convenções. A taxa de juros  $Y(t, T)$  pode ser obtida a partir dos preços de mercado dos títulos zero cupom pela fórmula

$$Y(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln B(t, T), \quad \forall t \in [0, T].$$

A estrutura a termo das taxas de juros corresponde a esta relação unívoca entre  $B(t, T)$  e  $Y(t, T)$ . Exemplos de ativos no Brasil negociados nestes moldes são as LTNs<sup>2</sup> e os contratos de Futuro de DI.

### 2.2.3 Taxa de juros de curto prazo

A taxa de juros à vista instantânea (ou de curto prazo)  $r_t$  corresponde à taxa livre de risco válida para o intervalo infinitesimal  $[t, t + dt]$ . Note que se  $\frac{\partial Y(t, T)}{\partial T}$  é finita, então podemos definir

$$r_t = \lim_{T \rightarrow t} Y(t, T).$$

As taxas de juros de curto prazo são usualmente modeladas segundo um processo de Itô, ou seja, sob a medida de probabilidade física  $\mathbb{P}$

$$r_t = r_0 + \int_0^t \mu_u du + \int_0^t \sigma_u dW_u, \quad \forall t \in [0, T],$$

<sup>2</sup>Letras do Tesouro Nacional (LTN) são títulos pré-fixados de dívida pública federal, cujo valor de face é de R\$1000 no vencimento

onde  $\mu$  e  $\sigma$  são processos estocásticos adaptados com valores em  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{R}^d$  respectivamente.

Ou, de outra forma,

$$dr_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t. \quad (2.12)$$

Podemos definir um processo  $B$ , que capitaliza as taxas  $r_t$  no tempo, como

$$\begin{aligned} dB_t &= r_t B_t dt, \\ B_0 &= 1, \end{aligned}$$

cuja solução é

$$B_t = \exp\left(\int_0^t r_u du\right), \quad \forall t \in [0, T].$$

$B_t$  é chamado de conta “caixa” e como é sempre positivo, será aqui usado como numérico.

#### 2.2.4 Preços dos títulos zero cupom em mercados viáveis

Uma família de títulos zero cupom, cujos vencimentos são  $T \in [0, T^*]$ , será livre de arbitragem se existe uma medida de probabilidade  $\mathbb{Q}$  em  $(\Omega, \mathcal{F}_{T^*})$  equivalente a  $\mathbb{P}$  tal que, para qualquer  $T \in [0, T^*]$ , o preço relativo do título

$$\tilde{B}(t, T) = B(t, T)/B_t, \quad \forall t \in [0, T]$$

é martingale com respeito à medida de probabilidade  $\mathbb{Q}$  (vide demonstração na seção 2.1.2, em tempo discreto).

Logo,

$$\tilde{B}(t, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\tilde{B}(T, T) | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1} | \mathcal{F}_t),$$

$$B(t, T) = B_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1} | \mathcal{F}_t), \quad \forall t \in [0, T].$$

Ou, de outra forma,

$$B(t, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(e^{-\int_t^T r_u du} | \mathcal{F}_t\right), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.13)$$

De forma análoga, por (2.5), o preço em  $t$  de qualquer contingente  $H$  no contexto de taxas de juros estocásticas será dado por

$$\pi_t(H) = B_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(HB_T^{-1} | \mathcal{F}_t). \quad (2.14)$$

### 2.2.5 Medida Martingale Equivalente e Preço de mercado do risco

Assuma que a taxa de juros de curto prazo siga um processo de Itô, da forma

$$dr_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t.$$

Nosso objetivo agora é encontrar uma medida martingale equivalente. Para isso, utilizaremos o teorema de Girsanov.

#### Teorema de Girsanov

Segundo o teorema de Girsanov, é possível transformar um movimento Browniano mais um processo suave em um movimento Browniano através de uma mudança de medida de probabilidade.

Seja  $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$  o espaço de probabilidade filtrado e  $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$  um movimento Browniano. Suponha  $(\lambda_t)_{0 \leq t \leq T}$  um processo mensurável adaptado tal que  $\int_0^T \lambda_s^2 ds < \infty$  e que o processo

$$\eta_t = \exp\left(\int_0^t \lambda_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \lambda_s^2 ds\right)$$

seja  $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ -martingale.

Defina uma nova medida de probabilidade  $\mathbb{Q}$  em  $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ , equivalente a  $\mathbb{P}$ , pela derivada de Radon-Nikodým

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_T} = \eta_T.$$

Então, o processo

$$W_t^{\mathbb{Q}} = W_t - \int_0^t \lambda_s ds \tag{2.15}$$

é um movimento Browniano em  $(\mathcal{F}_t, \mathbb{Q})$ .

Para garantir que  $\eta$  seja martingale, a condição de Novikov diz que é suficiente que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left\{ \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^T \lambda_s^2 ds\right) \right\} < \infty.$$

### Preço de mercado do risco

No decorrer deste trabalho, estaremos assumindo que  $B(t, T) = F(t, T, r_t)$  para alguma função suave  $F$ . Isto é, toda a estrutura a termo é determinada por um único fator  $\{r_t\}$ ,  $t \in [0, T]$ .

Seja  $B(t, T)$  uma família de títulos livre de arbitragem. Então, pelo teorema de Girsanov e fórmula de Itô, temos que

(a) Sob a medida martingale  $\mathbb{Q}$ ,  $r_t$  satisfaz

$$dr_t = (\mu_t + \sigma_t \lambda_t) dt + \sigma_t dW_t^{\mathbb{Q}}$$

O resultado advém da combinação de (2.12) e (2.15).

(b) Existe um processo adaptado  $\sigma_B(t, T)$ , chamado de volatilidade do título, tal que

$$dB(t, T) = B(t, T)(r_t dt + \sigma_B(t, T) dW_t^{\mathbb{Q}})$$

(c) o preço do título  $B(t, T)$ , na medida de probabilidade real  $\mathbb{P}$ , satisfaz

$$dB(t, T) = B(t, T)((r_t - \lambda_t \sigma_B(t, T)) dt + \sigma_B(t, T) dW_t) \quad (2.16)$$

Observamos por (2.16) que, no mundo físico, o retorno esperado do título é  $r_t - \lambda_t \sigma_B(t, T)$ . O excesso de retorno é atribuído ao risco  $\sigma_B$ , por isso  $\lambda$  é chamado de preço de mercado do risco.  $\lambda$  desempenha a função de relacionar o mundo neutro ao risco ao mundo real. É importante notar que é necessário fornecer o preço de mercado do risco para que o modelo de taxa de juros seja completamente especificado. Contudo, se estamos interessados em estudar os derivativos de taxa de juros, podemos ignorar  $\lambda$ , pois estará implícito no preço do ativo objeto.

## Capítulo 3

### Preços de títulos zero cupom e de opções do IDI pelos modelos de Vasicek e CIR

Este capítulo é dedicado à exposição dos modelos de Vasicek e Cox et al., aplicados primeiramente à modelagem da estrutura a termo das taxas de juros (ETTJ) (ou equivalentemente ao apreçamento dos títulos zero cupom) e também ao apreçamento das opções do IDI.

#### 3.1 Estrutura a termo das taxas de juros

##### 3.1.1 Modelos de taxas de juros

O primeiro modelo de apreçamento de opções, proposto por Black e Scholes, utiliza o movimento browniano geométrico para modelar os preços de ações. O preço do ativo é dado por

$$\frac{S_t}{B_t} = S_0 \exp\left(\sigma W_t + \left(\mu - r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right),$$

onde  $S_t$  é o preço da ação,  $\mu - r$  é o excesso de retorno e  $\sigma$  é a volatilidade, sendo os parâmetros constantes. Tal modelo é muito utilizado no mercado de ações e *commodities*, mas não se adequa ao mercado de renda fixa, pelos seguintes motivos: no modelo de Black e Scholes as taxas de juros são determinísticas, mas tal simplificação não pode ser ignorada quando o ativo objeto é um ativo de juros; igualmente inadequada é a suposição de volatilidade constante, pois os títulos têm valor fixo no vencimento e portanto a volatilidade diminui com o tempo, tendendo a zero; por último, diferentemente dos preços das ações que podem ser modelados por uma distribuição lognormal, pois a única restrição são preços negativos, para os ativos de renda fixa isso não garante taxas de juros não negativas (a condição necessária seria que os preços do título no futuro fossem maiores ou iguais ao seu preço corrente).

A solução foi o surgimento de uma série de modelos específicos para renda fixa, através da modelagem das taxas de juros em lugar dos preços dos ativos. Os primeiros modelos propuseram processos estocásticos unifatoriais para descrever a taxa de juros de curto prazo.

Os modelos unifatoriais, em contraposição aos modelos multifatoriais, apresentam apenas uma fonte de incerteza (movimento Browniano unidimensional). Nos modelos unifatoriais, mudanças de preços dos ativos são perfeitamente correlacionados. Segundo Musiela e Rutkowski (2005), são os métodos mais populares de apreçamento e hedging de derivativos de taxas de juros.

A tabela 3.1 resume alguns dos principais modelos de taxas de curto prazo unifatoriais. A equação genérica que descreve esta família de modelos é

$$df(r_t) = (a_t + b_t f(r_t))dt + \sigma r_t^\gamma dW_t,$$

onde  $a_t$  e  $b_t$  são parâmetros de tendência,  $\sigma_t$  e  $\gamma$  são parâmetros de volatilidade e  $W$  é movimento browniano unidimensional.

**Tabela 3.1:** Principais modelos de taxa de curto prazo.

Modelo	Processo de $r_t$
<b>Equilíbrio geral</b>	
Merton (1973)	$dr_t = a dt + \sigma dW_t$
Vasicek (1977)	$dr_t = \alpha(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t$
Dothan (1978)	$dr_t = ar_t dt + \sigma r_t dW_t$
Brennan e Schwartz (1980)	$dr_t = \alpha(\theta - r_t)dt + \sigma r_t dW_t$
Cox-Ingersoll-Ross (1985)	$dr_t = \alpha(\theta - r_t)dt + \sigma \sqrt{r_t} dW_t$
Longstaff (1989)	$dr_t = a(b - c\sqrt{r_t})dt + \sigma \sqrt{r_t} dW_t$
Vasicek exponencial	$d \ln r_t = \alpha(\theta - \ln r_t)dt + \sigma dW_t$
<b>Não-arbitragem</b>	
Hull-White (Vasicek estendido) (1990)	$dr_t = \alpha(\theta_t - r_t)dt + \sigma dW_t$
Hull-White (CIR estendido) (1990)	$dr_t = \alpha(\theta_t - r_t)dt + \sigma \sqrt{r_t} dW_t$
Black-Derman-Toy (1990)	$d \ln r_t = (\theta_t + \frac{\sigma_t}{\sigma_t} \ln r_t) + \sigma_t dW_t$
Black-Karasinski (1991)	$d \ln r_t = (\theta_t - \alpha_t \ln r_t)dt + \sigma_t dW_t$

O primeiro deles foi proposto por Merton (1973), porém notamos que as taxas de juros “explodem” quando  $a > 0$ , o que não é observável na prática. O modelo de Vasicek (1977) contorna este problema, introduzindo a reversão à média, porém tal qual o modelo de Merton, ainda permite que as taxas de juros assumam valores negativos com probabilidade positiva. Esta característica indesejável foi tratada por Dothan (1978), através da suposição de uma distribuição lognormal de  $r$ , e por Cox, Ingersoll e Ross (CIR)(1985), através da inserção de uma raiz quadrada de  $r$  no termo da volatilidade. Outros modelos quase sempre são combinações dessas características. A grande vantagem dos modelos de Vasicek e CIR é sua tratabilidade analítica, ao contrário dos modelos lognormais, que não permitem a obtenção de fórmulas “fechadas”.

A crítica clássica a estes modelos diz respeito à sua natureza endógena, ou seja, a estrutura a termo das taxas de juros (ETTJ) é saída do modelo. De fato, quando estamos interessados em apreçar derivativos, tomamos como dada a ETTJ pelo mercado e é desejável que o modelo possa reproduzi-la precisamente. Este problema foi contornado pelo surgimento dos modelos exógenos ou também conhecidos como modelos de não arbitragem, em que por construção o modelo se adequa à ETTJ observada, ou seja, ela é informação de entrada do modelo. Neste caso, os parâmetros passam a depender do tempo, o que torna possível o ajuste a uma classe maior de curvas de juros.

Por fim surgiram os modelos da classe HJM, o qual engloba modelos de taxa de juros de curto prazo. São mais complexos por serem em geral não-markovianos<sup>1</sup>, o que dificulta sua utilização. Permitem o ajuste à ETTJ inicial, mas requerem uma condição de consistência a uma família de curvas parametrizadas por um número finito de fatores.

A seguir dedicamos especial atenção aos modelos de Vasicek e CIR. Utilizaremos uma medida risco neutro  $\mathbb{Q}$ , embora os modelos tenham sido originalmente desenvolvidos sob a medida de probabilidade real. Isto condiz com o interesse deste trabalho que são as opções. Sempre que for necessário passar de uma realidade à outra, deve-se utilizar o teorema de Girsanov conforme seção 2.2.5.

### 3.1.2 Vasicek (1977)

Vasicek propôs o seguinte processo para a taxa de curto prazo, com respeito à medida de probabilidade real  $\mathbb{P}$ :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t, \quad (3.1)$$

onde  $a$  é velocidade de reversão à média,  $b$  é a média de longo prazo e  $\sigma$  é a volatilidade, todas constantes e estritamente positivas. Este modelo inova ao introduzir a reversão à média, do tipo Ornstein-Uhlenbeck. Pela equação (3.1), nota-se que caso  $r_t > b$ , a tendência tem sinal negativo fazendo com que as taxas decaiam. Vale o oposto quando  $r_t < b$  e a velocidade com que isso ocorre é determinada pelo parâmetro  $a$ . Um dos grandes problemas deste modelo é o fato de permitir que as taxas assumam valores negativos com probabilidade positiva, embora a reversão à média tenha o efeito de diminuir essa probabilidade. A figura 3.1 na página 35 ilustra algumas possíveis realizações deste modelo, quando variamos os valores dos parâmetros do modelo.

Com vistas à condição de não-arbitragem, queremos transformar  $\mathbb{P}$  em uma medida

<sup>1</sup>Processo markoviano é aquele em que a fdp dos estados futuros depende apenas do estado presente, e não dos estados passados.

risco-neutro  $\mathbb{Q}$ . Usando um preço de mercado do risco ( $\lambda$ ) adequado, por exemplo o mesmo utilizado por Brigo e Mercurio (2001), da forma

$$\lambda_t = \frac{\lambda r_t}{\sigma}, \quad (3.2)$$

podemos através do teorema de Girsanov (2.15) realizar a transformação de medidas. Ou seja,

$$dW_t^{\mathbb{Q}} = -\lambda_t dt + dW_t.$$

Substituindo a última fórmula em (3.1), obtemos

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma(\lambda_t dt + dW_t^{\mathbb{Q}}),$$

que, ao se combinar à definição de  $\lambda$  em (3.2), temos que

$$dr_t = (a - \lambda) \left( \frac{ab}{a - \lambda} - r_t \right) dt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}}.$$

Renomeando os termos, tal que  $\alpha = a - \lambda$  e  $\theta = ab/(a - \lambda)$ , obtemos o mesmo formato original em (3.1). De fato, o formato de  $\lambda$  foi escolhido com esse intuito, para que obtivéssemos um processo tratável nas duas medidas de probabilidade, embora saibamos que tal especificação não necessariamente representa a realidade (vide Duffee (2002)). Assim, sob uma probabilidade risco-neutro  $\mathbb{Q}$ ,

$$dr_t = \alpha(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}}. \quad (3.3)$$

A solução da equação diferencial estocástica acima pode ser obtida usando-se do seguinte artifício:

Seja  $Y_t = r_t e^{\alpha(t-s)}$ ,  $t \geq s$ . Pela fórmula de Itô e (3.3),

$$\begin{aligned} dY_t &= e^{\alpha(t-s)} dr_t + \alpha e^{\alpha(t-s)} r_t dt = e^{\alpha(t-s)} (\alpha \theta dt - \alpha r_t dt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}} + \alpha r_t dt) \\ &= e^{\alpha(t-s)} (\alpha \theta dt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}}). \end{aligned}$$

Da definição de  $Y_t$ , temos que

$$\begin{aligned} r_t e^{\alpha(t-s)} - r_s &= \int_s^t dY_u = \int_s^t \alpha \theta e^{\alpha(u-s)} du + \sigma \int_s^t e^{\alpha(u-s)} dW_u^{\mathbb{Q}}, \\ r_t &= r_s e^{-\alpha(t-s)} + e^{-\alpha(t-s)} \int_s^t \alpha \theta e^{\alpha(u-s)} du + \sigma e^{-\alpha(t-s)} \int_s^t e^{\alpha(u-s)} dW_u^{\mathbb{Q}}. \end{aligned}$$

Após integração, obtemos a solução de (3.3):

$$r_t = r_s e^{-\alpha(t-s)} + \theta(1 - e^{-\alpha(t-s)}) + \sigma \int_s^t e^{-\alpha(t-u)} dW_u^{\mathbb{Q}}. \quad (3.4)$$

Ao tomarmos o limite da esperança e da variância condicionais de  $r$  quando  $t$  tende a infinito, obtemos uma distribuição estacionária normal, cuja média e variância são respectivamente:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(r_t | \mathcal{F}_s) &= \theta, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \text{Var}_{\mathbb{Q}}(r_t | \mathcal{F}_s) &= \frac{\sigma^2}{2\alpha}. \end{aligned}$$

Vale notar que as taxas de curto prazo de fato convergem para o equilíbrio de longo prazo  $\theta$ , tendo  $\alpha$  o efeito de reduzir a variância.

Sabemos que a integral de Itô em (3.4) é uma variável aleatória que segue distribuição normal com média zero e variância

$$\int_s^t \sigma^2 e^{-2\alpha(t-u)} du = \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha(t-s)}).$$

Portanto, a distribuição condicional de  $r_t$  com respeito a  $\mathcal{F}_s$  é normal, com esperança e variância condicionais:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(r_t | \mathcal{F}_s) = r_s e^{-\alpha(t-s)} + \theta(1 - e^{-\alpha(t-s)}), \quad \forall s < t \quad (3.5)$$

$$\text{Var}_{\mathbb{Q}}(r_t | \mathcal{F}_s) = \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha(t-s)}), \quad \forall s < t \quad (3.6)$$

O fato da distribuição condicional de  $r$  ser Gaussiana torna o modelo de Vasicek extremamente fácil de ser utilizado, permitindo grande tratabilidade analítica.

### Preço do título zero cupom

O apreçamento do título zero cupom no modelo de Vasicek utiliza o seguinte lema:

**Lema 3.1.1.** *Seja  $\xi$  uma variável aleatória cuja distribuição é normal  $N(\mu, \sigma^2)$ . Então a variável aleatória  $\zeta = e^{\xi}$  tem valor esperado  $e^{\mu + \sigma^2/2}$  e variância  $e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$ .*

Como sabemos que o preço deste título, livre de arbitragem, é dado pela esperança condicional (2.13) com respeito à medida martingale equivalente  $\mathbb{Q}$ , ou seja,

$$B(t, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left( e^{-\int_t^T r_u du} \mid \mathcal{F}_t \right), \quad \forall t \in [0, T],$$

então basta encontrarmos a distribuição condicional de  $\xi = \int_t^T r_u du$  e teremos o preço através do lema 3.1.1.

Segue de (3.5) e (3.6) que  $\xi|\mathcal{F}_t$  é uma normal, cuja média e variância são:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\xi|\mathcal{F}_t) = \theta(T-t) + \alpha^{-1}(r_t - \theta)(1 - e^{-\alpha(T-t)}), \quad (3.7)$$

$$\text{Var}_{\mathbb{Q}}(\xi|\mathcal{F}_t) = \frac{\sigma^2}{2\alpha^3}(4e^{-\alpha(T-t)} - e^{-2\alpha(T-t)} + 2\alpha(T-t) - 3). \quad (3.8)$$

A esperança de  $\xi$  condicionada a  $\mathcal{F}_t$  é obtida integrando-se a esperança de  $r_t|\mathcal{F}_s$ , ou seja,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\xi|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\int_t^T r(u)du|\mathcal{F}_t\right) = \int_t^T \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(r(u)|\mathcal{F}_t)du = \int_t^T (r_t e^{-\alpha(u-t)} + \theta(1 - e^{-\alpha(u-t)}))du,$$

cuj solução (3.7) é obtida sem maiores dificuldades.

Para determinarmos a variância condicional de  $\xi$  em relação a  $\mathcal{F}_t$ , usamos a propriedade  $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2$ . Logo,

$$\begin{aligned} \text{Var}_{\mathbb{Q}}(\xi|\mathcal{F}_t) &= \text{Var}_{\mathbb{Q}}\left(\int_t^T r(u)du|\mathcal{F}_t\right) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\int_t^T \sigma \int_t^u e^{\alpha(v-u)} dW_v^{\mathbb{Q}} du|\mathcal{F}_t\right]^2 = \\ &= \sigma^2 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\left(\int_t^T \int_v^T e^{\alpha(v-u)} dudW_u^{\mathbb{Q}}\right)^2|\mathcal{F}_t\right]. \end{aligned}$$

Pela isometria de Itô,

$$\text{Var}_{\mathbb{Q}}(\xi|\mathcal{F}_t) = \sigma^2 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\int_t^T \left(\int_v^T e^{\alpha(v-u)} du\right)^2 dv|\mathcal{F}_t\right] = \sigma^2 \int_t^T \left(\int_v^T e^{\alpha(v-u)} du\right)^2 dv.$$

Uma vez feita a integração dupla, chegamos ao resultado (3.8).

Utilizando o lema 3.1.1 e após algumas manipulações algébricas, obtemos a fórmula do preço do título zero cupom, livre de arbitragem:

$$B(t, T) = m(t, T)e^{-n(t, T)r_t},$$

onde

$$\begin{aligned} m(t, T) &= \exp\left[\left(\theta - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}\right)(n(t, T) - T + t) - \frac{\sigma^2}{4\alpha}n(t, T)^2\right], \\ n(t, T) &= \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha(T-t)}). \end{aligned}$$

Tomando-se o limite da taxa de juros zero cupom quando  $T$  tende a infinito, obtemos a taxa de juros

$$Y_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} B(t, T)^{-1} = \theta - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2},$$

para a qual a estrutura a termo das taxas de juros converge (vide figura 3.2 na página 37).

### 3.1.3 Cox-Ingersoll-Ross (1985)

O modelo de Cox, Ingersoll e Ross (CIR) manteve a característica de reversão à média, mas introduziu a raiz quadrada da taxa de curto prazo no termo da volatilidade para coibir taxas negativas. Na medida de probabilidade real  $\mathbb{P}$ , a taxa de curto prazo segue o processo

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t, \quad (3.9)$$

onde a taxa inicial  $r_0$ , a velocidade de reversão à média  $a$ , a média de longo prazo  $b$  e o parâmetro de difusão  $\sigma$  são constantes positivas. Quando a taxa de juros de curto prazo atinge zero, o mesmo ocorre com a volatilidade, fazendo com que a tendência convirja para  $\alpha\theta$  que é sempre positivo. Assim, a taxa de juros passa a ser positiva novamente. Para garantir que as taxas nunca atinjam zero, devemos impor a condição de que  $2ab > \sigma^2$ .

Ao contrário do modelo de Vasicek, em que a volatilidade é determinística por depender apenas do parâmetro de difusão constante, no modelo CIR a volatilidade do título zero cupom é estocástica, pois depende do nível da taxa de juros. Essa característica condiz com alguns fatos estilizados do mercado, de que a volatilidade é maior em períodos em que as taxas de juros são mais altas. De fato, o trabalho de Chan et al. (1992) estima o modelo genérico  $dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma r_t^\gamma dW_t$  pelo método dos momentos generalizados (GMM) e conclui que o fator  $\gamma$  é diferente de zero.

Para a conversão para uma medida de probabilidade risco-neutro  $\mathbb{Q}$ , vamos utilizar um preço de mercado do risco de forma a obtermos o mesmo processo de (3.9). Por isso, utilizamos um formato de  $\lambda$  (por exemplo em Brigo e Mercurio (2001))

$$\lambda_t = \frac{\lambda\sqrt{r_t}}{\sigma}. \quad (3.10)$$

Pelo teorema de Girsanov (2.15), aplicado ao processo (3.9), obtemos a seguinte expressão com respeito a uma medida  $\mathbb{Q}$ :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}(\lambda_t dt + dW_t^{\mathbb{Q}}).$$

Substituindo (3.10) nesta última expressão, obtemos

$$dr_t = (a - \lambda)\left(\frac{ab}{a - \lambda} - r_t\right)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t^{\mathbb{Q}},$$

que pode ser reescrita nomeando-se  $\alpha = a - \lambda$  e  $\theta = ab/(a - \lambda)$ . Assim, o processo da taxa de curto prazo em uma medida martingale equivalente  $\mathbb{Q}$  é descrito por

$$dr_t = \alpha(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t^{\mathbb{Q}}, \quad (3.11)$$

onde  $r_0$ ,  $\alpha$ ,  $\theta$  e  $\sigma$  são constantes positivas.

Conforme Cox et al. (1985), o processo de  $r_t$  condicional a  $\mathcal{F}_s$ ,  $s < t$ , segue uma distribuição Qui-quadrada  $\chi^2(2cr_t; 2q + 2; 2u)$ , com  $2q + 2$  graus de liberdade e parâmetro de não centralidade  $2u$ . Isto é,

$$(r_t | \mathcal{F}_s) \sim \chi^2(2cr_t; 2q + 2; 2u),$$

$$c = \frac{2\alpha}{\sigma^2(1 - e^{-\alpha(t-s)}),}$$

$$u = cr_s e^{-\alpha(t-s)},$$

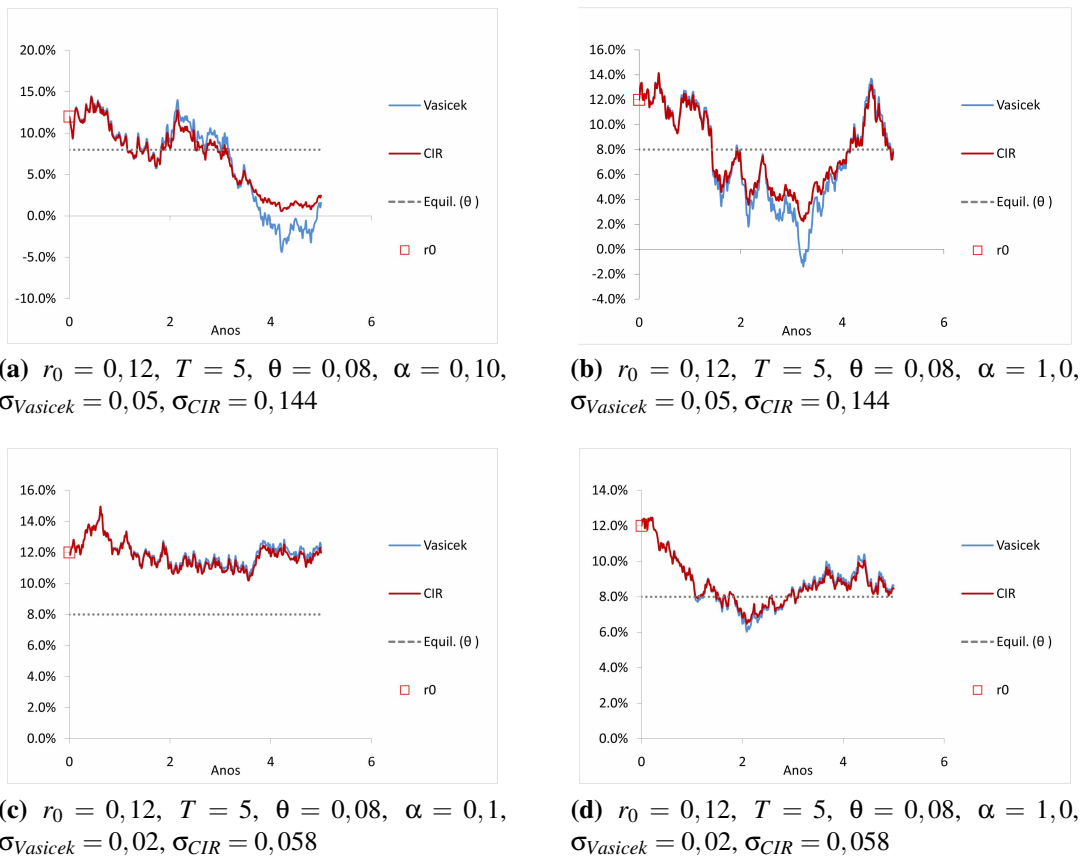
$$q = \frac{2\alpha\theta}{\sigma^2} - 1.$$

A média e a variância de  $r_t$  condicional a  $\mathcal{F}_s$  são

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(r_t | \mathcal{F}_s) = r_s e^{-\alpha(t-s)} + \theta(1 - e^{-\alpha(t-s)}),$$

$$\text{Var}_{\mathbb{Q}}(r_t | \mathcal{F}_s) = r_s \frac{\sigma^2}{\alpha} (e^{-\alpha(t-s)} - e^{-2\alpha(t-s)}) + \theta \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-\alpha(t-s)})^2.$$

A figura 3.1 ilustra o processo com reversão à média, tanto no modelo de Vasicek como CIR. Os modelos diferem quanto à função da volatilidade, por isso os parâmetros de difusão foram escolhidos de tal forma que as volatilidades nos dois modelos sejam equiparáveis em  $r_t = \theta$ , ou seja,  $\sigma_{CIR} \approx \sigma_{Vasicek} / \sqrt{\theta}$ . Mantemos a mesma taxa de juros inicial (12% a.a.), prazo (5 anos) e média de longo prazo (8% a.a.) nas quatro simulações, variando a velocidade de reversão à média e volatilidade. Os dois gráficos de cima têm volatilidades iguais a 5% a.a. para Vasicek e 14,4% a.a. para CIR e notamos que a amplitude do distanciamento em relação ao equilíbrio é maior do que nos dois gráfico de baixo, de volatilidades iguais a 2% a.a. no Vasicek e 5,77% a.a. no CIR. Observamos também a ocorrência de taxas de juros negativas no processo de Vasicek, sendo essa probabilidade maior quando a volatilidade é maior. O mesmo já não ocorre no CIR. Os gráficos da direita têm velocidade de reversão à média maiores, o que faz com que as taxas tendam a oscilar ao redor da média de longo prazo, tendo o efeito de reduzir a variância incondicional das taxas futuras.



**Figura 3.1:** Exemplos de possíveis trajetórias da taxa de curto prazo nos modelos de Vasicek e CIR

### Preço do título zero cupom

Vamos utilizar a transformada de Laplace para demonstrar a fórmula do preço de um título zero cupom. Originalmente Cox, Ingersoll e Ross derivaram o modelo através da maximização da função utilidade, sendo portanto considerado um modelo fundamentalmente de equilíbrio geral.

A transformada de Laplace é usada para resolver equações diferenciais em várias áreas do conhecimento. Em teoria de probabilidade, pode ser definida como uma esperança. Seja  $Y$  uma variável aleatória com função densidade de probabilidade (fdp)  $f$ , então a transformada de Laplace de  $f$  será

$$\mathcal{L}(f(a)) = \mathbb{E}(e^{-aY}).$$

Para um processo CIR, descrito por (3.11), sabe-se que a distribuição conjunta de  $(r_T, \int_t^T r_u du)$ , dado  $r_t$ , pode ser caracterizado pela transformada de Laplace (vide por exemplo Lambertson e Lapeyre (1995))

$$\mathcal{L}(f(\lambda, \mu)) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \exp \left( -\lambda r_T - \mu \int_t^T r_u du \mid r_t \right) \right] = e^{m(t,T) - n(t,T)r_t} \quad (3.12)$$

onde

$$m(t, T) = \frac{2\alpha\theta}{\sigma^2} \ln \left[ \frac{2he^{(h+\alpha)(T-t)/2}}{(\sigma^2\lambda + h + \alpha)(e^{h(T-t)} - 1) + 2h} \right], \quad (3.13)$$

$$n(t, T) = \frac{\lambda(2h + (h - \alpha)(e^{h(T-t)} - 1)) + 2\mu(e^{h(T-t)} - 1)}{(\sigma^2\lambda + h + \alpha)(e^{h(T-t)} - 1) + 2h}, \quad (3.14)$$

$$h = \sqrt{\alpha^2 + 2\sigma^2\mu}.$$

Sabemos que o preço do título é dado pela esperança (2.13). Portanto, estamos apenas interessados em  $\int_t^T r_u du$ . Fazendo  $\lambda = 0$  e  $\mu = 1$  nas fórmulas (3.13) e (3.14), obtemos a fórmula do preço do título.

$$B(t, T) = e^{m(t, T) - n(t, T)r_t}, \quad (3.15)$$

onde

$$m(t, T) = \frac{2\alpha\theta}{\sigma^2} \ln \left[ \frac{2he^{(\alpha+h)(T-t)/2}}{2h + (\alpha + h)(e^{(T-t)h} - 1)} \right],$$

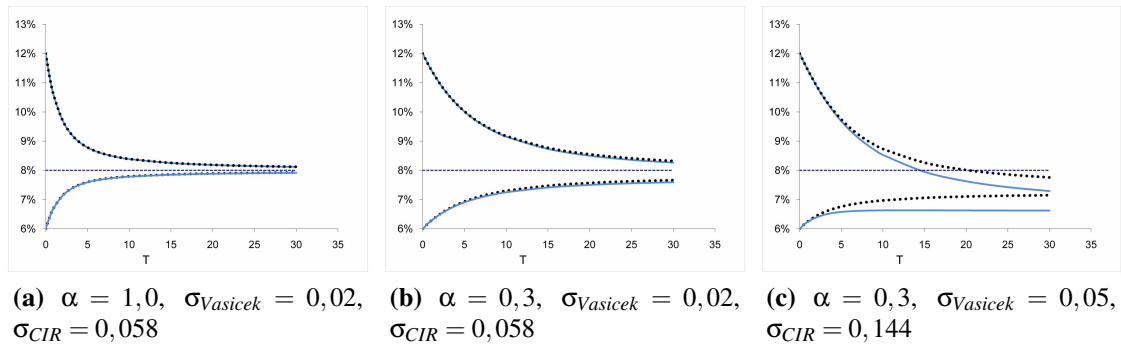
$$n(t, T) = \frac{2(e^{(T-t)h} - 1)}{2h + (\alpha + h)(e^{(T-t)h} - 1)},$$

$$h = \sqrt{\alpha^2 + 2\sigma^2}.$$

Tomando-se o limite de  $Y(t, T)$  quando  $T$  tende a infinito, obtemos

$$Y_\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} B(t, T)^{-1} = \frac{2\alpha\theta}{\alpha + \gamma}.$$

A figura 3.2 ilustra alguns formatos da ETTJ gerada pelos modelos de Vasicek e CIR. Observamos que o parâmetro  $\alpha$  influi na velocidade com que a curva converge para  $Y_\infty$ . Uma volatilidade mais baixa significa taxas de juros menores e conseqüentemente preços de títulos maiores. Pelos gráficos também fica clara a limitação dos tipos de curvas que os modelos podem gerar, bem como a questão da endogeneidade anteriormente discutida.



**Figura 3.2:** Possíveis estruturas a termo das taxas de juros nos modelos de Vasicek e CIR(linha tracejada):  $\theta = 0,08$ ,  $r_0 = 0,06$  e  $0,12$

## 3.2 Apreçamento de opções do IDI

Existe uma vasta literatura a respeito de derivativos de taxas de juros, dando prioridade às opções de *swaps*, opções de títulos, *caps*<sup>2</sup> e *floors*<sup>3</sup>. Devido ao seu formato particular, a opção do IDI pode ser enquadrada em trabalhos a respeito de opções asiáticas, um tipo exótico que depende da trajetória do ativo objeto. Da mesma forma, o IDI depende da trajetória das taxas diárias do CDI, podendo então ser denominada uma opção asiática (do tipo geométrico).

Existem alguns trabalhos dedicados ao apreçamento das opções do IDI. Vieira e Pereira (2000) foram os primeiros a obter uma fórmula fechada, a partir do modelo de Vasicek (1977), seguidos por Fajardo e Ornelas (2003) utilizando-se o modelo de Cox, Ingersoll e Ross (1985) e por Junior et al., que usaram o modelo de Hull-White. Barbedo et al. (2009) implementaram o modelo de Heath, Jarrow e Morton (1992) de três fatores para as opções de IDI.

### 3.2.1 Opção do IDI

O IDI (índice de taxa média de depósitos interfinanceiros de um dia) atualiza-se conforme a fórmula

$$IDI_t = 100.000 \prod_{i=0}^{t-1} (1 + CDI_i)^{1/252}, \quad t = 1, 2, 3, \dots$$

onde o  $CDI_i$  é a taxa diária do CDI, anualizada na base 252. O contador  $i$  assume valor nulo sempre que o índice é fixado com valor teórico de 100.000 pela BM&F, o que acontece de tempos em tempos.

A opção de IDI negociada na BM&F é européia e tem vencimentos no primeiro dia útil dos três primeiros meses subsequentes e demais prazos são estipulados conforme necessidade

<sup>2</sup>No *cap*, a empresa contratante da dívida paga um prêmio para limitar a flutuação da taxa de juros a um teto, ou seja, ela desfruta das quedas de juros mas fica protegida das altas de juros que excederem a taxa máxima fixada

<sup>3</sup>O *floor* é o oposto do *cap*, pois oferece proteção contra baixas nas taxas de juros e seu prêmio é pago por investidores que queiram estabelecer um patamar mínimo de rentabilidade

dos participantes do mercado. Na data de vencimento  $T$ , o *payoff* da opção de compra do IDI será

$$C_T = \max(0, IDI_T - K) = (IDI_T - K)^+,$$

onde  $K$  é o preço de exercício. A conversão para valores monetários é obtida pela multiplicação de  $C_t$  por um fator que equivale ao valor em Reais de cada ponto, estabelecido pela BM&F. Atualmente cada ponto equivale a um Real.

### 3.2.2 Paridade *call-put*

As fórmulas que apresentaremos no restante do capítulo referem-se a opções de compra (*call*). Os preços de opções de venda (*put*) podem ser facilmente obtidos pela paridade *call-put*:

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-R(T-t)} \quad (3.16)$$

onde  $C_t$  e  $P_t$  são respectivamente os preços da *call* e da *put*,  $S_t$  é o preço do ativo objeto,  $K$  é o preço de exercício,  $T$  é o vencimento da opção e  $R$  é a taxa livre de risco válida para o período  $[t, T]$ . A equação (3.16) é consequência imediata da seguinte relação, válida no vencimento da opção para que não haja arbitragem:

$$C_T - P_T = (S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ = S_T - K$$

Usando-se a notação para o nosso caso específico do IDI, no contexto de taxas de juros estocásticas, a paridade *call-put* fica

$$C_t - P_t = IDI_t - KB(t, T),$$

onde  $IDI_t$  é o valor do índice em  $t$  e  $B(t, T)$  é o preço em  $t$  do título zero cupom de vencimento em  $T$ .

A seguir, fixaremos um título zero cupom  $B(t, T) : 0 \leq t \leq T$ , onde  $T > 0$  será fixo.

### 3.2.3 Opção do IDI pelo modelo de Vasicek

A fórmula do preço da opção do IDI pelo modelo de Vasicek foi obtida por Vieira e Pereira (2000).

A opção de compra valerá no vencimento em  $T$

$$C_T = (IDI_T - K)^+.$$

Pela fórmula (2.14), na ausência de arbitragem o preço da call em  $t \in [0, T]$  é dado por

$$C_t = B_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(C_T B_T^{-1} | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(e^{\int_0^t r_u du} (IDI_T - K)^+ e^{-\int_0^T r_u du} | \mathcal{F}_t\right), \quad (3.17)$$

onde  $\mathbb{Q}$  é uma medida martingale equivalente.

Mas podemos, em tempo contínuo, definir o IDI como sendo

$$IDI_t = IDI_0 e^{\int_0^t r(u) du}. \quad (3.18)$$

Assim, substituindo (3.18) em (3.17), obtemos a esperança a ser solucionada

$$C_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\left(IDI_t - K e^{-\int_t^T r(u) du}\right)^+ | \mathcal{F}_t\right). \quad (3.19)$$

Agora considere

$$Y(t, T) = \int_t^T r(u) du = \ln(B_{t, T}) \quad (3.20)$$

Uma vez sabida a função densidade de probabilidade  $f_Y$  da variável aleatória  $Y(t, T) | \mathcal{F}_t$ , que pode ser facilmente obtida para o modelo de Vasicek, a solução da esperança (3.19) é a integral

$$C_t = \int_{-\infty}^{\infty} (IDI_t - K e^{-y})^+ f_Y(y) dy \quad (3.21)$$

Recordemos que a dinâmica da taxa de curto prazo é dada pela equação diferencial estocástica

$$dr_t = \alpha(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}}.$$

Conforme visto anteriormente,  $Y(t, T) | \mathcal{F}_t$  segue distribuição Gaussiana, cuja média e variância são dadas pelas fórmulas (3.7) e (3.8) respectivamente.

$$\mu_Y = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\int_t^T r(u) du | \mathcal{F}_t\right) = \theta(T - t) + \alpha^{-1}(r_t - \theta)(1 - e^{-\alpha(T-t)})$$

$$\sigma_Y^2 = \text{Var}_{\mathbb{Q}}\left(\int_t^T r(u) du | \mathcal{F}_t\right) = \frac{\sigma^2}{2\alpha^3} (4e^{-\alpha(T-t)} - e^{-2\alpha(T-t)} + 2\alpha(T-t) - 3)$$

Como  $Y(t, T) | \mathcal{F}_t$  segue uma distribuição normal  $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ , pela definição (3.20),  $B_{t, T}^{-1} | \mathcal{F}_t$  segue uma lognormal  $(-\mu_Y, \sigma_Y^2)$ .

Logo, pelo lema 3.1.1, temos que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_{t,T}^{-1}|\mathcal{F}_t) = e^{-\mu_Y + \frac{\sigma_Y^2}{2}}. \quad (3.22)$$

Sabemos também que o preço do título zero cupom de vencimento em  $T$  é dado por (2.13), ou seja,

$$B(t, T) = B_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1}|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_{t,T}^{-1}|\mathcal{F}_t). \quad (3.23)$$

Portanto, substituindo (3.23) em (3.22), é possível obter a esperança condicional  $\mu_Y$  em termos de  $B(t, T)$ , que chamaremos de  $\mu_Y^*$ :

$$\mu_Y^* = \frac{1}{2}\sigma_Y^2 - \ln B(t, T)$$

$$Y(t, T)|\mathcal{F}_t \sim N\left(\frac{1}{2}\sigma_Y^2 - \ln B(t, T), \sigma_Y^2\right)$$

Por fim, ao resolvermos a integral (3.21), ou seja,

$$C_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(IDI_t - Ke^{-y})^+|\mathcal{F}_t] = \int_{-\infty}^{\infty} (IDI_t - Ke^{-y})^+ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y}} \exp\left(-\frac{(y - \mu_Y^*)^2}{2\sigma_Y^2}\right) dy =$$

$$\int_{\ln(\frac{K}{IDI_t})}^{\infty} (IDI_t - Ke^{-y}) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y}} \exp\left(-\frac{(y - \mu_Y^*)^2}{2\sigma_Y^2}\right) dy$$

obtemos a fórmula do preço da opção de compra do IDI:

$$C_t = IDI_t N(h) - KB(t, T) N(h - \sigma_Y^2), \quad (3.24)$$

onde  $N(\cdot)$  denota a distribuição normal acumulada e

$$h = \frac{\ln(IDI_t / (KB(t, T))) + \sigma_Y^2 / 2}{\sigma_Y},$$

$$\sigma_Y^2 = \frac{\sigma^2(4e^{-\alpha(T-t)} - e^{-2\alpha(T-t)} + 2\alpha(T-t) - 3)}{2\alpha^3}.$$

É interessante notar que, no modelo de Vasicek, a fórmula do preço de opção do IDI não depende do parâmetro da taxa média de longo prazo. Isso também se observa no modelo de Hull-White (Vasicek estendido), pois a única diferença no processo de difusão dos dois modelos é justamente o parâmetro da média. Portanto, embora o modelo de Hull-White seja mais robusto por não apresentar o problema de endogeneidade, para a opção do IDI é indiferente a utilização de um ou outro modelo.

### 3.2.4 Opção do IDI pelo modelo de CIR

Como já foi mencionado anteriormente, a opção do IDI é um tipo de asiática, que não é facilmente apreçada. Para o caso da opção do IDI, o artigo de Fajardo e Ornelas (2003) propõe uma fórmula fechada a partir da distribuição condicional de  $\int_t^T r_u du | \mathcal{F}_t$ , obtida como sendo uma soma de distribuições qui-quadradas. Conforme Vicente (2006), o desenvolvimento da fórmula utiliza uma hipótese muito forte de independência entre as taxas de curto prazo. Por isso, eles empregam em seu trabalho o método da transformada inversa de Laplace com o propósito de extrair informações de volatilidade de taxas de juros em opções do IDI, adotando o modelo CIR multifatorial.

#### Transformada de Laplace

Este método foi empregado por Geman e Yor (1992) para apreçar opções asiáticas de ações, no contexto de Black e Scholes. Seguindo a mesma linha, Leblanc e Scaillet (1998) obtiveram preços de algumas opções exóticas de taxas de juros em modelos afins.

Recordemos que, para uma variável aleatória  $Y$  com fdp  $f$ , a transformada de Laplace de  $f$  é

$$\mathcal{L}(f(a)) = \mathbb{E}(e^{-aY}).$$

Façamos  $Y = Y(t, T) = \int_t^T r_u du$ . Recordemos que o preço da *call* do IDI é dado pela esperança (3.19), cuja solução requer a função densidade de probabilidade de  $Y(t, T) | \mathcal{F}_t$ . Logo, pela definição acima, tal fdp pode ser obtida pela transformada inversa de Laplace.

Notemos também que o termo da direita da definição da transformada de Laplace acima se assemelha à fórmula do preço do título zero cupom (2.13). Segundo Leblanc e Scaillet (1998),

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{-aY(t, T)} | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(e^{-\int_t^T r'_u du} | \mathcal{F}_t\right) = B'(t, T)$$

onde  $r'_t$  segue pelo modelo CIR o processo

$$dr'_t = \alpha(\theta' - r'_t)dt + \sigma' \sqrt{r'_t} dW_t,$$

com  $\theta' = a\theta$  e  $\sigma' = \sqrt{a}\sigma$ .

Utilizando a fórmula (3.15), obtemos o preço de  $B'(t, T)$  e conseqüentemente a transformada de Laplace a ser invertida. Ou seja,

$$\mathcal{L}(Y | \mathcal{F}_t)(a) = B'(t, T) = \left( \frac{2he^{(\alpha+h)(T-t)/2}}{2h + (\alpha+h)(e^{(T-t)h} - 1)} \right)^{2\alpha\theta/\sigma^2} \exp\left( \frac{2(e^{(T-t)h} - 1)}{2h + (\alpha+h)(e^{(T-t)h} - 1)} r_t \right),$$

onde  $h = \sqrt{\alpha^2 + 2a\sigma^2}$ .

Uma vez feita a inversão, é ainda necessário integrar numericamente a expressão (3.21), resultando no preço da opção de compra. A inversão da transformada de Laplace é feita numericamente e existem alguns algoritmos desenvolvidos com essa finalidade. Testamos com o método de Hoog et al. (1982), que é conhecido como um dos mais eficientes algoritmos segundo Ahn et al. (2003). Contudo, não conseguimos obter resultados consistentes no nosso estudo. De fato, Bellman et al. (1966) citam que a inversão da transformada de Laplace é instável. Conforme Fu et al. (1999), a inversão encontra problemas numéricos para baixas volatilidades e prazos curtos. É possível testar outros métodos numéricos, tais como Stehfest (1970) e Abate e Whitt (1995), contudo foge do escopo deste trabalho.

### Árvore binomial

Adotamos a solução em árvore, que é uma aproximação numérica da abordagem risco neutro. Sua maior vantagem é o potencial de apreçar qualquer derivativo, inclusive os mais exóticos, para os quais é difícil ou impossível obter uma fórmula analítica. A maior desvantagem é o esforço computacional necessário para garantir a convergência.

Definiremos inicialmente uma árvore binomial recombinante para um processo de taxas de juros Gaussiano, que será utilizado para obtenção da árvore binomial do modelo CIR pelo método proposto por Nelson e Ramaswamy (1990).

Suponha que a taxa de juros siga o processo Gaussiano (3.3)

$$dr_t = \mu(r,t)dt + \sigma dW_t^Q.$$

Na árvore binomial recombinante, para um dado intervalo  $\Delta t$ , a taxa sobe ou desce  $\Delta r = \sigma\sqrt{\Delta t}$ , com probabilidade  $p_u$  e  $p_d = 1 - p_u$  respectivamente. Para garantir que a árvore obedeça a equação (3.3), devemos ter

$$p_u + p_d = 1$$

$$p_u \Delta r_t + p_d (-\Delta r_t) = \mu(r,t) \Delta t$$

A solução do sistema de equações é

$$p_u = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\mu(r,t)}{\sigma} \sqrt{\Delta t} \quad (3.25)$$

$$p_d = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\mu(r,t)}{\sigma} \sqrt{\Delta t}$$

A árvore binomial do modelo CIR não é recombinante, devido à volatilidade não ser constante. Isto significa que, para uma árvore de  $n$  passos, teríamos no final  $2^n$  valores de  $r$  ao invés de  $n + 1$ , o que representa um enorme esforço computacional. A solução de Nelson e Ramaswamy (1990) consiste em construir uma árvore binomial recombinante para uma transformação  $X_t$  da taxa de juros. Tal transformação é um processo gaussiano de volatilidade constante como o definido acima.

Seja um processo estocástico genérico que engloba o modelo CIR descrito por

$$dr_t = \mu(r,t)dt + \sigma(r,t)dW_t^Q. \quad (3.26)$$

Queremos utilizar a variável  $X_t = f(r_t, t)$ . Pela fórmula de Itô (utilizando abuso de notação),

$$dX_t = \frac{\partial X_t}{\partial r_t} dr_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 X_t}{\partial r_t^2} (dr_t)^2 + \frac{\partial X_t}{\partial t} dt. \quad (3.27)$$

Substituindo (3.26) em (3.27), temos

$$dX_t = \mu(X,t)dt + \sigma(X,t)dW_t^Q,$$

onde

$$\mu(X,t) = \frac{\partial X_t}{\partial r_t} \mu(r,t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 X_t}{\partial r_t^2} (\sigma(r,t))^2 + \frac{\partial X_t}{\partial t} dt,$$

$$\sigma(X,t) = \frac{\partial X_t}{\partial r_t} \sigma(r,t).$$

Para que a volatilidade seja constante, Nelson e Ramaswamy adotam  $\sigma(X,t) = 1$ . Logo,

$$\frac{\partial X_t}{\partial r_t} = \frac{1}{\sigma(r,t)},$$

que para o caso específico do CIR resulta em

$$X_t = \int \frac{1}{\sigma \sqrt{u}} du = \frac{2\sqrt{r_t}}{\sigma}, \quad (3.28)$$

Uma vez obtido o valor de  $X_t$  pela árvore,  $r_t$  é obtido pela equação (3.28), ou seja,

$$r_t = \frac{X_t^2 \sigma^2}{4}. \quad (3.29)$$

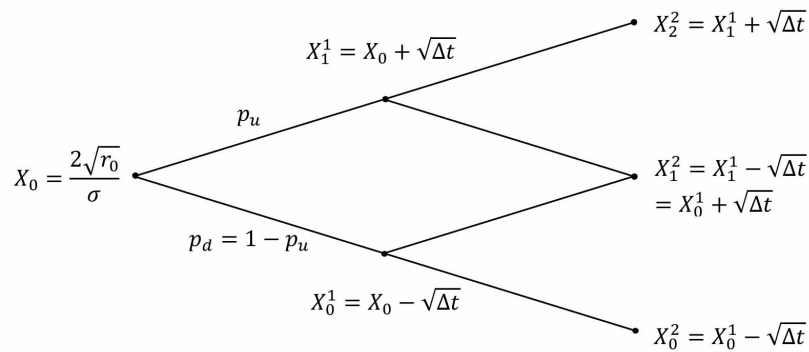
Aplicando a fórmula de Itô em (3.29) e usando (3.28), temos

$$dX_t = \mu(X,t)dt + dW_t^Q,$$

$$\mu(X, t) = \frac{1}{X_t} \left[ \frac{1}{2} \alpha \left( \frac{4\theta}{\sigma^2} - X_t^2 \right) - \frac{1}{2} \right]. \quad (3.30)$$

Usando (3.30), as probabilidades  $p_u$  e  $p_d$  podem ser obtidas por (3.25).

A figura 3.3 ilustra os primeiros nós da árvore CIR. No instante inicial,  $X_0 = 2\sqrt{r_0}/\sigma$ . No passo seguinte,  $X_u = X_0 + \sqrt{\Delta t}$  e  $X_d = X_0 - \sqrt{\Delta t}$ . Observamos pela fórmula (3.30) que  $\mu(X, t)$  explode quando  $X_t$  se aproxima de zero, fazendo com que as probabilidades também explodam. Isto pode ser um problema quando as taxas de juros são baixas, exigindo alguns ajustes. No entanto, as taxas de juros no Brasil são suficientemente altas para que  $X_t$  não se aproxime de zero com probabilidade significativa. De fato, no nosso estudo não encontramos nós em que  $X_t \leq 0$ , ou seja,  $r_t$  mostrou-se sempre bem definido.



**Figura 3.3:** Árvore binomial de  $X_t = f(r_t, t)$

## Capítulo 4

### Convexidade do percentual do CDI

Considere um ativo indexado ao percentual  $\rho$  do CDI. Diferentemente do ativo zero cupom, convencionaremos que esse ativo tem valor principal 1 no lançamento. Recordemos que, no vencimento em  $T$ , seu valor é dado pela fórmula (1.1), ou seja,

$$P^M(T, T, \rho) = CDI_T^A = \prod_{i=0}^T [((1 + CDI_i)^{(1/252)} - 1)\rho + 1]$$

e que os praticantes do mercado em geral precificam este ativo em  $t < T$  conforme (1.2), ou seja,

$$P^M(t, T, \rho) = \prod_{i=0}^t [((1 + CDI_i)^{(1/252)} - 1)\rho + 1] \frac{[((1 + DI)^{(1/252)} - 1)\rho + 1]^{T-t}}{(1 + DI)^{(T-t)/252}},$$

onde  $CDI_i$  é a taxa diária do CDI anualizado e  $DI$  é a taxa do DI futuro de vencimento igual ao ativo. Aqui, a esperança do CDI ainda não realizado é aproximada pelo DI futuro. É fácil perceber que, caso o  $CDI_i = DI$  seja constante para o prazo  $[t, T]$ , a fórmula gerará o mesmo resultado que (1.1) no vencimento da operação.

Ao aproximarmos o  $CDI$  pela taxa de curto prazo  $r$ , (1.1) fica

$$P^M(T, T, \rho) = e^{\rho \int_0^T r_u du}$$

e o preço do título (1.2) em tempo contínuo é

$$P^M(t, T, \rho) = CDI_t^A e^{-(1-\rho)R(T-t)} = CDI_t^A e^{-\rho \int_t^T r_u du}, \quad (4.1)$$

onde  $R = \ln(1 + DI)$ .

No contexto de taxas de juros estocásticas, o preço do título deve obedecer a esperança (2.13). Logo,

$$P(t, T, \rho) = B_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left( e^{\rho \int_0^T r_u du} B_T^{-1} \mid \mathcal{F}_t \right) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left( e^{\rho \int_0^T r_u du} e^{-\int_t^T r_u du} \mid \mathcal{F}_t \right),$$

$$P(t, T, \rho) = CDI_t^A \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left( e^{-\int_t^T (1-\rho) r_u du} \mid \mathcal{F}_t \right). \quad (4.2)$$

A existência da esperança em (4.2) sugere que o apreçamento pela fórmula (1.2) é incorreta ((1.2) pode ser entendida simplesmente como o valor presente do *payoff* (1.1), ou seja, a fórmula é uma boa aproximação apenas para  $CDI_t$  determinísticos). Podemos ver isso também de outra forma. Um portfólio que contenha um título indexado a um percentual  $\rho$  do CDI maior que 1 mais seu *hedge* de delta fornece ao seu proprietário uma posição convexa sem custo nenhum.

Para demonstrar, vamos montar a carteira de delta nulo. Pela fórmula (4.1), o preço de um título indexado a um percentual  $\rho$  do CDI é  $P(t, T, \rho) = e^{-R(1-\rho)(T-t)}$  (ignorando o fator constante  $CDI_t^A$ ). O *hedge* deste ativo é um título zero cupom  $B(t, T) = e^{-R(T-t)}$ . Derivando os preços em relação a taxa de juros  $R$ , obtemos

$$\begin{aligned} \Delta_{P(t, T, \rho)} &= -(1-\rho)(T-t)e^{-R(1-\rho)(T-t)}, \\ \Delta_{B(t, T)} &= -(T-t)e^{-R(T-t)}. \end{aligned}$$

Seja  $Q$  a quantidade do título  $B(t, T)$  para zerar o delta de  $P(t, T, \rho)$ :

$$Q = -(1-\rho) \frac{e^{-R(1-\rho)(T-t)}}{e^{-R(T-t)}}$$

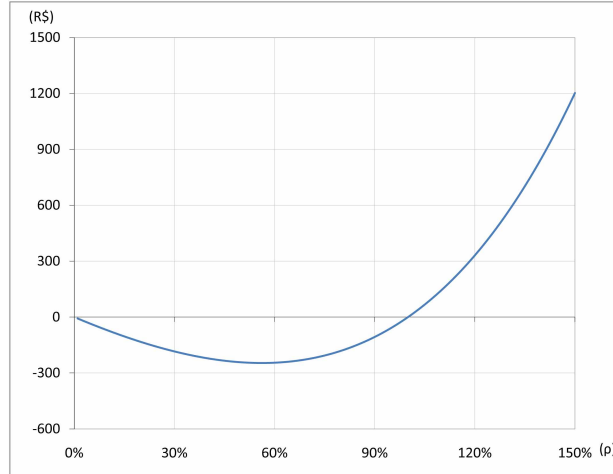
O custo de carregamento, também conhecido pela grega  $\Theta$ , é calculado pela derivada dos preços em relação ao prazo  $(T-t)$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \Theta_{P(t, T, \rho)} &= -(1-\rho)Re^{-R(1-\rho)(T-t)}, \\ \Theta_{B(t, T)} &= -Re^{-R(T-t)}. \end{aligned}$$

Obtemos que o  $\Theta$  do portfólio delta nulo é  $\Theta_{portfolio} = \Theta_{P(t, T, \rho)} + Q\Theta_{B(t, T)} = 0$ . Isso significa que a convexidade não é capturada por (1.2), ou seja, uma convexidade positiva resulta em ganhos certos sem qualquer custo, gerando oportunidades de arbitragem. Notamos também que (1.2) é basicamente o *payoff* (valor intrínseco) do título indexado a  $\rho$  trazido a valor presente, sem qualquer ajuste de volatilidade, o que não é natural por se tratar de um portfólio com convexidade não nula.

A figura 4.1 ilustra o comportamento da convexidade, ou seja, o ganho ou perda da carteira (ativo indexado ao percentual do CDI e seu *hedge* de delta) para uma pequena mudança da taxa de juros, em função de  $\rho$ .

Concluimos que ao preço de mercado (1.2) deve-se adicionar um prêmio pela convexidade. A seguir propomos uma fórmula para apreçar a convexidade nos modelos de Vasicek e Cox et al.



**Figura 4.1:** Resultado de convexidade (da carteira de delta nulo composto pelo ativo indexado ao percentual do CDI e futuro de DI) decorrente de um movimento instantâneo de 10 pontos básicos na taxa de juros, em função do percentual do CDI, para uma operação de R\$100 milhões, 5 anos e nível da taxa de juros de 10%a.a. Máxima convexidade negativa quando CDI é aproximadamente 50%.

#### 4.1 Apreçamento da convexidade pelo modelo de Vasicek

O preço de um título indexado a um percentual  $\rho$  do CDI é dado por (4.2). Os momentos da variável aleatória  $\left[ - (1 - \rho) \int_t^T r_u du | \mathcal{F}_t \right]$  são

$$\mathbb{E} \left( - (1 - \rho) \int_t^T r_u du | \mathcal{F}_t \right) = (1 - \rho) \mathbb{E} \left( - \int_t^T r_u du | \mathcal{F}_t \right)$$

$$\text{Var} \left( - (1 - \rho) \int_t^T r_u du | \mathcal{F}_t \right) = (1 - \rho)^2 \text{Var} \left( - \int_t^T r_u du | \mathcal{F}_t \right)$$

No modelo de Vasicek,  $\left( \int_t^T r_u du | \mathcal{F}_t \right)$  tem distribuição normal com média e variância dadas pelas fórmulas (3.7) e (3.8) respectivamente. Logo, pelo lema 3.1.1, obtemos o preço do título indexado ao percentual  $\rho$  do CDI no modelo Vasicek, ou seja,

$$P_{\text{Vasicek}}(t, T, \rho) = \text{CDI}_t^A e^{(1-\rho)\mathbb{E}\left(-\int_t^T r_u du | \mathcal{F}_t\right) + \frac{(1-\rho)^2}{2} \text{Var}\left(-\int_t^T r_u du | \mathcal{F}_t\right)}, \quad (4.3)$$

onde

$$\mathbb{E} \left( - \int_t^T r_u du | \mathcal{F}_t \right) = -\theta(T-t) - \alpha^{-1}(r_t - \theta)(1 - e^{-\alpha(T-t)}),$$

$$\text{Var} \left( - \int_t^T r_u du | \mathcal{F}_t \right) = \frac{\sigma^2}{2\alpha^3} (4e^{-\alpha(T-t)} - e^{-2\alpha(T-t)} + 2\alpha(T-t) - 3).$$

Portanto,

$$P_{\text{Vasicek}}(t, T, \rho) = \text{CDI}_t^A e^{-(1-\rho)[\theta(T-t) + (r_t - \theta)n(t, T)] - \frac{(1-\rho)^2 \sigma^2}{2\alpha^2} (n(t, T) - T + t + \frac{\alpha}{2} n^2(t, T))}, \quad (4.4)$$

onde

$$n(t, T) = \alpha^{-1}(1 - e^{-\alpha(T-t)}).$$

Usar diretamente a fórmula (4.4) implica ignorar o preço de mercado  $P^M(t, T, \rho)$ , o que dificulta sua aplicação. Queremos então isolar o efeito da convexidade em (4.4), encontrando o valor do prêmio a ser aplicado sobre o preço de mercado do título indexado ao CDI.

Seja  $R(t, T)$  a taxa de desconto zero cupom observável no mercado, conforme definido em (4.1). Por (2.11), o preço do título zero cupom do mercado é  $B^M(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}$ . Então, se o mercado segue o modelo de Vasicek,  $B^M(t, T)$  é a solução da fórmula de apreçamento do título zero cupom nesse modelo, ou seja,

$$B^M(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)} = e^{\mathbb{E}(-\int_t^T r_u du | \mathcal{F}_t) + \frac{1}{2} \text{Var}(-\int_t^T r_u du | \mathcal{F}_t)}, \quad (4.5)$$

onde  $\mathbb{E}(-\int_t^T r_u du | \mathcal{F}_t)$  e  $\text{Var}(-\int_t^T r_u du | \mathcal{F}_t)$  são dados por (3.7) e (3.8) respectivamente.

Sabemos que o título indexado a um percentual  $\rho$  do CDI é apreçado pelo mercado conforme (1.2), ou seja,  $P^M(t, T, \rho) = CDI_t^A e^{-(1-\rho)R(t, T)(T-t)}$ . Substituindo por (4.5), obtemos o preço de mercado do ativo indexado ao percentual do CDI pelo modelo de Vasicek, ou seja,

$$P_{Vasicek}^M(t, T, \rho) = CDI_t^A e^{(1-\rho)\mathbb{E}(-\int_t^T r_u du | \mathcal{F}_t) + \frac{(1-\rho)}{2} \text{Var}(-\int_t^T r_u du | \mathcal{F}_t)}. \quad (4.6)$$

Substituindo por (3.7) e (3.8), obtemos

$$P_{Vasicek}^M(t, T, \rho) = CDI_t^A e^{-(1-\rho)[\theta(T-t) + (r_t - \theta)n(t, T)] - \frac{(1-\rho)\sigma^2}{2\alpha^2}(n(t, T) - T + t + \frac{\alpha}{2}n^2(t, T))}.$$

Comparando-se (4.3) e (4.6) observamos que a única diferença entre as duas fórmulas é que no preço modelado  $P_{Vasicek}(t, T, \rho)$  existe um termo quadrático multiplicando a variância, o que explica a convexidade ignorada no preço de mercado (no contexto de Vasicek)  $P_{Vasicek}^M(t, T, \rho)$ . Dividindo um pelo outro obtemos o fator de ajuste  $f$  a ser multiplicado pelo preço de mercado  $P^M(t, T, \rho)$  para que este passe a incorporar também a convexidade. Ou seja,

$$f_{Vasicek} = \frac{P_{Vasicek}(t, T, \rho)}{P_{Vasicek}^M(t, T, \rho)},$$

$$f_{Vasicek} = \exp\left[\rho(1-\rho)\frac{\sigma^2}{2\alpha^2}(n(t, T) - T + t + \frac{\alpha}{2}n^2(t, T))\right], \quad (4.7)$$

$$n(t, T) = \alpha^{-1}(1 - e^{-\alpha(T-t)})$$

e o preço de mercado corrigido pela convexidade é

$$P_{ajustado}^M(t, T, \rho) = P^M(t, T, \rho) \cdot f_{Vasicek} \quad (4.8)$$

Chamamos de prêmio de convexidade  $p = f - 1$ .

Analisemos alguns casos especiais:

- Quando  $\rho = 1$ , temos que  $f = 1$  e concluímos que a fórmula de mercado é coerente. De fato, observamos por (1.2) que neste caso  $P^M(t, T, \rho) = CDI_t^A$ , ou seja, o título indexado a 100% do CDI é semelhante a uma LFT<sup>1</sup> pura e não incorremos nenhum risco. É fácil ver que neste caso não há risco de delta.
- Quando  $\rho = 0$ , temos o caso de uma LTN pura, ou seja, de um título zero cupom  $B(t, T)$ . Notamos em (1.2) que o preço do título nada mais é do que o valor fixo 1 no vencimento trazido a valor presente. Portanto, a fórmula não necessita de correção e o fator de ajuste também é igual a 1.
- Quando tomamos o limite do fator de ajuste  $f$  quando a velocidade de reversão à média  $\alpha$  tende a zero, obtemos

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} f = \exp\left(-\frac{\rho}{6}(1-\rho)\sigma^2(T-t)^3\right) \quad (4.9)$$

e notamos que o prêmio de convexidade aumenta com o prazo da operação e com  $|\rho - 1|$ ,  $\rho > 0$ .

- Se tomarmos o limite de  $f$  quando o coeficiente de difusão  $\sigma$  tende a zero, temos que  $\lim_{\sigma \rightarrow 0} f = 1$ . Como esperado, quando a volatilidade é nula temos um cenário determinístico onde não existe convexidade.

## 4.2 Apreçamento da convexidade pelo modelo de CIR

O apreçamento do título indexado ao percentual do CDI é dado por (4.2). Para solucioná-la vamos utilizar a expressão (3.12) obtida pela transformada de Laplace. Basta fazermos  $\lambda = 0$  e  $\mu = 1 - \rho$ .

$$P_{CIR}(t, T, \rho) = CDI_t^A \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-(1-\rho) \int_t^T r_u du | r_t} \right] = e^{m_{1-\rho}(t, T) - n_{1-\rho}(t, T) r_t}$$

onde

$$m_{1-\rho}(t, T, \rho) = \frac{2\alpha\theta}{\sigma^2} \ln \left[ \frac{2h^* e^{(h^* + \alpha)(T-t)/2}}{(h^* + \alpha)(e^{h^*(T-t)} - 1) + 2h^*} \right]$$

<sup>1</sup>Letras Financeiras do Tesouro (LFT) são títulos pós-fixados, remunerados pela taxa Selic, emitidos pelo governo federal

$$n_{1-\rho}(t, T, \rho) = \frac{2(1-\rho)(e^{h^*(T-t)} - 1)}{(h^* + \alpha)(e^{h^*(T-t)} - 1) + 2h^*}$$

$$h^*(\rho) = \sqrt{\alpha^2 + 2\sigma^2(1-\rho)}$$

Para que a fórmula esteja bem definida, o domínio de  $\rho$  é  $[0, \frac{\alpha^2}{2\sigma^2} + 1]$ .

De forma análoga ao que fizemos para o modelo de Vasicek, queremos obter o preço do prêmio de convexidade. Se o mercado segue o modelo de CIR, então o título zero cupom  $B^M(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}$  é a solução de

$$B(t, T) = e^{m_1(t, T) - n_1(t, T)r_t}, \quad (4.10)$$

onde  $m_1(t, T)$  e  $n_1(t, T)$  são definidos pelas fórmulas (3.13) e (3.14).

O título indexado a um percentual  $\rho$  do CDI é apreçado pelo mercado por

$$P^M(t, T, \rho) = CDI_t^A e^{-(1-\rho)R(t, T)(T-t)}$$

que, ao unir-se a fórmula (4.10), resulta em

$$P_{CIR}^M(t, T, \rho) = CDI_t^A e^{(1-\rho)(m_1(t, T) - n_1(t, T)r_t)}.$$

Assim, a expressão do fator de ajuste é

$$f_{CIR} = \frac{P_{CIR}(t, T, \rho)}{P_{CIR}^M(t, T, \rho)},$$

ou seja,

$$f_{CIR} = \exp\{a_1(t, T) - (1-\rho)a_2(t, T) - (1-\rho)r_t[b_1(t, T) - b_2(t, T)]\}, \quad (4.11)$$

onde

$$a_{1,2}(t, T, \rho) = \frac{2\alpha\theta}{\sigma^2} \ln \left[ \frac{2h_{1,2}e^{(\alpha+h_{1,2})(T-t)/2}}{2h_{1,2} + (\alpha + h_{1,2})(e^{(T-t)h_{1,2}} - 1)} \right],$$

$$b_{1,2}(t, T, \rho) = \frac{2(e^{(T-t)h_{1,2}} - 1)}{2h_{1,2} + (\alpha + h_{1,2})(e^{(T-t)h_{1,2}} - 1)},$$

$$h_1(\rho) = \sqrt{\alpha^2 + 2\sigma^2(1-\rho)},$$

$$h_2 = \sqrt{\alpha^2 + 2\sigma^2}.$$

O preço ajustado do título indexado ao CDI pelo modelo de CIR é

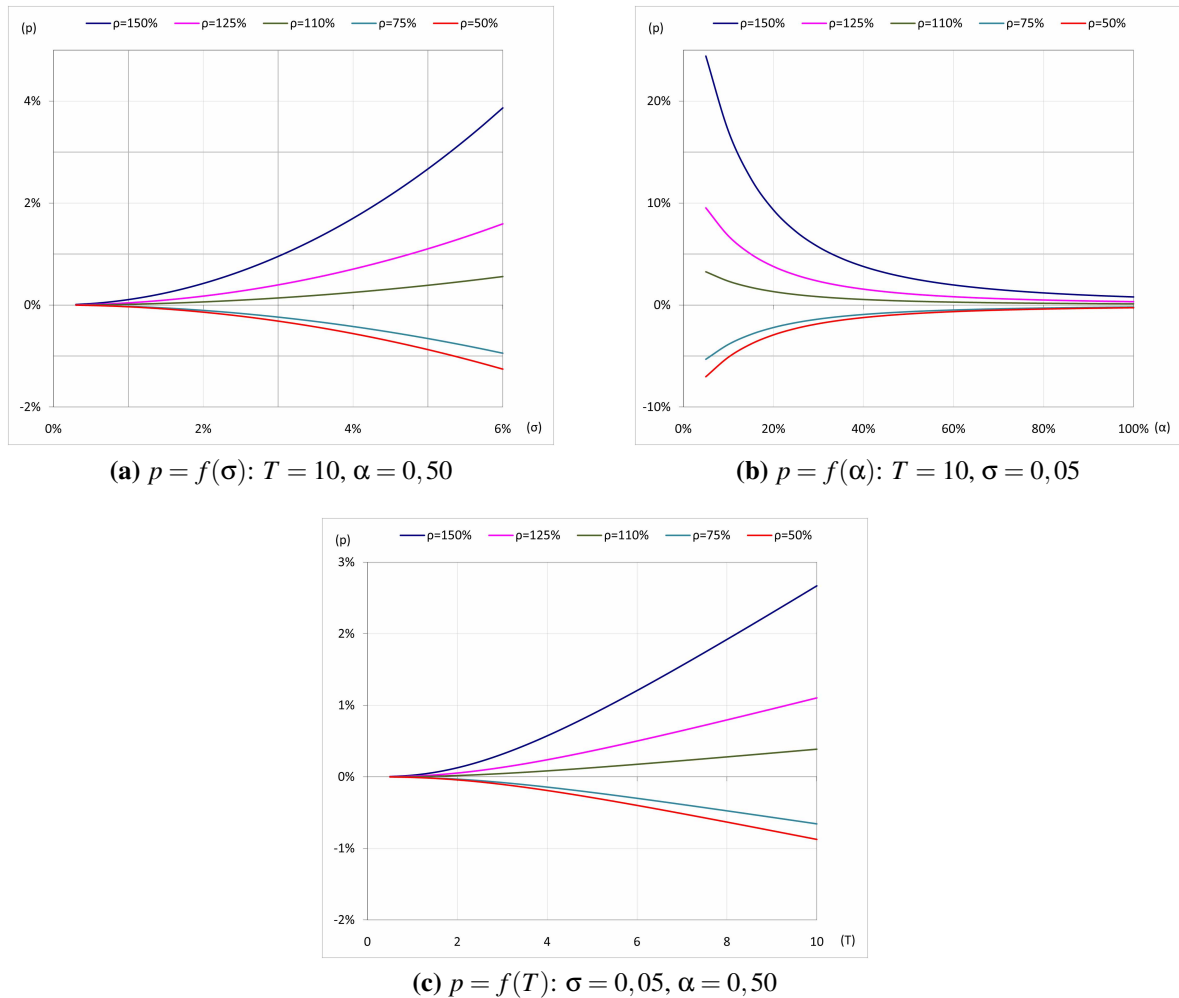
$$P_{ajustado}^M(t, T, \rho) = P^M(t, T, \rho) \cdot f_{CIR} \quad (4.12)$$

e o prêmio de convexidade é  $p = f - 1$ .

Quando  $\rho = 1$  obtemos pela fórmula (4.11) que  $f_{CIR} = 1$  e portanto não há necessidade de ajuste. Basta verificar que o termo dentro do logaritmo é 1.

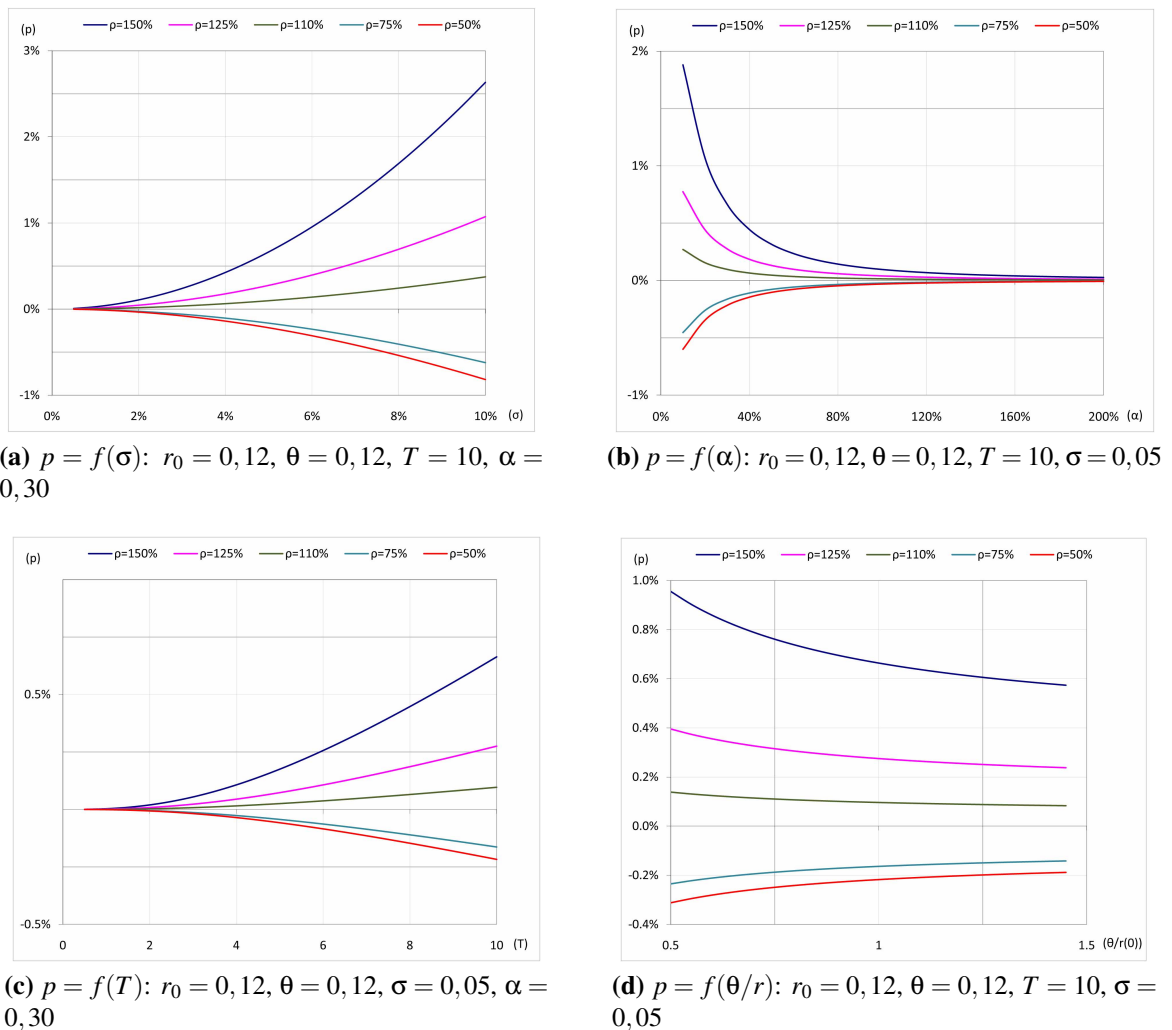
### 4.3 Análise de sensibilidade

As figuras 4.2 e 4.3 ilustram a sensibilidade do prêmio de convexidade aos parâmetros de volatilidade, velocidade de reversão à média, tempo e apenas para o caso do CIR, o nível das taxas de juros.



**Figura 4.2:** Sensibilidade de  $p$  em relação a  $\alpha$ ,  $\sigma$  e  $T$  no modelo de Vasicek para diferentes valores de  $\rho$

Notamos que os efeitos do prazo e da volatilidade são semelhantes, que são o de aumentar a convexidade. Pela fórmula (4.9) isso fica claro, pois vemos que  $\sigma$  está a uma potência de segunda ordem enquanto que o tempo a uma potência de terceira ordem, tendo efeito ainda mais acentuado. O aumento da velocidade de reversão à média, por outro lado, faz reduzir o módulo do prêmio na medida em que determina a convergência das taxas de juros para a taxa média, reduzindo assim a variância das taxas de juros. Observamos que o módulo do prêmio é máximo quando  $\alpha$  tende a zero e diminui à medida que  $\alpha$  aumenta, tendendo a zero. Pelo segundo gráfico fica claro que o efeito de  $\alpha$  é apenas o de reduzir a convexidade e jamais faz



**Figura 4.3:** Sensibilidade de  $p$  em relação a  $\alpha$ ,  $\sigma$ ,  $T$  e  $\theta/r_0$  no modelo de CIR para diferentes valores de  $\rho$

com que o prêmio explode, o que por outro lado podem causar valores de  $\sigma$  e  $T$  altos.

De fato, podemos verificar isso também pelas tabelas 4.1 e 4.2 nas páginas 53 e 54, que nos dão os valores dos prêmios de convexidade para diferentes cenários. Para operações muito curtas, de até um ano, a convexidade pode quase sempre ser ignorada. Pelas tabelas, observamos que em geral, para as características das operações comumente realizadas, os prêmios obtidos são pequenos, menores que 10 pontos básicos.

No entanto, vale ressaltar o cuidado que se deve ter em momentos de maior volatilidade, que pode aumentar o risco a ponto de torná-lo não desprezível. Merecem especial atenção as operações longas e de percentual muito distante do 100%, cuja convexidade é mais acentuada. Em tesouraria não é incomum encontrarmos essas características em *swaps*, que por serem considerados operações "*commodities*", são negociados com estreita margem de lucros. Assim, qualquer ponto básico de prêmio ignorado pode ser significativo, sendo necessário acabar com o mito de que operações indexadas ao percentual do CDI apresentam apenas riscos de delta.

**Tabela 4.1:** Prêmio de convexidade para alguns cenários pelo modelo de Vasicek

Valores de $p(\times 10^{-2})$ : $T = 3, \theta = 12\%, r_0 = 12\%$																								
$\rho, \sigma$		$\alpha = 10\%$						$\alpha = 50\%$						$\alpha = 80\%$						$\alpha = 130\%$				
		1,0%	2,0%	4,0%	8,0%	1,0%	2,0%	4,0%	8,0%	1,0%	2,0%	4,0%	8,0%	1,0%	2,0%	4,0%	8,0%	1,0%	2,0%	4,0%	8,0%			
0,25	-0,0001	-0,0003	-0,0011	-0,0043	0,0000	-0,0001	-0,0005	-0,0020	0,0000	-0,0001	-0,0001	-0,0003	-0,0013	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0002	-0,0014	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0002	-0,0007	
0,50	-0,0090	-0,0361	-0,1445	-0,5768	-0,0042	-0,0169	-0,0674	-0,2693	-0,0026	-0,0105	-0,0421	-0,1682	-0,0014	-0,0056	-0,0222	-0,0888								
0,75	-0,0068	-0,0271	-0,1084	-0,4329	-0,0032	-0,0126	-0,0506	-0,2021	-0,0020	-0,0079	-0,0316	-0,1262	-0,0010	-0,0042	-0,0167	-0,0666								
1,25	0,0113	0,0452	0,1809	0,7257	0,0053	0,0211	0,0843	0,3377	0,0033	0,0132	0,0526	0,2106	0,0017	0,0069	0,0278	0,1111								
1,50	0,0271	0,1085	0,4348	1,7505	0,0126	0,0506	0,2025	0,8123	0,0079	0,0316	0,1263	0,5063	0,0042	0,0167	0,0667	0,2669								
2,00	0,0723	0,2896	1,1636	4,7363	0,0337	0,1349	0,5408	2,1808	0,0210	0,0842	0,3372	1,3558	0,0111	0,0444	0,1779	0,7134								
Valores de $p(\times 10^{-2})$ : $T = 5, \theta = 12\%, r_0 = 12\%$																								
$\rho, \sigma$		$\alpha = 10\%$						$\alpha = 50\%$						$\alpha = 80\%$						$\alpha = 130\%$				
		1,0%	2,0%	4,0%	8,0%	1,0%	2,0%	4,0%	8,0%	1,0%	2,0%	4,0%	8,0%	1,0%	2,0%	4,0%	8,0%	1,0%	2,0%	4,0%	8,0%			
0,25	-0,0001	-0,0006	-0,0023	-0,0093	-0,0001	-0,0003	-0,0014	-0,0056	-0,0001	-0,0002	-0,0007	-0,003	0,0000	-0,0001	-0,0003	-0,0014								
0,50	-0,0195	-0,0780	-0,3116	-1,2407	-0,0116	-0,0464	-0,1856	-0,7402	-0,0062	-0,0248	-0,0990	-0,3955	-0,0028	-0,0114	-0,0455	-0,1820								
0,75	-0,0146	-0,0585	-0,2338	-0,9320	-0,0087	-0,0348	-0,1392	-0,5556	-0,0046	-0,0186	-0,0743	-0,2968	-0,0021	-0,0085	-0,0342	-0,1365								
1,25	0,0244	0,0976	0,3909	1,5729	0,0145	0,0581	0,2324	0,9330	0,0077	0,0310	0,1239	0,4966	0,0036	0,0142	0,0569	0,2280								
1,50	0,0585	0,2344	0,9408	3,8165	0,0348	0,1394	0,5587	2,2538	0,0186	0,0743	0,2977	1,1961	0,0085	0,0342	0,1367	0,5480								
2,00	0,1562	0,6262	2,5284	10,5038	0,0929	0,3721	1,4969	6,1235	0,0496	0,1984	0,7958	3,2214	0,0228	0,0911	0,3650	1,4681								
Valores de $p(\times 10^{-2})$ : $T = 10, \theta = 12\%, r_0 = 12\%$																								
$\rho, \sigma$		$\alpha = 10\%$						$\alpha = 50\%$						$\alpha = 80\%$						$\alpha = 130\%$				
		1,0%	2,0%	4,0%	8,0%	1,0%	2,0%	4,0%	8,0%	1,0%	2,0%	4,0%	8,0%	1,0%	2,0%	4,0%	8,0%	1,0%	2,0%	4,0%	8,0%			
0,25	-0,0006	-0,0022	-0,0088	-0,0349	-0,0003	-0,0011	-0,0042	-0,0167	-0,0001	-0,0005	-0,0019	-0,0076	0,0000	-0,0002	-0,0008	-0,0031								
0,50	-0,0740	-0,2956	-1,1770	-4,6254	-0,0351	-0,1404	-0,5606	-2,2235	-0,0159	-0,0635	-0,2536	-1,0106	-0,0065	-0,0262	-0,1046	-0,4179								
0,75	-0,0555	-0,2217	-0,8840	-3,4895	-0,0263	-0,1053	-0,4207	-1,6723	-0,0119	-0,0476	-0,1903	-0,7589	-0,0049	-0,0196	-0,0785	-0,3136								
1,25	0,0925	0,3707	1,4909	6,0985	0,0439	0,1758	0,7052	2,8506	0,0198	0,0794	0,3179	1,2778	0,0082	0,0327	0,1309	0,5248								
1,50	0,2222	0,8919	3,6157	15,2662	0,1055	0,4225	1,7008	6,9786	0,0476	0,1906	0,7647	3,0941	0,0196	0,0785	0,3146	1,2642								
2,00	0,5937	2,3962	9,9347	46,0625	0,2815	1,1306	4,5999	19,7084	0,1270	0,5092	2,0522	8,4651	0,0524	0,2096	0,8410	3,4068								

**Tabela 4.2:** Prêmio de convexidade para alguns cenários pelo modelo de CIR

Valores de $p(\times 10^{-2})$ : $T = 3, \theta = 12\%, r_0 = 12\%$																								
$\rho, \sigma$		$\alpha = 10\%$				$\alpha = 50\%$				$\alpha = 80\%$				$\alpha = 130\%$										
		1,0%	2,0%	4,0%	8,0%	1,0%	2,0%	4,0%	8,0%	1,0%	2,0%	4,0%	8,0%	1,0%	2,0%	4,0%	8,0%							
0,25	-0,0049	-0,0135	-0,0533	-0,2006	-0,0034	-0,0094	-0,0373	-0,1426	-0,0021	-0,0059	-0,0234	-0,0907	-0,0011	-0,0031	-0,0124	-0,0488								
0,50	-0,0065	-0,018	-0,0712	-0,2704	-0,0045	-0,0126	-0,0499	-0,1917	-0,0028	-0,0079	-0,0313	-0,1217	-0,0015	-0,0042	-0,0166	-0,0652								
0,75	-0,0049	-0,0135	-0,0536	-0,2052	-0,0034	-0,0095	-0,0375	-0,1451	-0,0021	-0,0059	-0,0235	-0,0918	-0,0011	-0,0031	-0,0124	-0,0491								
1,25	0,0081	0,0226	0,0899	0,3511	0,0057	0,0158	0,0628	0,2466	0,0035	0,0099	0,0393	0,1551	0,0019	0,0052	0,0208	0,0825								
1,50	0,0196	0,0543	0,2165	0,8547	0,0136	0,0379	0,1511	0,5984	0,0085	0,0237	0,0944	0,375	0,0045	0,0125	0,0499	0,1988								
2,00	0,0522	0,1451	0,5817	2,3524	0,0364	0,1012	0,4054	1,6335	0,0227	0,0631	0,2528	1,0158	0,012	0,0333	0,1334	0,5347								

Valores de $p(\times 10^{-2})$ : $T = 5, \theta = 12\%, r_0 = 12\%$																								
$\rho, \sigma$		$\alpha = 10\%$				$\alpha = 50\%$				$\alpha = 80\%$				$\alpha = 130\%$										
		1,0%	2,0%	4,0%	8,0%	1,0%	2,0%	4,0%	8,0%	1,0%	2,0%	4,0%	8,0%	1,0%	2,0%	4,0%	8,0%							
0,25	-0,0157	-0,0434	-0,1681	-0,5943	-0,0094	-0,0259	-0,1015	-0,3738	-0,005	-0,0139	-0,0548	-0,2088	-0,0023	-0,0064	-0,0254	-0,0992								
0,50	-0,021	-0,058	-0,2254	-0,8098	-0,0125	-0,0346	-0,1359	-0,5058	-0,0067	-0,0185	-0,0732	-0,2808	-0,0031	-0,0085	-0,0339	-0,1329								
0,75	-0,0158	-0,0435	-0,1701	-0,6224	-0,0094	-0,026	-0,1023	-0,3855	-0,005	-0,0139	-0,0551	-0,2126	-0,0023	-0,0064	-0,0255	-0,1001								
1,25	0,0263	0,0728	0,2878	1,0988	0,0157	0,0434	0,1722	0,6672	0,0084	0,0232	0,0923	0,3622	0,0038	0,0107	0,0426	0,1687								
1,50	0,0632	0,1752	0,6964	2,7274	0,0376	0,1043	0,4154	1,636	0,0201	0,0557	0,2221	0,8798	0,0092	0,0256	0,1023	0,4071								
2,00	0,1687	0,4693	1,8917	7,8657	0,1003	0,2790	1,1209	4,5809	0,0535	0,1487	0,5963	2,4106	0,0246	0,0683	0,2736	1,0995								

Valores de $p(\times 10^{-2})$ : $T = 10, \theta = 12\%, r_0 = 12\%$																								
$\rho, \sigma$		$\alpha = 10\%$				$\alpha = 50\%$				$\alpha = 80\%$				$\alpha = 130\%$										
		1,0%	2,0%	4,0%	8,0%	1,0%	2,0%	4,0%	8,0%	1,0%	2,0%	4,0%	8,0%	1,0%	2,0%	4,0%	8,0%							
0,25	-0,0594	-0,1625	-0,6062	-1,8933	-0,0283	-0,0781	-0,3012	-1,0520	-0,0128	-0,0355	-0,1396	-0,5227	-0,0053	-0,0147	-0,0583	-0,2268								
0,50	-0,0793	-0,2174	-0,8178	-2,6293	-0,0378	-0,1043	-0,4040	-1,4348	-0,0171	-0,0474	-0,1867	-0,7047	-0,0071	-0,0196	-0,0779	-0,3039								
0,75	-0,0596	-0,1636	-0,6220	-2,0733	-0,0284	-0,0783	-0,3052	-1,1057	-0,0128	-0,0356	-0,1405	-0,5355	-0,0053	-0,0147	-0,0585	-0,2292								
1,25	0,0996	0,2751	1,0737	3,9531	0,0474	0,1312	0,5178	1,9751	0,0214	0,0594	0,2361	0,9222	0,0088	0,0245	0,0978	0,3872								
1,50	0,2395	0,6638	2,6326	10,3678	0,1138	0,3156	1,2561	4,9492	0,0514	0,1427	0,5694	2,2572	0,0212	0,0589	0,2352	0,9369								
2,00	0,6414	1,7922	7,3877	35,0531	0,3040	0,8468	3,4337	14,6767	0,1372	0,3816	1,5356	6,3053	0,0565	0,1572	0,6301	2,5458								

As tabelas são úteis por permitirem ao investidor determinar os cenários críticos que julga merecerem maior atenção.

## Gregas

Nesta seção fazemos uma análise de sensibilidade das fórmulas do prêmio de convexidade através dos riscos mais comuns representados pelas suas gregas.

As gregas nada mais são do que denominações das derivadas parciais, representando cada uma um risco específico. Assim, elas indicam a sensibilidade do preço do ativo indexado ao percentual do CDI em relação aos parâmetros da fórmula que dá o seu preço, ou seja, ela fornece a variação do preço em unidades monetárias para dada pequena variação do parâmetro.

Para o modelo de Vasicek é fácil obter expressões analíticas para as gregas. Pela fórmula (4.8),

$$P_{ajustado}^M(t, T, \rho) = P^M(t, T, \rho) \cdot f,$$

onde

$$f = \exp \left[ \rho(1 - \rho) \frac{\sigma^2}{2\alpha^2} (n(t, T) - T + t + \frac{\alpha}{2} n^2(t, T)) \right],$$

$$n(t, T) = \alpha^{-1} (1 - e^{-\alpha(T-t)})$$

e

$$P^M(t, T, \rho) = CDI_t^A e^{-(1-\rho)R(T-t)}$$

Logo, as expressões das gregas são:

$$\Delta = \frac{\partial P_{ajustado}^M}{\partial R} = f(\rho - 1)(T - t)P^M(t, T, \rho) \quad (4.13)$$

$$\Gamma = \frac{\partial^2 P_{ajustado}^M}{\partial R^2} = f(\rho - 1)^2(T - t)^2 P^M(t, T, \rho)$$

$$\vartheta = \frac{\partial P_{ajustado}^M}{\partial \sigma} = \frac{2f}{\sigma} \ln(f) P^M(t, T, \rho)$$

$$\Theta = \frac{\partial P_{ajustado}^M}{\partial (T - t)} = f P^M(t, T, \rho) \left[ \frac{\rho(1 - \rho)\sigma^2}{2\alpha^2} (2e^{-\alpha(T-t)} - e^{-2\alpha(T-t)} - 1) - (1 - \rho)R \right]$$

$$\Xi = \frac{\partial P_{ajustado}^M}{\partial \alpha} = f P^M(t, T, \rho) \left\{ \frac{\rho(1 - \rho)\sigma^2}{2\alpha^3} \left[ 2(T - t) - \frac{9}{2\alpha} + 2e^{-\alpha(T-t)} \left( T - t + \frac{3}{\alpha} \right) - e^{-2\alpha(T-t)} \left( 2T - 2t + \frac{3}{\alpha} \right) \right] \right\}$$

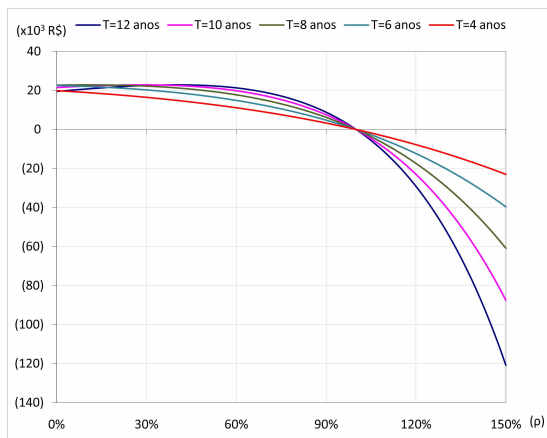
Embora tenhamos denominado por  $\Xi$  a derivada parcial de  $P_{ajustado}^M$  em relação a  $\alpha$ , não é uma convenção como ocorre para as outras derivadas parciais.

As fórmulas das gregas para o modelo CIR não são simples, o que torna a simulação numérica o caminho natural para obter os valores das gregas.

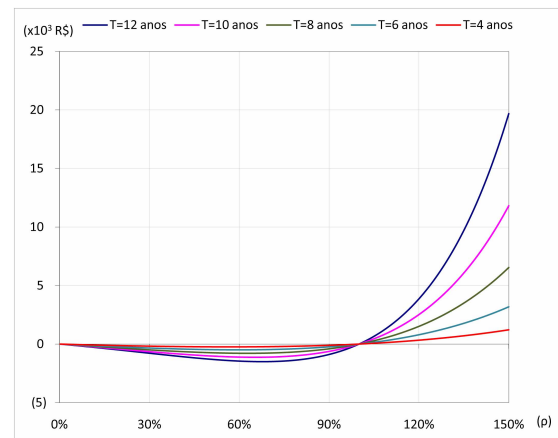
As figuras 4.4 e 4.5 ilustram valores das gregas de uma posição ativa no título indexado ao percentual  $\rho$  do CDI, para diferentes vencimentos. Os valores foram obtidos para um principal de R\$100 milhões, quando  $\alpha = 0,4$  e  $\sigma = 0,015$  no modelo de Vasicek e  $\alpha = 0,4$ ,  $\sigma = 0,03$ ,  $\theta = 0,06$  e  $r_0 = 0,15$  no modelo CIR. Com exceção de delta, as demais gregas foram calculadas para um portfólio que consiste do título em questão mais seu *hedge* de delta executado com LTNs ou futuros de DI, para isolar a convexidade.

Observamos pelos gráficos que os comportamentos das gregas são semelhantes para os dois modelos. Como esperado, quanto maior o prazo da operação, maior é a convexidade. Com exceção do risco delta, todas as gregas são nulas quando o percentual do CDI é zero ou 1. Sabemos que no primeiro caso o ativo comporta-se como uma LTN e no segundo caso como uma LFT. Notamos que delta é positivo para  $\rho < 1$ , o que significa uma posição aplicada em taxa de juros. Quando  $\rho > 1$  a posição é de captação em taxa pré-fixada.

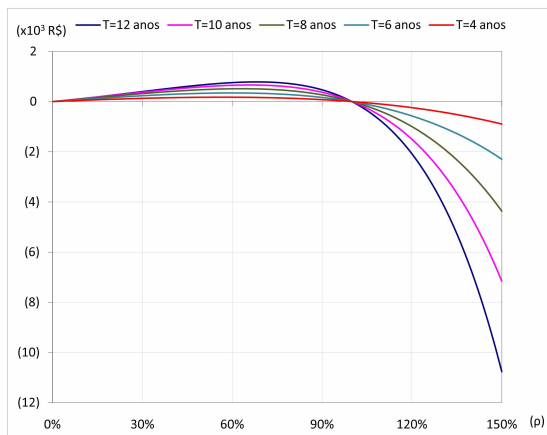
O gráfico 4.6 representa o risco de vega em função do prazo, para diferentes velocidades de reversão à média. Podemos observar que  $\alpha$  crescente reduz a exposição à volatilidade. De fato, quando  $\alpha \rightarrow \infty$ , podemos pensar no processo  $dr$  como determinístico, onde a fórmula (1.2) é correta e o fator de ajuste  $f = 1$ .



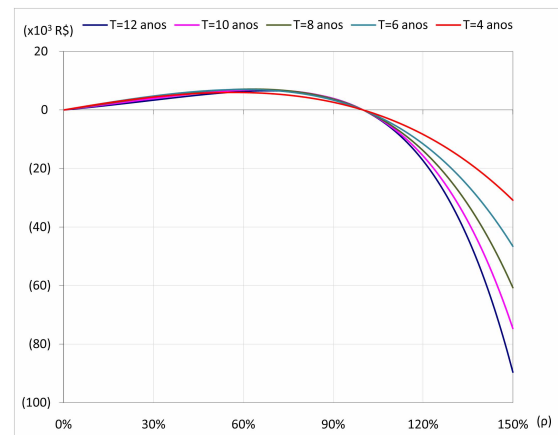
(a)  $\Delta$ : variação do preço para uma queda de 1 ponto básico em  $R$



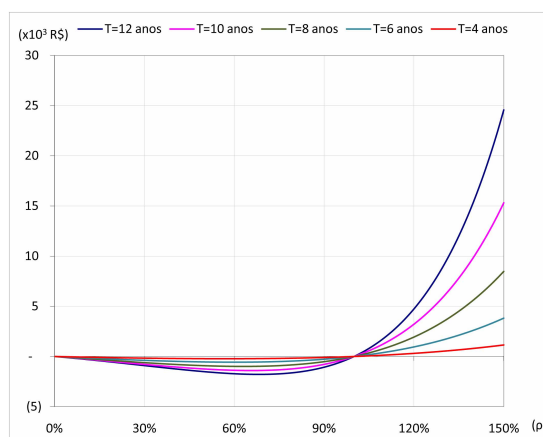
(b)  $\Gamma$ : variação do Delta para uma queda de 100 pontos básicos em  $R$



(c)  $\vartheta$ : variação do preço para uma queda de 1 ponto básico em  $\sigma$

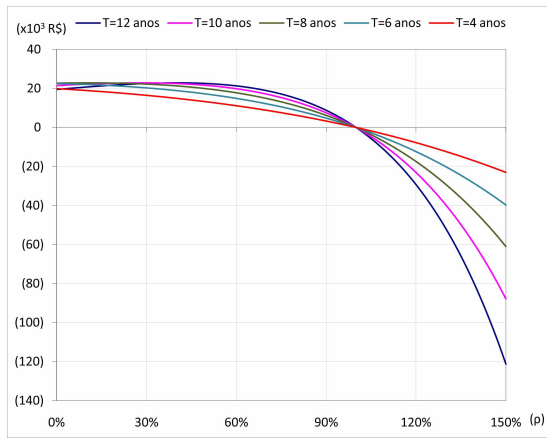


(d)  $\Theta$ : variação do preço após um ano

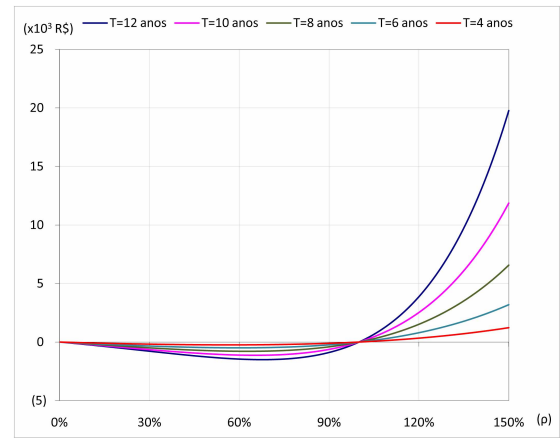


(e)  $\Xi$ : variação do preço para uma queda de 100 pontos básicos em  $\alpha$

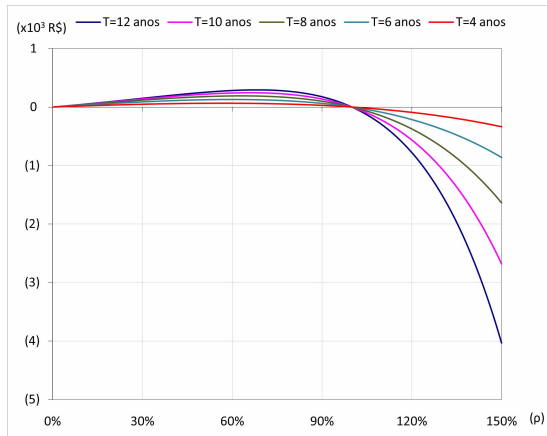
**Figura 4.4:** Principais riscos (R\$) em relação ao percentual do CDI, para diferentes prazos  $T$ , no modelo de Vasicek. Cenário usado:  $\alpha = 0,4$ ,  $\sigma = 0,015$ , principal= R\$100 milhões.



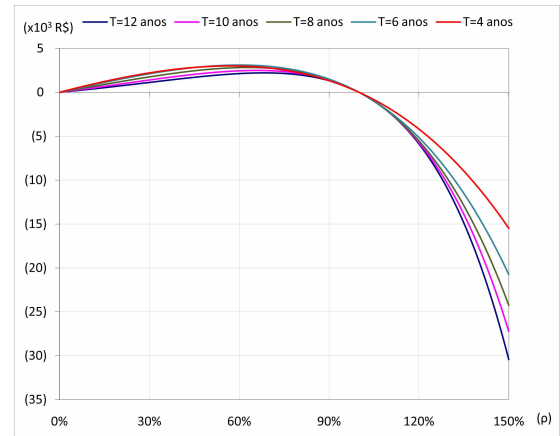
(a)  $\Delta$ : variação do preço para uma queda de 1 ponto básico em  $R$



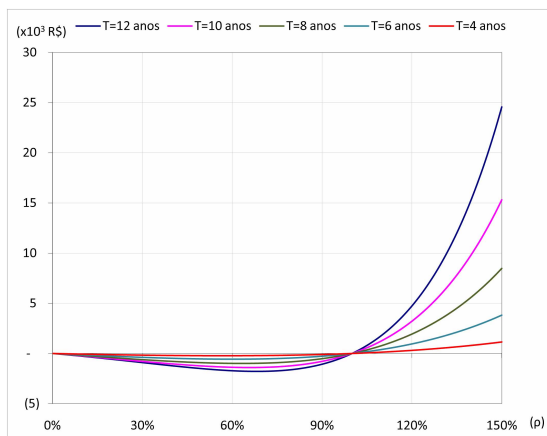
(b)  $\Gamma$ : variação do Delta para uma queda de 100 pontos básicos em  $R$



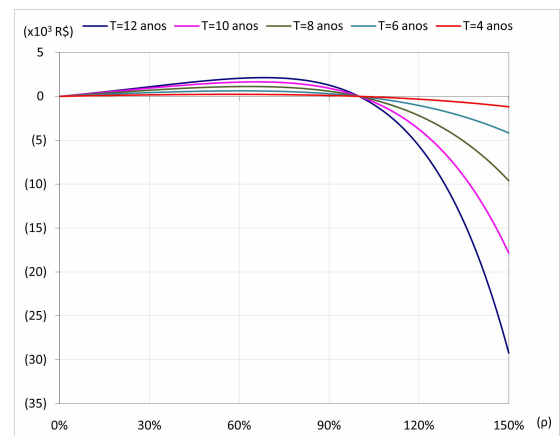
(c)  $\vartheta$ : variação do preço para uma queda de 1 ponto básico em  $\sigma$



(d)  $\Theta$ : variação do preço após um ano

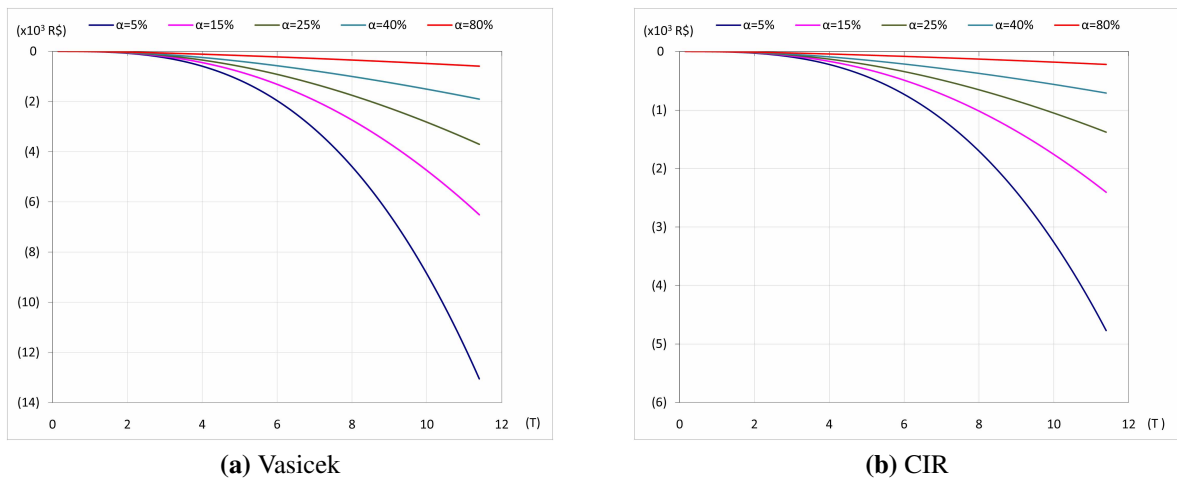


(e)  $\Xi$ : variação do preço para uma queda de 100 pontos básicos em  $\alpha$



(f) Variação do preço para uma queda de 100 pontos básicos na média  $\theta$

**Figura 4.5:** Principais riscos (R\$) em relação ao percentual do CDI, para diferentes prazos  $T$ , no modelo de CIR. Cenário usado:  $r_0 = 0,15$ ,  $\theta = 0,06$ ,  $\alpha = 0,4$ ,  $\sigma = 0,03$ , principal= R\$100 milhões.



**Figura 4.6:**  $\vartheta$  em função do prazo, para diferentes valores de  $\alpha$ . Cenário usado:  $\sigma_{Vasicek} = 0,015$ ,  $\sigma_{CIR} = 0,03$ , principal= \$100 milhões.

## Capítulo 5

### Dados e estimação

#### 5.1 Dados

Os preços de opções do IDI foram obtidos a partir de curvas de volatilidades conseguidas com corretoras. A prática comum do mercado é guardar a volatilidade em lugar dos preços, usando para a conversão o modelo de Black (1976), no qual apenas a volatilidade é desconhecida.

A nossa série de dados compreende apenas volatilidades das opções "no dinheiro", para o período de Janeiro de 2007 a Junho de 2010. A partir dessas volatilidades para diferentes séries de opções do IDI, recuperamos os preços de mercado pelo modelo de Black, cujas fórmulas se encontram no anexo. A principal vantagem desse conjunto de dados em relação aos preços de ajuste da BM&F é o fato de que a informação em termos de volatilidade já embute um relacionamento do preço da opção com o preço do DI futuro no momento de obtenção do dado (por outro lado, a série de prêmios de opções carrega a incerteza do preço do DI futuro).

Além dos preços de opções do IDI, utilizamos também as curvas diárias do Futuro de DI, de Janeiro de 2003 a Junho de 2010.

#### 5.2 Estimação

##### 5.2.1 Estimação por máxima verossimilhança

Escolhemos por utilizar a estimação por máxima verossimilhança, pois partimos da suposição de distribuições conhecidas. Queremos encontrar os parâmetros dos modelos de Vasicek e CIR. Segundo Ait-Sahalia (2002), em modelos paramétricos, o método da máxima verossimilhança deve ser a escolha dentre os métodos de estimação. A mesma opinião é compartilhada por Brandt e Santa-Clara (2002), que afirma que este método é mais eficiente que o GMM inclusive.

### Modelo de Vasicek

A estimação por máxima verossimilhança consiste em achar o vetor de parâmetros  $\phi$  de uma fdp  $f(y, \phi)$  que maximiza a probabilidade de se observar a amostra  $y$ .

Se os elementos são tidos como independentes, então a função de verossimilhança que queremos maximizar é

$$L(\phi) = \prod_{i=1}^{N-1} f(y_i, \phi). \quad (5.1)$$

Como a função logarítmica é monotônica, maximizar a função de log-verossimilhança abaixo em lugar de (5.1) não altera o resultado.

$$\ln L(\phi) = \ln \left[ \prod_{i=1}^{N-1} f(y_i, \phi) \right] = \sum_{i=1}^N \ln [f(y_i, \phi)] \quad (5.2)$$

Recordemos que no modelo de Vasicek, a distribuição marginal da taxa de curto prazo é normal com média e variância condicionais dadas por (3.5) e (3.6) respectivamente, ou seja,

$$f(r_{t+\Delta t} | r_t; \phi, \Delta t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v^2}} \exp\left(-\frac{(r_{t+\Delta t} - \mu)^2}{2v^2}\right),$$

onde

$$\begin{aligned} \mu &= r_t e^{-\alpha \Delta t} + \theta(1 - e^{-\alpha \Delta t}), \\ v^2 &= \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha \Delta t}). \end{aligned}$$

Então, a função log-verossimilhança (5.2) no caso de Vasicek é

$$\ln L(\phi) = \sum_{i=1}^{N-1} \ln f(r_{t_{i+1}} | r_{t_i}; \phi, \Delta t),$$

ou seja,

$$\ln L(\phi) = -\frac{(N-1)}{2} \ln(2\pi) - (N-1) \ln v - \frac{1}{2v^2} \sum_{i=1}^{N-1} (r_{t_{i+1}} - \mu_{t_i})^2, \quad (5.3)$$

onde  $\mu_{t_i} = r_{t_i} e^{-\alpha \Delta t} + \theta(1 - e^{-\alpha \Delta t})$ . Assim, os estimadores de máxima verossimilhança  $\hat{\phi}$  são obtidos maximizando-se (5.3):

$$\hat{\phi} \equiv (\hat{\alpha}, \hat{\theta}, \hat{\sigma}) = \arg \max_{\phi} \ln L(\phi)$$

No ponto de máximo, todas as derivadas parciais são iguais a zero. Fazendo isso e após alguma manipulação algébrica, obtemos os estimadores (vide Brigo e Mercurio (2001, p. 53)):

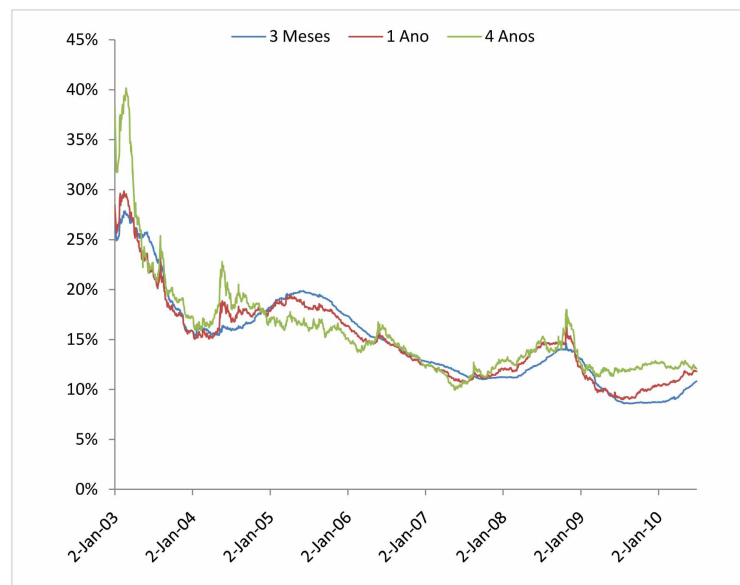
$$\hat{a} = \frac{n \sum_{i=1}^n r_i r_{i-1} - \sum_{i=1}^n r_i \sum_{i=1}^n r_{i-1}}{n \sum_{i=1}^n r_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n r_{i-1} \right)^2}$$

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n (r_i - \hat{a} r_{i-1})}{n(1 - \hat{a})}$$

$$\hat{V}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (r_i - \hat{a} r_{i-1} - \hat{\theta}(1 - \hat{a}))^2$$

onde  $a = e^{-\alpha \Delta t}$  e  $V^2 = \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha \Delta t})$ .

Estimações foram feitas para taxas de juros de diferentes prazos (3, 6 e 9 meses e 1, 2, 3 e 4 anos). A figura 5.1 mostra as trajetórias das taxas de juros de alguns prazos desde 2003 e os resultados encontram-se na tabela 5.1.



**Figura 5.1:** Trajetórias das taxas de juros anualizadas de prazos: 3 meses, 1 e 4 anos

**Tabela 5.1:** Estimativas dos parâmetros de Vasicek para taxas de juros de diferentes vencimentos por máxima verossimilhança.

Vencimento (Anos)	0,25	0,50	0,75	1,00	2,00	3,00	4,00
$\hat{\alpha}$	52,42%	64,15%	79,27%	93,05%	147,72%	174,66%	180,93%
$\hat{\theta}$	12,36%	12,11%	12,68%	13,05%	13,66%	13,89%	13,95%
$\hat{\sigma}$	1,26%	1,86%	2,25%	2,58%	3,35%	3,81%	4,15%

Observamos pelo gráfico que as taxas de prazos maiores são mais voláteis, o que é confirmado pelas estimações. Isso condiz com o senso geral de que horizontes mais distantes têm maior incerteza. Ao mesmo tempo, a velocidade de reversão age de forma a amenizar a volatilidade e por isso ela também cresce conforme o prazo. Visualmente observamos que as taxas passaram por um processo de queda, mas com períodos de maior ou menor volatilidade. Portanto, é razoável usar um modelo heterocedástico.

Escolhemos utilizar o método de alisamento exponencial (*Exponentially Weighted Moving Average - EWMA*) para estimar a volatilidade, a partir da versão discretizada do modelo. A idéia é atribuir um peso diferente às observações recentes e ao histórico através da especificação do fator de alisamento  $\lambda$ . Adotamos  $\lambda = 0,94$ , conforme sugerido pelo banco J.P. Morgan/RiskMetrics, que verificou que esse valor de  $\lambda$  fornece estimativas de variância que mais se aproximam da realizada, para diferentes variáveis de mercado (vide por exemplo Hull (2002, p. 375)).

A discretização do modelo de Vasicek pelo método de Euler é

$$r_{t+\Delta t} - r_t = \alpha(\theta - r_t)\Delta t + \sigma\varepsilon_t,$$

onde  $\varepsilon_t$  tem distribuição normal com média zero e variância  $\Delta t$ .

Assim, pelo método EWMA,

$$\sigma_{t_{i+1}}^2 = \lambda\sigma_i^2 + (1 - \lambda)[r_{ti+1} - r_{ti} - \alpha(\theta - r_{ti})\Delta t]^2.$$

A figura (5.2) na página 67 contém o gráfico das volatilidades estimadas para as séries de diferentes prazos.

Utilizamos a estimação por quasi-verossimilhança para obtermos novos parâmetros de média e reversão à média no contexto heterocedástico, conforme sugerido em Hull (2002). Segundo James e Webber (2000), a discretização de Euler assume que para  $\Delta t$  suficientemente pequeno,  $\Delta r_t = r_{t+\Delta t} - r_t$  é normal. Segundo Phillips e Yu (2009) esse método é uma aproximação que gera viés assintótico, porém funciona bem em casos de  $\Delta t$  diário.

Os estimadores são obtidos ao maximizarmos a nova função log-verossimilhança:

$$\ln L(\phi) = -\frac{N-1}{2} \ln(2\pi) + \sum_{i=1}^{N-1} \left[ -\ln\sigma_{t_{i+1}} - \frac{(r_{t_{i+1}} - r_{t_i} - \alpha(\theta - r_{t_i})\Delta t)^2}{2\sigma_{t_{i+1}}^2} \right]$$

Porém esse método de estimação não se mostrou estável para o caso heterocedástico, ou seja, utilizando a volatilidade obtida pelo EWMA. Um exemplo de instabilidade foi a obtenção de  $\theta$  próximo de zero. Por isso optamos por não utilizar seus resultados. Escolhemos utilizar as estimativas de  $\alpha$  e  $\theta$  obtidas pelo método da máxima verossimilhança homocedástica, resumidos na tabela 5.1, e estimativas de volatilidade dadas pelo EWMA.

## Modelo de CIR

O método de estimação por máxima verossimilhança para o modelo de CIR é descrito por Kladívko (2007).

Uma vez conhecido  $r_t$ , a função densidade de probabilidade de  $r_{t+\Delta t}$  no modelo CIR é

$$f(r_{t+\Delta t}|r_t; \phi, \Delta t) = ce^{-u-v} \left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{q}{2}} I_q(2\sqrt{uv}),$$

$$\begin{aligned} c &= \frac{2\alpha}{\sigma^2(1 - e^{-\alpha\Delta t})}, \\ u &= cr_t e^{-\alpha\Delta t}, \\ v &= cr_{t+\Delta t}, \\ q &= \frac{2\alpha\theta}{\sigma^2} - 1, \end{aligned}$$

onde  $I_q(2\sqrt{uv})$  é a função Bessel modificada de primeira espécie e ordem  $q$ .

Queremos maximizar a função log-verossimilhança

$$\ln L(\phi) = \sum_{i=1}^{N-1} \ln f(r_{i+1}|r_i; \phi, \Delta t),$$

ou seja,

$$\ln L(\phi) = (N-1) \ln c + \sum_{i=1}^{N-1} \left[ -u_{i+1} - v_{i+1} + 0.5q \ln\left(\frac{v_{i+1}}{u_{i+1}}\right) + \ln(I_q(2\sqrt{u_{i+1}v_{i+1}})) \right], \quad (5.4)$$

onde  $u_{i+1} = cr_{i+1} e^{-\alpha\Delta t}$  e  $v_{i+1} = cr_{i+1}$ .

Portanto, os estimadores de máxima verossimilhança  $\hat{\phi}$  são obtidos maximizando-se a função (5.4):

$$\hat{\phi} \equiv (\hat{\alpha}, \hat{\theta}, \hat{\sigma}) = \arg \max_{\phi} \ln L(\phi)$$

A otimização é feita numericamente, o que requer um chute inicial de  $\hat{\phi}$ . Para termos uma estimativa inicial, usamos o método dos mínimos quadrados ordinários (MMQ) na versão discretizada.

A versão discretizada do processo de difusão CIR pelo método de Euler nos dá

$$r_{t+\Delta t} - r_t = \alpha(\theta - r_t)\Delta t + \sigma\sqrt{r_t}\varepsilon_t, \quad (5.5)$$

onde  $\varepsilon_t$  é um ruído branco gaussiano de média zero e variância  $\Delta t$ . Ao transformarmos (5.5) em

$$\frac{r_{t+\Delta t} - r_t}{\sqrt{r_t}} = \frac{\alpha\theta\Delta t}{\sqrt{r_t}} - \alpha\sqrt{r_t}\Delta t + \sigma\varepsilon_t,$$

a estimativa inicial pelo MMQ é obtida minimizando-se a função

$$(\hat{\alpha}, \hat{\theta}) = \arg \min_{\alpha, \theta} \sum_{i=1}^{N-1} \left( \frac{r_{t_{i+1}} - r_{t_i}}{\sqrt{r_{t_i}}} - \frac{\alpha \theta \Delta t}{\sqrt{r_{t_i}}} + \alpha \sqrt{r_{t_i}} \Delta t \right)^2,$$

cuja solução é

$$\hat{\alpha} = \frac{N^2 - 2N + 1 + \sum_{i=1}^{N-1} r_{t_{i+1}} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{r_{t_i}} - \sum_{i=1}^{N-1} r_{t_i} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{r_{t_i}} - (N-1) \sum_{i=1}^{N-1} \frac{r_{t_{i+1}}}{r_{t_i}}}{(N^2 - 2N + 1 - \sum_{i=1}^{N-1} r_{t_i} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{r_{t_i}}) \Delta t}$$

$$\hat{\theta} = \frac{(N-1) \sum_{i=1}^{N-1} r_{t_{i+1}} - \sum_{i=1}^{N-1} \frac{r_{t_{i+1}}}{r_{t_i}} \sum_{i=1}^{N-1} r_{t_i}}{N^2 - 2N + 1 + \sum_{i=1}^{N-1} r_{t_{i+1}} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{r_{t_i}} - \sum_{i=1}^{N-1} r_{t_i} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{r_{t_i}} - (N-1) \sum_{i=1}^{N-1} \frac{r_{t_{i+1}}}{r_{t_i}}}$$

A estimativa inicial  $\hat{\sigma}$  é obtida fazendo-se o desvio padrão dos resíduos.

A tabela 5.2 contém os resultados da estimação por máxima verossimilhança. É interessante notar que Siva (1997), ao reproduzir o trabalho de Chan et al. (1992) para o Brasil, ou seja, ao estimar por GMM os parâmetros de diversos modelos unifatoriais de taxa de curto prazo, tais como Vasicek, CIR e CKLS, encontrou valores próximos de zero para o parâmetro de velocidade de reversão à média. Comparados aos valores obtidos por nossa amostra, sugere que o comportamento das taxas de juros passou a incorporar a reversão à média nos últimos anos.

**Tabela 5.2:** Estimativas dos parâmetros de CIR para taxas de juros de diferentes vencimentos por máxima verossimilhança.

Vencimento (Anos)	0,25	0,50	0,75	1,00	2,00	3,00	4,00
$\hat{\alpha}$	52,86%	59,07%	71,10%	82,33%	128,99%	153,23%	164,24%
$\hat{\theta}$	12,35%	11,88%	12,43%	12,80%	13,43%	13,67%	13,77%
$\hat{\sigma}$	2,96%	4,30%	5,23%	6,01%	7,65%	8,48%	9,02%

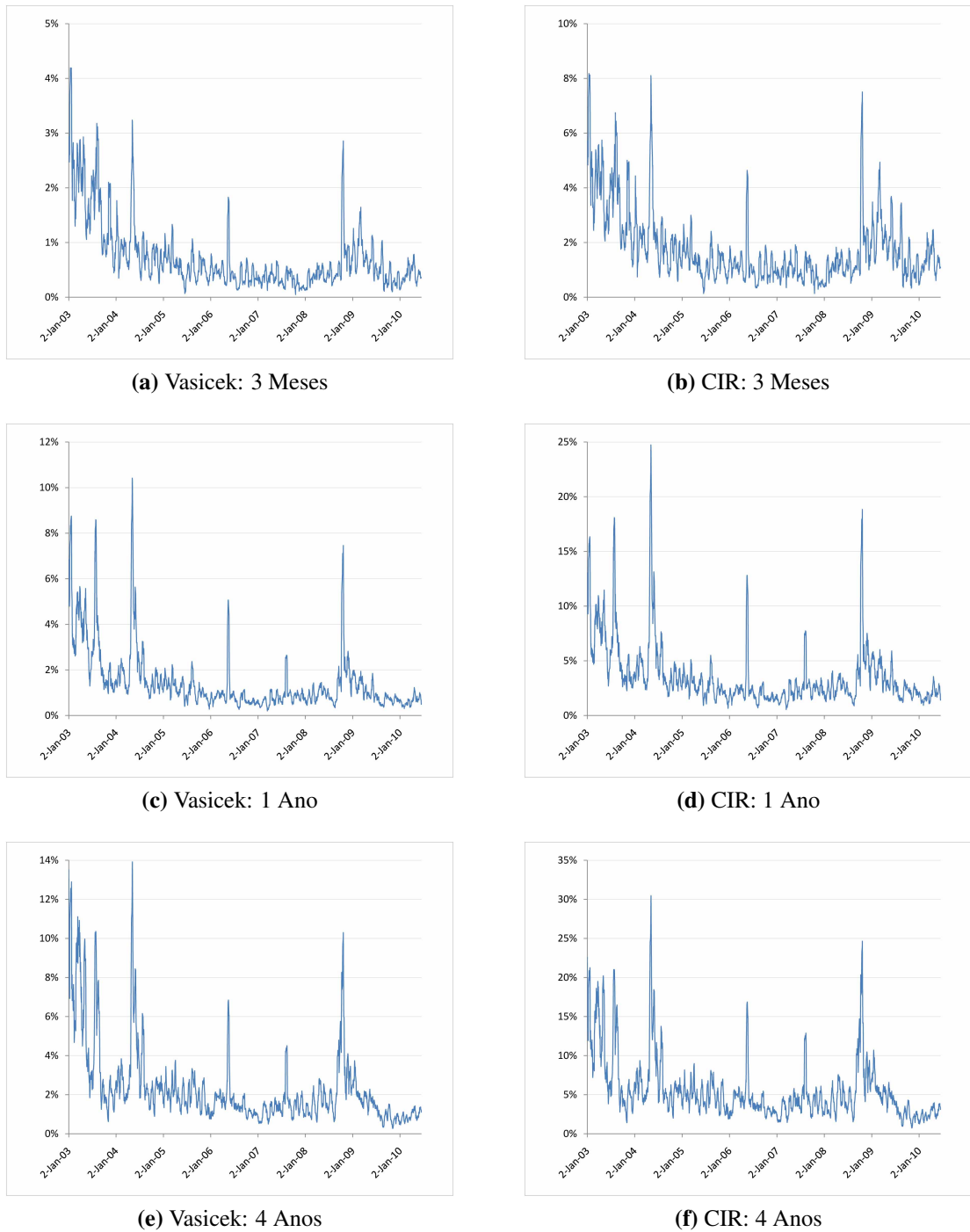
Similarmente ao que fizemos para o modelo de Vasicek, estimamos as volatilidades diárias pelo método de EWMA para a versão discretizada (5.5):

$$\sigma_{t_{i+1}}^2 = \lambda \sigma_i^2 + (1 - \lambda) \frac{[r_{t_{i+1}} - r_{t_i} - \alpha(\theta - r_{t_i}) \Delta t]^2}{r_{t_i}}$$

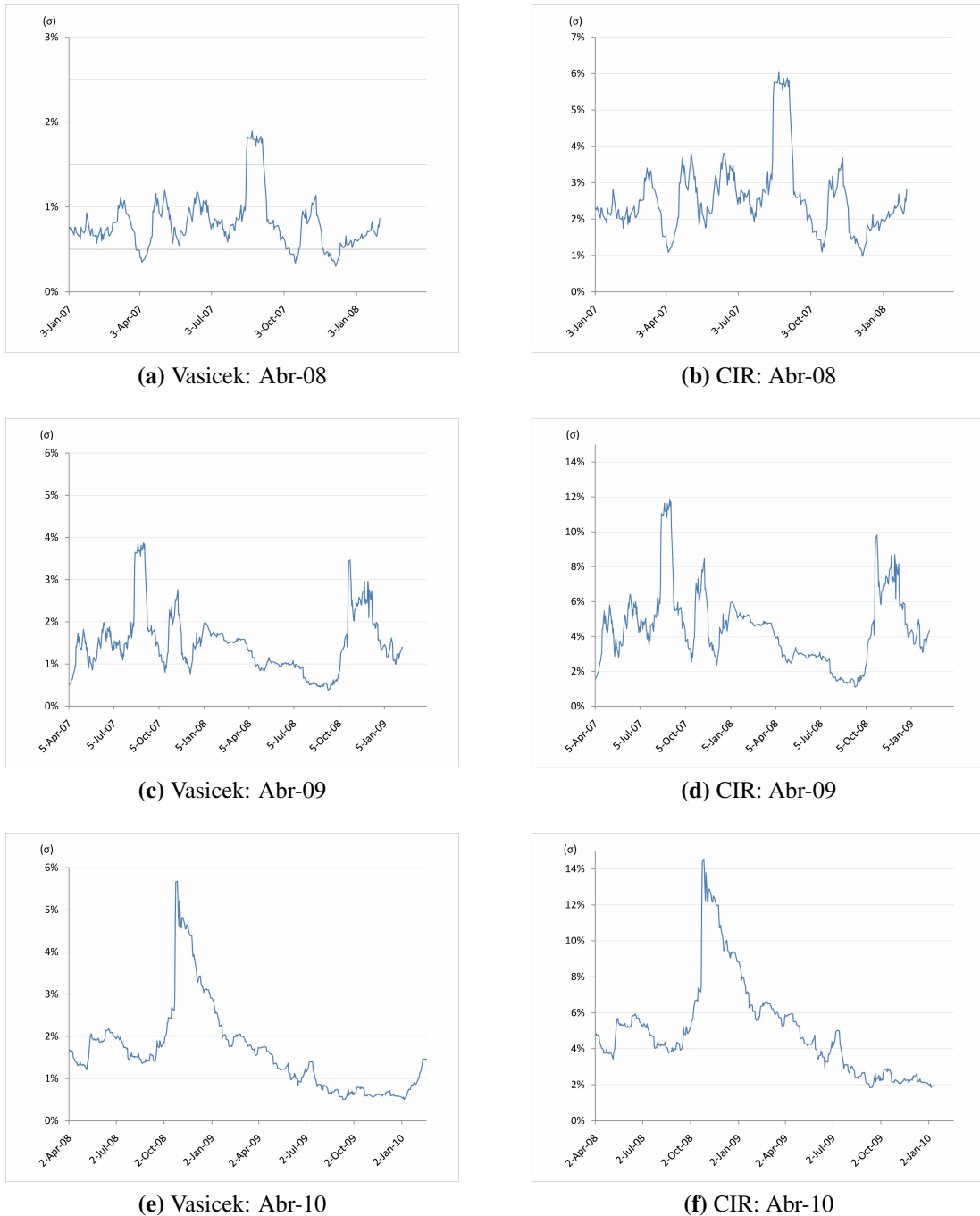
A figura 5.2 na página 67 resume alguns dos resultados obtidos.

### 5.2.2 Volatilidade implícita

A limitação dos dados nos impede de utilizar a calibração para encontrar os parâmetros  $\alpha$ ,  $\theta$  e  $\sigma$  implícitos. Obtemos então a estimativa do parâmetro média e velocidade de reversão à média por máxima verossimilhança. Assim, a volatilidade pode ser obtida pelo preço da opção do IDI, a partir da fórmula (3.24) para o modelo de Vasicek e por iteração na árvore de CIR. Os valores de  $\alpha$  e  $\theta$  usados foram interpolados usando-se as tabelas 5.1 e 5.2, de acordo com o prazo para o vencimento das opções. A figura 5.3 na página 68 resume alguns dos resultados obtidos para opções de diferentes vencimentos.



**Figura 5.2:** Resultados da estimação do coeficiente de difusão por EWMA para taxas de juros de diferentes vencimentos nos modelos de Vasicek e CIR.



**Figura 5.3:** Volatilidades implícitas de opções de IDI de diferentes vencimentos, segundo os modelos de Vasicek e CIR.

## Capítulo 6

### Simulações e resultados

#### 6.1 *Hedge* de Delta

Conforme vimos, quando há convexidade, uma carteira que é sempre mantida com delta nulo tem valor esperado diferente de zero. Ao simularmos o *hedge* de delta *ex-post* de um ativo indexado ao percentual do CDI podemos encontrar o prêmio efetivo de convexidade no período. Esse *hedge* de delta foi executado diariamente.

Em um primeiro instante, utilizamos as estimativas dos parâmetros do modelo Vasicek e CIR obtidas segundo máxima verossimilhança e EWMA, a fim de obtermos um preço do prêmio *ex-ante* para compará-lo ao preço efetivo.

Para o cálculo do *hedge* de delta da operação, utilizamos a expressão (4.13) para as duas simulações com o modelo Vasicek e calculamos numericamente o delta usando (4.12) para as simulações no modelo CIR. Notamos que nessas quatro alternativas, os prêmios efetivos obtidos foram muito próximos em todas as combinações ( $\rho$ , prazo) testadas. De fato, a diferença de delta entre as quatro alternativas é da ordem da diferença dos fatores de ajuste  $f$ , ou seja, as operações de *hedge* de delta são praticamente as mesmas, produzindo os mesmos resultados.

A tabela 6.1 resume os resultados das simulações, segregados por prazo e percentual do CDI. Observamos que o erro entre o preço efetivo e o preço do modelo é grande, chegando a ser da ordem de mais de 50% do prêmio efetivo, por exemplo, nas simulações de  $T=1,5$  anos,  $\rho = 200\%$  e com parâmetros EWMA. De fato, estamos comparando um preço *ex-ante* com um preço *ex-post*, ficando expostos à volatilidade do período. Notamos que em muitos casos o preço obtido usando a volatilidade estimada por máxima verossimilhança desempenhou-se, em média, melhor do que empregando a volatilidade obtida pelo método EWMA. De fato, EWMA é um modelo de medida de volatilidade corrente, não tendo capacidade preditiva, ainda mais para prazos longos como é o caso de nossas simulações. Pela figura 5.2 notamos que a volatilidade das taxas de juros no Brasil é inconstante, agravadas por atuações periódicas do COPOM e choques externos, porém com componente de reversão à média da volatilidade não

**Tabela 6.1:** Comparação dos prêmios de convexidade fornecidos pelo *hedge* de delta (prêmio efetivo) e pelas fórmulas, com parâmetros estimados por máxima verossimilhança e EWMA, para os modelos de Vasicek e CIR.

Modelo	$\rho$	T=1,5 anos			T=2,5 anos			T=3,5 anos		
		Prêmio efetivo	Erro médio	DP do erro	Prêmio efetivo	Erro médio	DP do erro	Prêmio efetivo	Erro médio	DP do erro
CIR-EWMA	65%		0,004%	0,007%		-0,025%	0,074%		-0,016%	0,056%
CIR-Veross.		-0,007%	-0,003%	0,006%	-0,019%	-0,014%	0,010%	-0,035%	-0,030%	0,021%
Vasicek-EWMA			0,003%	0,007%		-0,028%	0,079%		-0,018%	0,059%
Vasicek-Veross.			-0,005%	0,006%		-0,017%	0,017%		-0,035%	0,040%
CIR-EWMA	80%		0,002%	0,004%		-0,018%	0,056%		-0,010%	0,038%
CIR-Veross.		-0,005%	-0,002%	0,004%	-0,014%	-0,009%	0,008%	-0,026%	-0,019%	0,016%
Vasicek-EWMA			0,002%	0,004%		-0,019%	0,058%		-0,011%	0,039%
Vasicek-Veross.			-0,003%	0,004%		-0,011%	0,013%		-0,023%	0,029%
CIR-EWMA	130%		-0,008%	0,012%		0,037%	0,135%		0,004%	0,072%
CIR-Veross.		0,015%	0,003%	0,012%	0,042%	0,014%	0,025%	0,084%	0,027%	0,054%
Vasicek-EWMA			-0,008%	0,013%		0,040%	0,138%		0,007%	0,075%
Vasicek-Veross.			0,007%	0,012%		0,020%	0,039%		0,036%	0,090%
CIR-EWMA	160%		-0,024%	0,032%		0,071%	0,299%		-0,025%	0,140%
CIR-Veross.		0,039%	0,005%	0,031%	0,117%	0,020%	0,075%	0,243%	0,031%	0,171%
Vasicek-EWMA			-0,023%	0,032%		0,079%	0,309%		-0,019%	0,148%
Vasicek-Veross.			0,014%	0,033%		0,035%	0,112%		0,053%	0,262%
CIR-EWMA	200%		-0,058%	0,071%		0,124%	0,688%		-0,173%	0,192%
CIR-Veross.		0,090%	0,002%	0,072%	0,289%	-0,001%	0,205%	0,624%	-0,051%	0,487%
Vasicek-EWMA			-0,057%	0,072%		0,134%	0,667%		-0,155%	0,214%
Vasicek-Veross.			0,021%	0,078%		0,028%	0,287%		-0,006%	0,677%

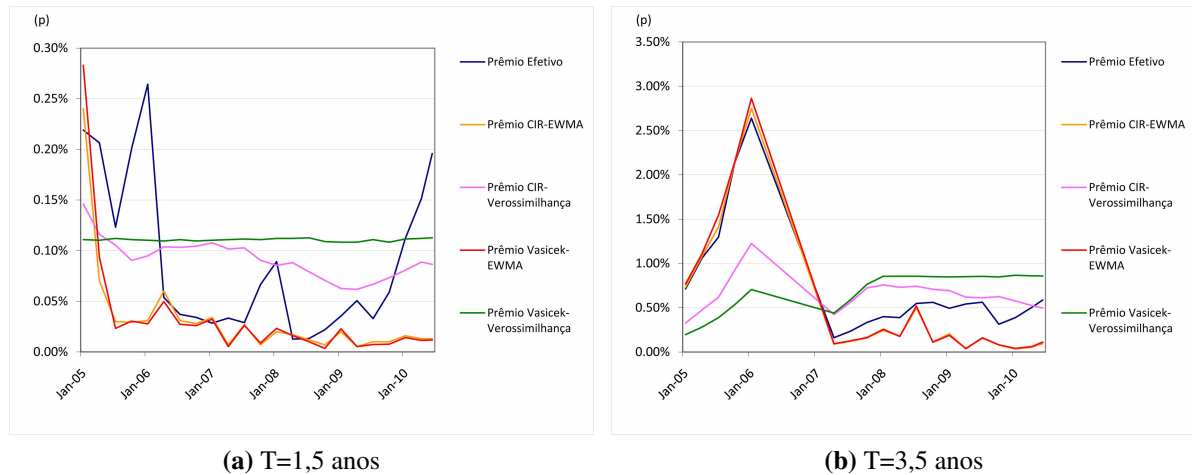
capturada pelo modelo EWMA.

Notamos nos gráficos 6.1 que o prêmio efetivo variou muito, por exemplo de 0,016% a 0,264% nas simulações ( $\rho = 200\%$ ,  $T = 1,5$  ano). Os prêmios calculados com parâmetros EWMA dependem muito da data de amostragem dos parâmetros. Isso se refletiu em erro não centrado. Os parâmetros de máxima verossimilhança, por outro lado, produziram erros centrados, o que era esperado por se tratarem de parâmetros médios para o período em questão. Na maioria dos casos, ainda percebemos que os erros obtidos a partir dos parâmetros de máxima verossimilhança apresentaram menor desvio padrão.

Contudo, não almejamos neste trabalho testar um modelo de previsão de volatilidade. O intuito é aplicar os modelos de apreçamento da convexidade e efetuar *hedge* da volatilidade, com instrumentos de mercado (opções do IDI).

## 6.2 Hedge de Vega e Delta

Com o *hedge* de vega esperamos que o resultado da carteira protegida seja mais próximo de zero, pois pretendemos eliminar a incerteza do parâmetro volatilidade no cálculo dos prêmios, ou seja,



**Figura 6.1:** Prêmios resultantes de diferentes simulações para operações de 1,5 e 3,5 anos,  $\rho = 200\%$ , expostos por vencimento da operação e obtidos a partir do *hedge* de delta e das fórmulas.

$$p_{formula} + \vartheta_{hedge} + \Delta_{hedge} \cong p_{efetivo},$$

onde  $p_{formula}$  é o prêmio de convexidade no início da operação obtido pelas fórmulas (4.7) e (4.11) respectivamente para os modelos de Vasicek e CIR, utilizando os parâmetros implícitos das opções do IDI;  $\vartheta_{hedge} + \Delta_{hedge}$  é o resultado do *hedge* da operação utilizando as opções do IDI e futuro de DI;  $p_{efetivo}$  é o prêmio de convexidade efetivo, dado pelo resultado do *hedge* de delta e sabido apenas no vencimento da operação.

Isso é conseguido fazendo rebalanceamentos diários da carteira, para delta e vega, utilizando opções do IDI e contratos de DI futuro. Assim, esperamos que o erro no prêmio causado pela diferença entre a volatilidade realizada e a volatilidade implícita do IDI no momento do cálculo do prêmio seja mitigado pelas operações de opções do IDI.

Nas simulações utilizamos opções do IDI “no dinheiro” e, no rebalanceamento diário, à medida que essa opção fica “fora do dinheiro”, zeramos a posição nessa opção e abrimos nova no novo preço de exercício “no dinheiro”. Assim ficamos sempre na região mais líquida das opções do IDI (para as quais temos séries de preços).

A tabela 6.2 resume os resultados das simulações realizadas. Notamos que o erro médio do portfolio vega e delta neutro é mais próximo de zero em todos os casos. Também o desvio-padrão deste erro é menor do que as simulações utilizando parâmetros de máxima verossimilhança e EWMA. Isso aconteceu para ambos os modelos CIR e Vasicek.

No período em questão, nas simulações de portfolio com prazo de vencimento menor ou igual a dois anos e com vencimentos entre Janeiro de 2008 e Abril de 2010, observamos que o procedimento de *hedge* de delta e vega conseguiu resultados melhores do que as alternativas já discutidas de apenas *hedge* de delta. Isso significa que o erro na estimativa da volatilidade

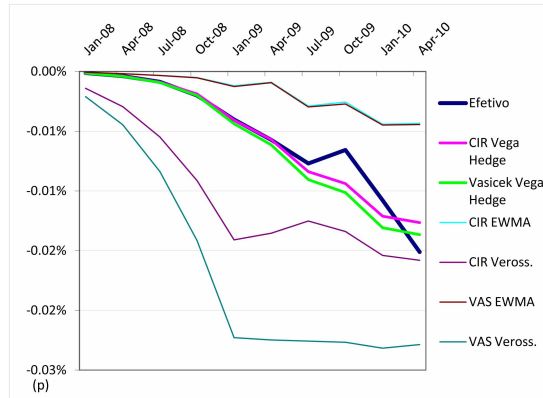
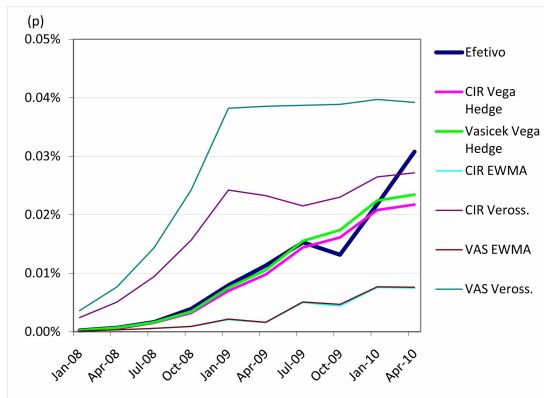
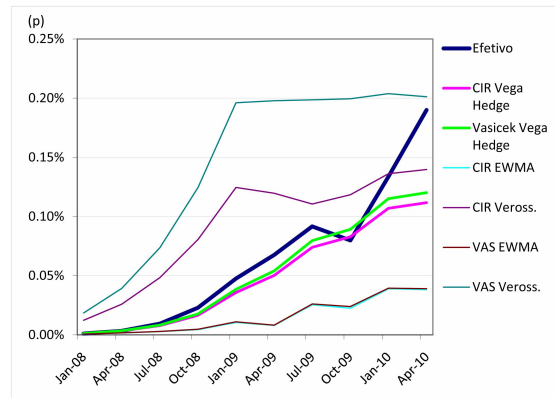
**Tabela 6.2:** Comparação dos prêmios de convexidade efetivo e fornecidos pelo *hedge* de vega e delta.

Data de Vencimento T (anos)		Prêmio p em pontos básicos, por data de vencimento da simulação										Erro médio	DP do erro
		Jan-08 1	Abr-08 1,2	Jul-09 1,5	Out-08 1,7	Jan-09 2	Abr-09 2	Jul-09 2	Out-09 2	Jan-10 2	Abr-10 2		
Prêmio efetivo	$\rho = 65\%$	-0,013	-0,039	-0,087	-0,201	-0,402	-0,572	-0,770	-0,657	-1,079	-1,511		
CIR Vega hedge		-0,013	-0,039	-0,089	-0,188	-0,407	-0,570	-0,838	-0,939	-1,211	-1,266	-0,006%	0,005%
VAS Vega hedge		-0,014	-0,041	-0,094	-0,201	-0,438	-0,615	-0,905	-1,013	-1,308	-1,366	-0,006%	0,005%
CIR EWMA		-0,007	-0,018	-0,032	-0,051	-0,119	-0,091	-0,290	-0,256	-0,442	-0,434	-0,002%	0,002%
CIR MV		-0,141	-0,294	-0,548	-0,913	-1,409	-1,354	-1,252	-1,340	-1,540	-1,581	-0,010%	0,005%
VAS EWMA		-0,007	-0,019	-0,033	-0,054	-0,126	-0,094	-0,297	-0,272	-0,448	-0,444	-0,002%	0,002%
VAS MV		-0,211	-0,446	-0,837	-1,415	-2,228	-2,247	-2,257	-2,267	-2,316	-2,286	-0,017%	0,009%
Prêmio efetivo	$\rho = 80\%$	-0,009	-0,027	-0,062	-0,145	-0,292	-0,416	-0,56	-0,479	-0,788	-1,106		
CIR Vega hedge		-0,009	-0,027	-0,062	-0,132	-0,286	-0,401	-0,59	-0,661	-0,852	-0,890	0,000%	0,001%
VAS Vega hedge		-0,010	-0,029	-0,066	-0,141	-0,308	-0,432	-0,636	-0,713	-0,920	-0,961	0,000%	0,001%
CIR EWMA		-0,005	-0,013	-0,023	-0,036	-0,084	-0,064	-0,204	-0,180	-0,311	-0,305	0,003%	0,002%
CIR MV		-0,099	-0,207	-0,386	-0,642	-0,992	-0,953	-0,881	-0,943	-1,084	-1,112	-0,003%	0,002%
VAS EWMA		-0,005	-0,013	-0,024	-0,038	-0,088	-0,066	-0,209	-0,191	-0,315	-0,312	0,003%	0,002%
VAS MV		-0,148	-0,314	-0,589	-0,995	-1,567	-1,581	-1,587	-1,594	-1,629	-1,608	-0,008%	0,004%
Prêmio efetivo	$\rho = 130\%$	0,033	0,076	0,165	0,390	0,796	1,131	1,527	1,317	2,181	3,078		
CIR Vega hedge		0,023	0,066	0,152	0,323	0,698	0,979	1,440	1,613	2,081	2,174	-0,001%	0,003%
VAS Vega hedge		0,024	0,069	0,161	0,344	0,752	1,054	1,551	1,738	2,242	2,342	0,000%	0,003%
CIR EWMA		0,011	0,032	0,055	0,087	0,205	0,156	0,497	0,440	0,758	0,745	-0,008%	0,007%
CIR MV		0,242	0,505	0,941	1,568	2,422	2,327	2,151	2,302	2,647	2,716	0,007%	0,006%
VAS EWMA		0,012	0,033	0,057	0,092	0,216	0,161	0,508	0,466	0,769	0,761	-0,008%	0,007%
VAS MV		0,361	0,765	1,435	2,426	3,821	3,854	3,871	3,887	3,971	3,921	0,018%	0,009%
Prêmio efetivo	$\rho = 160\%$	0,063	0,188	0,427	1,017	2,093	2,972	4,022	3,484	5,795	8,204		
CIR Vega hedge		0,056	0,163	0,375	0,795	1,719	2,410	3,546	3,973	5,126	5,356	-0,005%	0,009%
VAS Vega hedge		0,058	0,171	0,396	0,848	1,850	2,594	3,819	4,278	5,521	5,767	-0,003%	0,008%
CIR EWMA		0,028	0,078	0,136	0,214	0,504	0,384	1,224	1,083	1,865	1,835	-0,021%	0,020%
CIR MV		0,595	1,244	2,317	3,863	5,969	5,735	5,301	5,675	6,523	6,695	0,016%	0,015%
VAS EWMA		0,030	0,080	0,141	0,226	0,531	0,397	1,251	1,148	1,892	1,874	-0,021%	0,020%
VAS MV		0,889	1,884	3,532	5,973	9,408	9,489	9,530	9,571	9,778	9,654	0,041%	0,023%
Prêmio efetivo	$\rho = 200\%$	0,140	0,370	0,950	2,289	4,763	6,758	9,167	7,988	13,363	19,003		
CIR Vega hedge		0,116	0,340	0,781	1,657	3,584	5,024	7,396	8,286	10,694	11,173	-0,016%	0,024%
VAS Vega hedge		0,121	0,356	0,825	1,767	3,855	5,404	7,958	8,914	11,505	12,018	-0,012%	0,022%
CIR EWMA		0,059	0,162	0,283	0,446	1,050	0,800	2,552	2,256	3,888	3,824	-0,049%	0,048%
CIR MV		1,239	2,593	4,831	8,057	12,457	11,968	11,062	11,842	13,614	13,973	0,027%	0,035%
VAS EWMA		0,062	0,168	0,294	0,471	1,106	0,828	2,607	2,391	3,943	3,906	-0,049%	0,048%
VAS MV		1,853	3,925	7,359	12,448	19,610	19,780	19,865	19,950	20,382	20,122	0,081%	0,048%

representava grande parte do erro na estimativa do prêmio efetivo. Concluímos que faz sentido, pelas simulações realizadas, apreçar o ativo indexado ao percentual do CDI nos modelos de Vasicek e CIR utilizando-se a volatilidade implícita das opções do IDI e efetuando *hedge* de delta e vega. Ou seja, a estratégia permite o cálculo do preço da convexidade a ser pago por esse ativo e um método de *hedge* com opções de mercado para proteger esse prêmio.

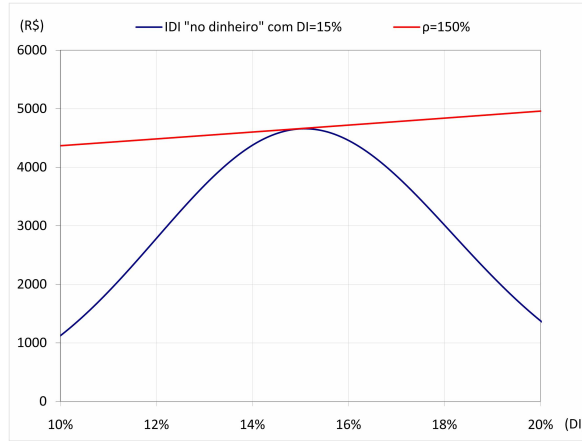
A figura 6.2 mostra simulações para diferentes percentuais do CDI. Observamos que de fato o resultado do *hedge* de delta e vega aproxima-se do prêmio efetivo. Para a série mais recente, porém, notamos que o resultado subestima um pouco o prêmio efetivo. Essa série foi a que mais sofreu o efeito da crise de 2008 (é a série mais longa no período de crise, quando os futuros de DI tiveram movimentos bruscos e chegaram a operar em limite de alta na BM&F, como por exemplo em 22 de outubro de 2008). Uma possível explicação para esse fato seria: a convexidade (gama) do ativo indexado ao percentual do CDI não é contingente a nenhum

preço de exercício (no caso Vasicek é fácil notar que a fórmula do fator de ajuste  $f$  independe do nível da taxa de juros, sugerindo gama constante), ao contrário da opção do IDI, que possui máximo gama para uma opção “no dinheiro”. Podemos observar isso na figura 6.3. Assim, para grandes movimentos da taxa de juros, o efeito do gama é muito diferente para esses dois ativos, agravado pelo fato do *hedge* ser discreto, o que aumentou o erro de rebalanceamento.

(a)  $\rho = 0.65$ (b)  $\rho = 1.30$ (c)  $\rho = 2.00$ 

**Figura 6.2:** Prêmios resultantes de diferentes simulações para operações de diferentes percentuais  $\rho$ , expostos por vencimento da operação e obtidos a partir do *hedge* de delta e vega.

Concluimos pela tabela e pelo gráfico que, utilizando o *hedge* de delta e vega, os modelos de Vasicek e CIR apresentam resultados muito parecidos. Pela maior tratabilidade da opção do IDI no modelo Vasicek e também devido à fórmula do prêmio de convexidade não depender do parâmetro de taxa média ( $\theta$ ), sendo portanto um parâmetro a menos para estimar, sugerimos a utilização do modelo Vasicek ao invés do CIR para o apreçamento do ativo indexado ao percentual do CDI.



**Figura 6.3:** Perfil do gama de um ativo indexado a 150% CDI e de uma opção do IDI “no dinheiro” (a uma taxa de juros de 15% a.a) em função das taxas de juros.

## Capítulo 7

### Conclusão

O risco de convexidade nas operações indexadas ao percentual do CDI é muitas vezes ignorado pelo mercado, embora seja facilmente detectado ao observarmos empiricamente que o resultado da carteira de delta nulo (ativo indexado ao percentual do CDI mais seu *hedge* de delta) é diferente de zero. O resultado dessa carteira pode então ser associado ao prêmio efetivo de convexidade, que é sabido uma vez que a operação atingiu seu vencimento (seguindo por exemplo um processo de rebalanceamento de delta diário). O problema, no entanto, reside em apreçar com antecedência e neutralizar o risco de convexidade no lançamento e durante a operação.

Este trabalho propôs uma fórmula analítica, pelos modelos de Vasicek e CIR, de apreçamento do prêmio de convexidade. Observamos que a fórmula que o mercado usa para apreçar o ativo indexado ao percentual do CDI desconsidera a realidade de taxas de juros estocásticas. Com isso, a fórmula do mercado acaba por ignorar o termo correto da variância quando o percentual do CDI é diferente de 100%. Pela nossa fórmula, o preço de convexidade depende dos parâmetros de velocidade de reversão à média e volatilidade para o modelo de Vasicek, acrescida do parâmetro de taxa média de longo prazo para o modelo de CIR. A análise de sensibilidade nos informa que o prêmio é tão maior conforme cresce o prazo da operação, a diferença do percentual em relação ao 100%, a volatilidade esperada durante o prazo da operação e conforme decresce a velocidade de reversão à média. Como exemplo da ordem de grandeza, para uma operação de 10 anos e 150% do CDI, em um cenário de volatilidade de 4% a.a. e velocidade de reversão de 50% a.a., o prêmio de convexidade é de 170 pontos básicos pelo modelo de Vasicek.

Como em qualquer fórmula de apreçamento, esbarramos na questão da previsão desses parâmetros. O que sugerimos então é que, em lugar de utilizar modelos de previsão e estimação dos parâmetros, é possível extrair essa informação a partir dos preços das opções do IDI, que dependem dos mesmos parâmetros e que carregam em si a expectativa do mercado. Obviamente que a volatilidade esperada não necessariamente será a volatilidade realizada. Isso pode ser contornado pelo *hedge* dinâmico de vega e delta utilizando os instrumentos de mercado

(opção do IDI e futuro de DI), de tal forma que a nova carteira de delta e vega nulo (ativo indexado ao percentual do CDI apreçado considerando-se a convexidade mais seu *hedge* de vega e delta) mais o prêmio pago/recebido produza resultados próximos de zero ao longo da vida da operação.

As simulações *ex-post* do *hedge* de vega e delta para operações de diferentes prazos e indexados a diferentes percentuais do CDI geraram boas aproximações do prêmio de convexidade efetivo, sugerindo que tanto a fórmula de apreçamento da convexidade quanto a escolha da opção do IDI para fins de *hedge* são satisfatórios. Infelizmente, por limitação dos dados, não pudemos executar testes estatísticos que pudessem concluir significativamente a eficácia do método proposto. A alternativa de usar o método de Monte Carlo conseguiria testar a fórmula, mas falha em não conseguir testar a aderência à distribuição real das taxas de mercado. Assim, optamos por realizar simulações com dados reais em lugar de simulações por Monte Carlo.

A simulação do *hedge* dinâmico necessitava de valores diários para os parâmetros das opções do IDI, o que poderia ser obtido pela calibração de seus preços diários. Tal tarefa, no entanto, esbarrou no problema da limitação de dados. Como conseguimos apenas séries de preços das opções do IDI “no dinheiro”, não foi possível obter todos os parâmetros implícitos. Tivemos então que optar por utilizar estimativas históricas para os parâmetros de reversão à média e taxa média extraídas das séries de taxas de juros de diferentes vencimentos, por máxima verossimilhança, retirando do mercado de opções de IDI apenas o parâmetro de volatilidade. Sabemos que dessa forma nossa estimação histórica não está na medida risco-neutro. A estimação desses parâmetros através da ETTJ tampouco é satisfatória, pois sabemos que isolar o preço de mercado do risco implica a especificação do seu formato, o que pode ser arbitrário. Daí o porquê da conveniência de se utilizar os parâmetros implícitos das opções do IDI, que já estão isolados do prêmio de risco. Na prática, esses preços são disponíveis para qualquer investidor e calibrá-los a fim de extrair todos os parâmetros implícitos não traz dificuldades.

Na prática podemos utilizar mais de uma opção para efetuar o *hedge* da convexidade do portfólio, e isso se mostra necessário ao analisar o comportamento do gama do portfólio composto pelo ativo indexado ao percentual do CDI e uma opção do IDI segundo a figura 6.3. Assim, poderíamos utilizar opções de vários preços de exercício para um mesmo vencimento, em diferentes quantidades, para manter o mesmo vega desejado porém obtendo um perfil de gama em função do nível do DI futuro mais constante.

Esse perfil de gama em função do nível do DI futuro do ativo indexado ao percentual do CDI é constante por se tratar de convexidade independente de preços de exercício (convexidade não contingente ao nível da taxa do DI futuro). Tal perfil de convexidade aparece também em

operações como o *swap* de variância de DI<sup>1</sup>. O *payoff* desse *swap* depende dos movimentos diários da taxa de juros, e também não possui convexidade contingente a um determinado nível de taxa de juros (ou seja, o *gamma* desse instrumento é constante para níveis da taxa do DI futuro).

Caso esse instrumento venha a ganhar liquidez no mercado brasileiro, seria o instrumento mais adequado para, após um estudo de sensibilidades, efetuar o *hedge* da convexidade dos ativos indexados ao percentual do CDI.

---

<sup>1</sup>O *payoff* da parte compradora de variância nesse *swap*, para principal unitário, é: Variância Realizada - Preço Operação, onde Variância Realizada é definida por  $\frac{252 \sum_{t=1}^N (\ln \frac{DI_t}{DI_{t-1}})^2}{N}$ .

## Referências

ABATE, Joseph, WHITT, Ward. Numerical inversion of Laplace transforms of probability distributions. **ORSA Journal on Computing**, v. 7, n. 1, p. 36-43, 1995.

AHN, Jaemin; KANG, S.; KWON, Y. A flexible inverse laplace transform algorithm and its application. **Computing**, v. 71, n. 2, p. 115-131, 2003.

AIT-SAHALIA, Yacine. Maximum likelihood estimation of discretely sampled diffusions: a closed-form approximation approach. **Econometrica**, v. 70, n. 1, p. 223-262, 2002.

ALMEIDA, Caio; VICENTE, José. Are interest rate options important for the assessment of interest rate risk? **Journal of Banking & Finance**, v. 33, n. 8, p. 1376-1387, 2009.

BARBEDO, C., VICENTE, J., LION, O. Pricing asian interest rate options with a three-factor HJM model. **Banco Central do Brasil Working Paper Series** 188, p. 1-33, 2009.

BELLMAN, Richard; KALABA, Robert; LOCKETT, Jo A. **Numerical Inversion of the Laplace Transform: Applications to Biology, Economics, Engineering and Physics**. American Elsevier, 1966.

BLACK, Fischer; SCHOLES, Myron. The Pricing of Options and Corporate Liabilites. **Journal of Political Economy**, v. 81, n. 3, p. 637-654, 1973.

BLACK, Fischer. The pricing of commodity contracts. **Journal of Financial Economics**, v. 3, n. 1-2, p. 167-179, 1976.

BLACK, Fischer; DERMAN, Emanuel; TOY, William. A one factor model of interest rates and its application to Treasury bond options. **Financial Analysts Journal**, v. 46, n. 1, p. 33-39, 1990.

BLACK, Fischer; KARASINSKI, Piotr. Bond and option pricing when short rates are lognormal. **Financial Analysts Journal**, vol. 47, n. 4, p. 52-59, 1991.

- BRANDT, Michael J.; SANTA-CLARA Pedro. Simulated Likelihood Estimation Of Diffusions With An Application To Exchange Rate Dynamics In Incomplete Markets. **Journal of Financial Economics**, v. 63, n. 2, p. 161-210, 2002.
- BRENNAN, Michael J.; SCHWARTZ, Eduardo S. Analyzing convertible bonds. **Journal of Finance and Quantitative Analysis** , v. 15, n. 4, p. 907-929, 1980.
- BRIGO, Damiano; MERCURIO, Fabio. **Interest Rate Models: Theory and Practice**. Springer, 2001.
- CHAN, K.C. et al. An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate. **Journal of Financial Economics**, v. 47, n. 3, p. 1209-1227, 1992.
- COX, John C.; INGERSOLL, Jonathan E.; ROSS, Stephen A. A Theory of the Term Structure of Interest Rates. **Econometrica**, v. 53, n. 2, p. 385-407, 1985.
- DOTHAN, Uri L. On the term structure of interest rates. **Journal of Financial Economics**, v. 6, n. 1, p. 59-69, 1978.
- DUFFEE, Gregory R. Term Premia and Interest Rate Forecasts in Affine Models. **The Journal of Finance**, v. 57, n. 1, p. 405-443, 2002.
- ELLIOTT, Robert J.; KOPP, P. Ekkehard. **Mathematics of financial markets**. Springer, 2005.
- FAJARDO, José S.F.; ORNELAS, José R.H. Apreçamento de opções de IDI usando o modelo CIR. **Estudos Econômicos**, v. 33, n. 2, p. 287-323, 2003.
- FU, Michael C., MADAN, Dilip B., WANG, Tong. Pricing Continuous Asian Options: A Comparison of Monte Carlo and Laplace Transform Inversion Methods. **Journal of Computational Finance**, v. 2, n. 2, p. 49-74, 1999.
- GEMAN, H., YOR, M. Bessel Processes, Asian Options and Perpetuities. **Mathematical Finance**, v. 3, n. 4, p. 349-375, 1993.
- HARRISON, Michael J.; KREPS, David M. Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. **Journal of Economic Theory**, v. 20, n. 3, p. 381-408, 1979.
- HARRISON, Michael J.; PLISKA, Stanley R. Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. **Stochastic Processes and their Applications**, v. 11, n. 3, p. 215-260, 1981.

HOOG, Frank R., KNIGHT, J. H., STOKES, A. N. An improved method for numerical inversion of Laplace transforms. **SIAM Journal of Scientific Computing**, v. 3, n. 3, p. 357-366, 1982.

HULL, John C.; WHITE, Alan. Pricing interest rate derivative securities. **Review of Financial Studies**, v. 3, n. 4, p. 573-592, 1990.

HULL, John C. **Options, Futures and Other Derivatives**. Prentice Hall, 2002.

JAMES, Jessica; WEBBER, Nick. **Interest Rate Modeling**. Wiley, 2000.

JUNIOR, Amaury F. et al. Application of Hull-White Model to Brazilian IDI Options. **Anais do Encontro da Sociedade Brasileira de Finanças**, 2003.

KLADÍVKO, Kamil. Maximum likelihood estimation of the Cox-Ingersoll-Ross process: the Matlab implementation. **Technical Computing Prague**, 2007.

LAMBERTON, Damien; LAPEYRE, Bernard. **An introduction to stochastic calculus applied to finance**. Chapman and Hall, 1995.

LEBLANC, Boris., SCAILLET, Olivier. Path dependent options on yields in the affine term structure model. **Finance and Stochastics**, v. 2, n. 4, p. 349-367, 1998.

LONGSTAFF, Francis A. A nonlinear general equilibrium model of the term structure of interest rates. **Journal of Financial Economics**, v. 23, p. 195-224, 1989.

MERTON, Robert C. The Theory of Rational Option Pricing, **Bell Journal of Economics and Management Science**, v. 4, n. 1, p. 141-183, 1973.

MUSIELA, Marek; RUTKOWSKI, Marek. **Martingale methods in financial modeling**. Springer, 2005.

NELSON, Daniel B.; RAMASWAMY, Krishna. Simple binomial processes as diffusion approximations in financial models. **The Review of Financial Studies**, v. 3, n. 3, p. 393-430, 1990.

PHILLIPS, Peter C.B.; YU, Jun. Maximum Likelihood and Gaussian Estimation of Continuous Time Models in Finance. In Andersen, Torben G. et al. **Handbook of Financial Time Series**, 2009, p. 497-530.

SILVA, M.E. Precificação de opções e futuros de taxa de juros no Brasil. **Resenha BMF**, 118, p. 21-35, 1997.

STEHFEST, Harald. Algorithm 368: Numerical Inversion of Laplace Transforms. **Communications of the ACM**, v. 13, n. 1, p. 47-49, 1970.

VASICEK, Oldrich. An equilibrium characterization of the term structure. **Journal of Financial Economics**, v. 5, n. 2, p. 177-188, 1977

VICENTE, José V. M. **Essays on Risk Regulation and on Affine Term Structure Models**. Rio de Janeiro, 2006. 120 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2006.

VIEIRA, Cícero A.; PEREIRA, Pedro L.V. Closed form formula for the price of the options on the 1 day Brazilian Interfinancial Deposits Index - IDI. **Anais do XXII Congresso Brasileiro de Econometria**, 2000.

## Apêndice A

### Modelo de Black

Embora existam os modelos específicos para renda fixa, o mercado utiliza como convenção o modelo de Black (1976), razão pela qual é apresentado neste apêndice.

Neste modelo, assume-se que o preço do título é lognormal e tem desvio padrão  $\sigma\sqrt{T-t}$ .

Em Hull (2003), o preço da opção de compra do título é dado por

$$C_t = B(t, T) \{ F_B(t, T, U) N(d_1) - KN(d_2) \}$$

onde  $N(\cdot)$  representa a função normal padronizada acumulada,  $F_B(t, T, U)$  é o preço a termo em  $t$  do título vencendo em  $U$  para entrega em  $T$  e

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F_B(t, T, U)}{K}\right) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

No nosso caso,  $F_B(t, T, U)$  representa o futuro de DI a termo e o IDI a termo, todos em preço (em contraposição à taxa).