



FACULDADE IBMEC SÃO PAULO

Programa de Mestrado Profissional em Economia

Denis Eduardo Pereira

**CÓPULAS - UMA ALTERNATIVA PARA A ESTIMAÇÃO DE
MODELOS DE RISCO MULTIVARIADOS**

**São Paulo
2006**

Denis Eduardo Pereira

Cópuas - uma alternativa para estimação de modelos de risco multivariados.

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Economia da Faculdade Ibmec São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Economia.

Área de concentração: Finanças e Macroeconomia Aplicadas.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Luiz Valls Pereira – IBMEC SP.

**São Paulo
2006**

Pereira, Denis Eduardo

Copulas - uma alternativa para estimação de modelos de risco multivariados/Denis Eduardo Pereira; orientador Pedro Luiz Valls Pereira . – São Paulo: Ibmecc São Paulo, 2006.

59 f.

Dissertação (Mestrado – Programa de Mestrado Profissional em Economia: Área de Concentração: Finanças e Macroeconomia Aplicadas) - Faculdade Ibmecc São Paulo.

1. Cópulas 2. Medidas de risco 3. Finanças

FOLHA DE APROVAÇÃO

Denis Eduardo Pereira

Cómulas - uma alternativa para estimação de modelos de risco multivariados

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Economia Ibmec São Paulo, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Economia.

Área de concentração: Finanças e Macroeconomia Aplicadas.

Aprovado em: Outubro/2006

Banca Examinadora

Prof. Dr. Pedro Luiz Valls Pereira
Instituição : Ibmec São Paulo

Assinatura _____

Prof. Dr. Eurilton Alves Araújo Jr.
Instituição : Ibmec São Paulo

Assinatura _____

Prof. Dr. Luiz Koodi Hotta
Instituição : IMECC- UNICAMP

Assinatura _____

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Pedro Luiz Valls Pereira, por todo o aprendizado o qual ele me proporcionou durante todo o curso e principalmente na ajuda desta dissertação.

Agradeço a todos os membros de minha família, em especial minha mãe Rosângela, meu irmão Adriano e a meu pai José Eduardo, que agüentaram todo o meu mau humor, minha ausência e falta de dedicação a todos eles.

Agradeço também a minha futura esposa, atualmente minha noiva, Úrsula, por toda a paciência, Amor e dedicação nestes anos difíceis que fizeram parte da minha vida, e que fazem parte da vida de qualquer mestrando.

Agradeço também ao Banco Itaú, na figura do superintendente Affonso Tácio Jr., pelo incentivo e patrocínio do curso.

Agradeço também a todos os meus colegas do mestrado, que mais do que amigos tornaram-se para mim uma família, a todos: Aduino, Antonio (EPGE), Careca, Douglas, Edson (Alcides), Juan, Juliana, Giovanna, Marcel, Rogério e Theodore. A todos, o meu muito obrigado.

Agradeço a todos os professores do mestrado, pela dedicação, amizade e respeito, em especial ao Marcio Laurini pela ajuda em todos os momentos nas atividades computacionais. Inclusive por me ter mostrado o software R- Metrics.

Agradeço a Helder Palaro que, mesmo sem me conhecer forneceu-me os seus códigos em Matlab, códigos estes que me ajudaram a entender como proceder na programação das cópulas.

Agradeço aos professores Luiz Koodi Hotta e Eurílton Araujo, por suas participações na banca examinadora e por todos os comentários altamente relevantes que vieram a engrandecer este trabalho.

RESUMO

PEREIRA, Denis Eduardo. **Cópuas - uma alternativa para estimação de modelos de risco multivariados**, 2006. 59f. Dissertação (Mestrado) – Faculdade Ibmecc São Paulo, São Paulo, 2006.

Dentre os principais desafios enfrentados no cálculo de medidas de risco de *portfólios* está em como agregar riscos. Esta agregação deve ser feita de tal sorte que possa de alguma forma identificar o efeito da diversificação do risco existente em uma operação ou em um *portfólio*.

Desta forma, muito tem se feito para identificar a melhor forma para se chegar a esta definição, alguns modelos como o Valor em Risco (VaR) paramétrico assumem que a distribuição marginal de cada variável integrante do *portfólio* seguem a mesma distribuição, sendo esta uma distribuição normal, preocupando-se apenas em modelar corretamente a volatilidade e a matriz de correlação. Modelos como o VaR histórico assume a distribuição real da variável e não se preocupam com o formato da distribuição resultante multivariada.

Assim sendo, a teoria de Cópuas mostra-se uma grande alternativa, à medida que esta teoria permite a criação de distribuições multivariadas sem a necessidade de se supor qualquer tipo de restrição às distribuições marginais e muito menos às multivariadas.

Neste trabalho iremos abordar a utilização desta metodologia em confronto com as demais metodologias de cálculo de Risco, a saber: VaR multivariados paramétricos - VEC, Diagonal, BEKK, EWMA, CCC e DCC- e VaR histórico para um *portfólio* resultante de posições idênticas em quatro fatores de risco – Pre252, Cupo252, Índice Bovespa e Índice Dow Jones.

Palavras-chave: Cópuas; Risco; Valor em Risco; Modelos Multivariados; *Expected Shortfall*.

Abstract

PEREIRA, Denis Eduardo. **Cópuas - an alternative to multivariate models for risk estimation**, 2006. 59f. Dissertation (Mastership) Faculdade Ibmec São Paulo, São Paulo, 2006.

The biggest challenge in portfolio's risk measures is to find the best way to aggregate risks. This aggregation should be done in the way where we can identify the diversification effect recognized in either asset position or portfólio.

For instance, a lot of things has been done for create this definition, for example a Value at Risk (VaR) in the parametric approach uses of an assumption where all the risk factors follow the same marginal distribution, it will be a normal distribution. In this approach volatility and correlation matrix are the most important things for modeling correctly this dependence. In Historical Simulation approach, this method can be through of as estimating the distribution of the loss operator under the empirical distribution, so statistical estimation of the multivariate distribution is not necessary.

In this case, the Copulas Theory provides a useful alternative because this approach allows us to create no multivariate distribution where no assumption is necessary for a neither marginal distribution or multivariate distribution.

In this work, we are comparing this methodology with another risk measures approach for example: Multivariate parametric model's VaR and an Expected Shortfall – Diagonal VEC, BEKK, EWMA, CCC, DCC – and Historical approach for VaR and ES. For this work we create a portfolio with identical position for all the factor and this factor will be: one year internal interest rate (Pré252), one year external interest rate (Cupom cambial 252), Bovespa Index, Dow Jones Index.

Keywords: Copulas; Risk; Value at Risk; Multivariate Models; Expected Shortfall.

Sumário

1 - Introdução	11
2 – Modelos de risco Mercado.....	12
2.1 Introdução.....	12
2.2 -Valor em Risco (<i>VaR</i>)	12
2.3 -Valor em Risco – Cálculo de <i>Portfolios</i>	13
2.4 - Expected Shortfall.....	17
3 - Modelos Univariados.....	18
3.1 - ARCH/GARCH.....	18
3.2 - Modelos assimétricos de volatilidade	19
3.2.1 - EGARCH	20
3.2.2 - TGARCH	20
3.2.3 - PGARCH.....	21
4 - Modelos Multivariados.....	22
4.1 - Modelos GARCH Multivariados	22
4.2 - Modelo VEC	23
4.3 - Modelo diagonal.....	24
4.4 - BEKK.....	25
4.5 - EWMA	26
4.6 - Modelo de Correlação Constante (CCC)	27
4.7 - Modelo de Correlação Dinâmica (DCC).....	28
5 - Teoria de Cópulas.....	29
5.1 - Introdução	29
5.2 - Medidas de dependência	32
5.2.1 - Tau de Kendall	34
5.2.2 - Rho Spearman	35
5.3 - Cópulas arquimedianas	37
6 - Aplicação.....	39
6.1 - Descrição de séries	39
6.2 - Descrição da amostra	39
6.3 - Análise Exploratória dos Dados	40
6.4 - Calculo do <i>VaR</i> e do <i>ES</i>	48
6.4.1 – Modelos multivariados	48
6.4.2 – Modelos multivariado – Modelo de correlação dinâmica (DCC)	49
6.4.3 – Modelos multivariado – <i>VaR</i> Calculado pela Teoria de Cópulas	49
6.4.4 – Modelos multivariado – <i>VaR</i> Histórico	50
6.4.5 – Análise do <i>Backtesting</i> para o <i>VaR</i>	50
6.4.6 – Análise do <i>Backtesting</i> para o <i>Expected Shortfall</i>	53
Conclusão	56
Referências bibliográficas	57

Lista de tabelas

Tabela 5-1: fatores geradores de Cópulas arquimedianas.....	37
Tabela 6.1 – Estatística Descritiva das séries utilizadas.....	41
Tabela 6.2 – Critério de informação de Akaike.....	43
Tabela 6.3 – Melhores modelos de volatilidade.....	46
Tabela 6.4 – Proporção dos dados em que a perda excede o VaR de 97,5% para cada cauda, para o total e seus respectivos p-valores.....	51
Tabela 6.5 – Proporção dos dados em que a perda excede o VaR de 99,5% para cada cauda, para o total e seus respectivos p-valores.....	52
Tabela 6.6 – P-valor para os modelos estimados para Expected Shortfall referente a um VaR de 95% IC.....	54
Tabela 6.7 – P-valor para os modelos estimados para Expected Shortfall referente a um VaR de 99% IC.....	55

Lista de figuras

Figura 4.1 - Quantidade de parâmetros necessários para a estimação do VEC.....	23
Figura 4.2 - Quantidade de parâmetros necessários para a estimação do Modelo Diagonal ...	24
Figura 4.3 - Quantidade de parâmetros necessários para a estimação do Modelo BEKK	26
Figura 5.1 - Gráfico de contorno para cópulas Arquimedianas.....	38
Figura 6.1- Gráfico dos retornos das séries estudadas.....	42
Figura 6.2 - ACF dos resíduos padronizados de Dow Jones por PGARCH(1,1) c/dist t.....	44
Figura 6.3 - ACF dos resíduos padronizados de Ln 252 por EGARCH c/dist t AR(1)	44
Figura 6.4 - ACF dos resíduos padronizados de Índice Bovespa por TGARCH c/dist t AR(1)	45
Figura 6.6 - ACF dos resíduos padronizados de Dow Jones por GARCH(1,2).....	46
Figura 6.7 - QQ Plot (distribuição t) : Dow Jone, Ibovespa, LN252 e Cupom 252	47

1 - Introdução

O desenvolvimento da teoria de riscos foi iniciado a partir da criação da Moderna Teoria das Finanças onde Harry Markowitz, através de artigo intitulado *Portfolio Selection*, mostrou a forma de se mensurar o risco e o retorno de um portfólio. Daí então muito foi feito pelo meio acadêmico, tanto para a mensuração de retornos quanto de risco. Em meados de 1995 o JP Morgan divulgou ao mercado uma nova forma de mensuração do risco de mercado, até então as instituições financeiras utilizavam-se de metodologias lineares, ou seja, baseado apenas em choques do tipo PVBP¹, onde através da suposição de que as variáveis do mercado apresentava um processo estocástico que seguia uma distribuição normal, criou-se uma medida de risco chamada de Valor em Risco (*Value at Risk - VaR*), esta medida pela sua simplicidade no cálculo e pelo seu forte arcabouço teórico acabou sendo adotado pelas principais Instituições Financeiras do mundo, sendo a seguir também adotado pelos órgãos reguladores.

Desta forma, a partir das críticas ao modelo original, foram surgindo novas formas de mensuração desta medida, ora modelando com mais parcimônia a volatilidade e a correlação, ora tratando com mais rigor as distribuições marginais. À luz desta modelagem mais rigorosa no controle das distribuições marginais, a Teoria de Cópulas surgiu como uma possível alternativa, este será um dos temas deste trabalho.

Desta forma, para tentarmos de alguma forma cobrir todos estes pontos dividimos o trabalho da seguinte forma: a primeira parte será formada pelos alicerces dos cálculos de risco – *Value at Risk (VaR)*, *Expected Shortfall (ES)*- a segunda parte pela definição de modelos de univariados e multivariados, a seguir uma breve descrição da teoria de cópulas mostrando os principais teoremas, bem como todo o seu arcabouço matemático.

O trabalho será finalizado através de um estudo comparativo das diversas formas de mensuração do *VaR* desde as formas tradicionais – *VaR* histórico, *VaR* paramétrico e *VaR* por Simulação de Monte Carlo – menos usuais como *VaR* criado pelo modelo de Correlação dinâmica (DCC) e *VaR* calculados pela teoria de Cópulas.

¹ PVBP – *Present Value of Bases Point*, maiores informações acerca do assunto ver JP Morgan (1995)

2 – Modelos de risco Mercado.

2.1 Introdução

Podemos definir risco como o potencial de desvio dos retornos esperados, particularmente desvios adversos. Por trás de cada risco de fluxo de caixa futuro, resultado financeiro ou mudanças de valores pode-se associar uma distribuição de probabilidade a estes resultados potenciais. A magnitude relativa do risco pode ser definida pelo montante do *spread* ou da dispersão na distribuição dado o desvio padrão ou variância.

Todavia, a variância não é necessariamente suficiente para capturar os riscos – duas distribuições com diferentes formatos diferem de forma considerável dos valores do risco de queda (*downside risk*) podendo ter a mesma variância.

Medidas como assimetria e curtose podem ser utilizadas para mostrar que o risco pode não ser adequadamente descrito somente pela variância. Outra forma de análise é examinar os percentis das distribuições, como exemplos têm: o *VaR* e o *ES*. Estes conceitos serão discutidos a seguir.

2.2 -Valor em Risco (VaR)

Em meados de 1995 o Banco JP Morgan divulgou o artigo intitulado “Riskmetrics” onde descrevia a forma de mensurar o risco de mercado em um único número, para tanto utilizava a premissa de normalidade das séries financeiras, o que pela facilidade de implementação permitiu a medida tornar-se um padrão pelas instituições financeiras.

Podemos definir o *VaR* de um portfolio a nível de confiança $\alpha \in (0,1)$ como sendo o menor número ℓ tal que a probabilidade de uma perda L exceder ℓ é no máximo $(1 - \alpha)$, isto é,

$$VaR_{\alpha} = \inf\{x \in \Re \mid F_L(x) \geq \alpha\} = F_L^{-1}(\alpha) = q_{\alpha}(F_L). \quad \text{Equação 2.1}$$

onde α é tipicamente um número entre 0,95 e 1, F_L é a função de densidade acumulada das perdas L e $q_{\alpha}(F_L)$ é α -ésimo quantil da distribuição das perdas.

Jorion (2001) define o *VaR* como: *VaR summarizes the expected maximum loss over a target horizon within a given confidence interval.*

Tsay (2002) define o *VaR* sobre dois pontos de vista, um pelo lado das instituições financeiras, no qual define o *VaR* como uma medida de perda associada a um evento raro (ou extraordinário) em condições normais de mercado, outro pelo lado dos órgãos reguladores o *VaR* é definido como a mínima perda dado circunstâncias extraordinárias de mercado.

A especificação amplamente utilizada, descrita pelo *RiskmetricsTM*, JPMorgan(1995), simplifica de forma considerável ao supor que a distribuição das perdas segue uma normal com média μ e variância σ^2 denotada por $N(\mu, \sigma^2)$, cuja função de densidade é dada por:

$$f(x) = \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2\right]. \quad \text{Equação 2.2}$$

E a função de distribuição acumulada dada por

$$\Phi(x) = F_L(x) = \int_{-\infty}^x \phi(z) dz. \quad \text{Equação 2.3}$$

Desta forma, podemos reescrever o *VaR* da seguinte forma

$$VaR_\alpha = \mu + \sigma \Phi^{-1}(\alpha). \quad \text{Equação 2.4}$$

2.3 - Valor em Risco – Cálculo de *Portfolios*

A principal forma de mensurar o risco de um *portfolio*² foi sugerido por Markowitz(1952) através da análise de média variância. Para entender melhor, o conceito iremos supor um *portfolio* de investimento em três ativos quaisquer, sendo que o retorno de cada ativo será respectivamente r_x, r_y e r_z , com as seguintes alocações w_x, w_y e w_z , que somam um. O retorno do *portfolio* será dado por $r_p = w_x r_x + w_y r_y + w_z r_z$, com média igual a:

² Algumas carteiras de investimento (*Portfolios*) são formadas pela junção de posições em ativos diversos, logo se faz necessário criar formas de mensurar o risco e o retorno destes investimentos.

$$\mu_p = \mu_x r_x + \mu_y r_y + \mu_z r_z. \quad \text{Equação 2.5}$$

E variância dado por:

$$\sigma_p^2 = w_x^2 \sigma_x^2 + w_y^2 \sigma_y^2 + w_z^2 \sigma_z^2 + 2w_x w_y \sigma_{x,y} + 2w_x w_z \sigma_{x,z} + 2w_y w_z \sigma_{y,z}. \quad \text{Equação 2.6}$$

Onde σ_i^2 é a variância do retorno do ativo i , $\sigma_{i,j}$ é a covariância entre os retornos dos ativos i e j .

Sendo o $q_\alpha(F_p) = F_p^{-1}(\alpha)$ o α -quantil da distribuição do *portfolio* dos retornos.

Temos pela equação 2.4 que

$$VaR_\alpha = \mu_p + \sigma_p F_p^{-1}(\alpha). \quad \text{Equação 2.7}$$

Resolvendo para $F_p^{-1}(\alpha)$ na equação (2.7), temos então qual o quantil mensurado em termos do número de desvios-padrões a partir da média é dado por $(VaR_\alpha - \mu_p) / \sigma_p$.

Substituindo a volatilidade do *portfolio*, Equação 2.6 na equação do *VaR* equação 2.7, temos

$$VaR_\alpha = \mu_p + \sqrt{w_x^2 \sigma_x^2 + w_y^2 \sigma_y^2 + w_z^2 \sigma_z^2 + 2w_x w_y \sigma_{x,y} + 2w_x w_z \sigma_{x,z} + 2w_y w_z \sigma_{y,z}} * [F_p^{-1}(\alpha)]' \quad \text{Equação 2.8}$$

$$VaR_\alpha = \mu_p + \sqrt{w_x^2 \sigma_x^2 [F_p^{-1}(\alpha)]^2 + w_y^2 \sigma_y^2 [F_p^{-1}(\alpha)]^2 + w_z^2 \sigma_z^2 [F_p^{-1}(\alpha)]^2 + 2w_x w_y \sigma_{x,y} [F_p^{-1}(\alpha)]^2 + 2w_x w_z \sigma_{x,z} [F_p^{-1}(\alpha)]^2 + \dots}$$

A equação 2.8 nos mostra como podemos escrever o *VaR* em termos dos segundos momentos dos retornos marginais e do inverso da Função Distribuição Acumulada (FDA) do retorno do *portfolio*. O quantil $F_p^{-1}(\alpha)$ pode ser visto como fator de escala de cada volatilidade.

Iremos agora supor que os quantis individuais dos retornos padronizados são os mesmos para todos os retornos pertencentes ao portfólio, ou seja, $F_p^{-1}(\alpha) = F_x^{-1}(\alpha) = F_y^{-1}(\alpha) = F_z^{-1}(\alpha)$. Por exemplo, a família das distribuições elípticas, na qual a distribuição normal faz parte, satisfaz esta condição. Generalizando, esta igualdade será satisfeita quando as distribuições do *portfolio* e as distribuições marginais forem da mesma família de densidade.

Dada esta igualdade, podemos escrever o *VaR* de um *portfolio*, no qual iremos chamar de *H-VaR* (H para híbrido), como :

Equação 2.9

$$H - VaR = \mu_p + \sqrt{w_x^2 \sigma_x^2 [F_x^{-1}(\alpha)]^2 + w_y^2 \sigma_y^2 [F_y^{-1}(\alpha)]^2 + w_z^2 \sigma_z^2 [F_z^{-1}(\alpha)]^2 + 2w_x w_y \sigma_{x,y} [F_x^{-1}(\alpha)] [F_y^{-1}(\alpha)] + \dots}$$

$$H - VaR = \mu_p + \sqrt{w_x^2 [VaR_x(\alpha) - \mu_x]^2 + w_y^2 [VaR_y(\alpha) - \mu_y]^2 + w_z^2 [VaR_z(\alpha) - \mu_z]^2 + 2w_x w_y [VaR_x(\alpha) - \mu_x] [VaR_y(\alpha) - \mu_y] + \dots}$$

A equação 2.9 mostra que o *VaR* de um *portfolio* pode ser calculado usando a mesma fórmula da volatilidade de um *portfolio*, no qual o *VaR* menos a média substitui a cada volatilidade. Se calcularmos *H-VaR* quando as distribuições marginais provém de diferentes famílias de densidades, então algumas volatilidade podem estar superestimando ou subestimando o valor do *VaR* em relação ao valor real. O diferença irá depender da relação entre os quantis marginais, volatilidade e o quantil do *portfolio*.

Note-se, por outro lado, que o *H-VaR* permite que o formato das caudas das marginais afetem na estimação do *VaR* do *portfolio*.

A equação 2.8 pode ser simplificada de forma considerável quando os retornos individuais são não correlacionados, ou seja, $\sigma_{i,j} = 0 \forall i, j$. Logo,

$$VaR_\alpha = \mu_p + \sqrt{w_x^2 [VaR_x(\alpha) - \mu_x]^2 + w_y^2 [VaR_y(\alpha) - \mu_y]^2 + w_z^2 [VaR_z(\alpha) - \mu_z]^2}$$

Quando os riscos são perfeitamente correlacionados ($\rho_{i,j} = 1 \forall i, j$), aonde $\rho_{i,j}$ é a correlação entre i e j), logo a equação 2.9 torna-se:

$$\begin{aligned} Ad - VaR &= \mu_p + w_x(VaR_x(\alpha) - \mu_x) + w_y(VaR_y(\alpha) - \mu_y) + w_z(VaR_z(\alpha) - \mu_z) \\ &= w_x VaR_x(\alpha) + w_y VaR_y(\alpha) + w_z VaR_z(\alpha) \end{aligned} \quad \text{Equação 2.10}$$

Onde *Ad-VaR* refere-se ao *VaR* aditivo. Quando a correlação é menor do que um, esperamos que o *Ad-VaR* superestime o *VaR*. Como o *H-VaR*, o *Ad-VaR* permite que o formato da cauda da distribuição marginal dos retornos afete a estimação da estimação do *VaR* do *portfolio*.

Outro caso especial da equação 2.10 é obtido assumindo que a distribuição do *portfolio* segue uma distribuição normal multivariada. Logo, dado que as distribuições marginais são normais, e *VaR* normal (*N-VaR*) possui quantis padronizados dado pela inversa da função de distribuição acumulada ($\Phi^{-1}(\alpha)$),

$$\begin{aligned} N - VaR &= \mu_p + \\ &\sqrt{w_x^2 \sigma_x^2 [\Phi^{-1}(\alpha)]^2 + w_y^2 \sigma_y^2 [\Phi^{-1}(\alpha)]^2 + w_z^2 \sigma_z^2 [\Phi^{-1}(\alpha)]^2 + 2w_x w_y \sigma_{x,y} [\Phi^{-1}(\alpha)] [\Phi^{-1}(\alpha)] + \dots} \end{aligned} \quad \text{Equação 2.11}$$

Claramente podemos verificar que o *N-VaR* apenas será usado se a função de densidade probabilidade conjunta for uma normal multivariada. *N-VaR* normalmente irá falhar quando uma ou mais distribuições marginais exibirem significante assimetria e ou excesso de curtose. Neste caso, o quantil calculado por uma distribuição normal irá subestimar o valor real do quantil da densidade marginal.

Evidentemente, a similaridade de cada aproximação de *VaR* (híbrido, aditivo e normal) ao *VaR* real irá depender da validade de suas premissas.

Estas aproximações possuem uma mesma restrição que é, o tipo de distribuição utilizada para o cálculo do quantil do *portfolio* deve ser a mesma das marginais.

Desta forma, quando $F_p^{-1}(\alpha) \neq F_x^{-1}(\alpha) \neq F_y^{-1}(\alpha) \neq F_z^{-1}(\alpha)$, não podemos usar a equação 2.11 quando $F_p^{-1}(\alpha)$ é desconhecida. Para obtermos o valor correto de *VaR* do *portfolio*, necessitamos obter a distribuição conjunta dos retornos do *portfolio*. A Teoria de Cópulas nos permitirá resolver este problema por meio da combinação das distribuições

marginais específicas com a função de dependência. No capítulo 5 iremos detalhar o conceito, bem como as suas propriedades.

2.4 - Expected Shortfall

Devido ao fato VaR não ser uma medida coerente de risco Artzner et al (1997), sugeriu um nova medida de risco, que não apresentava esta falha. Para analisarmos esta medida, iremos primeiramente explicar o que vem a ser uma medida coerente de risco.

No artigo de Artzner et al (1997) através de uma abordagem axiomática, apresentaram certos atributos que definem uma medida satisfatória de risco, a estas chamaram de “uma medida coerente de risco”, sobre o assunto Alexander (2001) explica que:

“Uma medida coerente de risco ρ atribui a cada perda LX uma medida de risco $\rho(L)$ de modo que as seguintes condições sejam verificadas:

1. O risco é monotônico: se $L_1 \geq L_2$, então $\rho(L_1) \geq \rho(L_2)$;
2. O risco é homogêneo: $\rho(tL) = t\rho(L)$ para todo $t > 0$;
3. Condição livre de risco: $\rho(L+l) = \rho(L)+l$, em que $l \in \mathfrak{R}$.
4. O risco é subaditivo: $\rho(L_1 + L_2) \leq \rho(L_1) + \rho(L_2)$ ”

Estes atributos garantem uma função de risco convexa, ou seja, uma aversão ao risco.

Desta forma, Artzner et al (1997) argumentam que o VaR não é uma medida coerente de risco pois que o VaR viola a condição 4, que é a subaditividade; ou seja, a soma dos riscos individuais deverá sempre criar um efeito de redução do risco total, pois caso contrário não existiria incentivos para a diversificação de *portfólios*.

Por conseguinte, Artzner et al(1999) introduziram uma medida de risco a qual chamaram de VaR Condicional, conhecida também como *Expected Shortfall(ES)*. Esta medida pode ser considerada uma medida coerente de risco, pois, não viola nenhuma das propriedades. Adicionando a este fato a medida é possui uma relação simples com o VaR , a medida que o (ES) é caracterizada pela perda esperada, dado que esta excede ao VaR .

$$ES_{\alpha} = E[L | L \geq VaR_{\alpha}]. \quad \text{Equação 2.12}$$

Desta forma, o ES pode ser calculado por:

$$ES_{\alpha} = \mu + \sigma \frac{\phi(z)}{1 - \Phi(z)}. \quad \text{Equação 2.13}$$

Onde

- $z = \Phi^{-1}(\alpha) = F^{-1}(\alpha) = \frac{(VaR_{\alpha} - \mu)}{\sigma}$

3 - Modelos Univariados

3.1 - ARCH/GARCH

Podemos assumir que a serie de retornos é decomposta em duas partes: um componente previsível e um componente não previsível. Isto é:

$$Y_t = E[r_t | I_{t-1}] + \varepsilon_t. \quad \text{Equação 3.1}$$

onde I_{t-1} representa toda informação até o período t-1 e ε_t é a parte não previsível.

O retorno médio condicional é um processo autoregressivo de ordem k, AR(k):

$$E(y_t | I_{t-1}) \equiv c_0 + \sum_{i=1}^k c_i y_{t-i}. \quad \text{Equação 3.2}$$

O componente não previsível ε_t pode ser descrito como um processo ARCH com:

$$\varepsilon_t = z_t \sigma_t . \quad \text{Equação 3.3}$$

onde $z_t \sim \text{NI}(0,1)$ e a Variância condicional de z_t é igual a σ_t^2 .

No modelo ARCH(q) introduzido por Engle (1982) a variância condicional é expressa como uma combinação linear do quadrado de q componentes passados não previsíveis:

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i \varepsilon_{t-i}^2 . \quad \text{Equação 3.4}$$

Como geralmente é necessário um q elevado para se chegar a uma boa estimativa da variância condicional normalmente utiliza-se um processo GARCH(p,q):

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p b_j \sigma_{t-j}^2 . \quad \text{Equação 3.5}$$

3.2 - Modelos assimétricos de volatilidade

Apesar da popularidade do modelo GARCH hoje em dia, ele apresenta algumas deficiências sendo a principal dela as respostas simétricas a choques positivos ou negativos. Foram introduzidas modificações no modelo GARCH para que fosse possível acomodar este fato estilizado a saber, da volatilidade tender a aumentar com notícias ruins ($\varepsilon_t < 0$) e diminuir com notícias boas ($\varepsilon_t > 0$).

Com o objetivo de modelar este comportamento assimétrico é necessário a utilização de outra categoria de modelos: modelos ARCH assimétricos. Neste trabalho iremos adotar os mesmos modelos disponíveis no pacote Finmetrics do S-Plus, ou seja: EGARCH, TGARCH e PGARCH.

3.2.1 - EGARCH

Nelson (1991) propôs o GARCH exponencial, onde o efeito de alavancagem está presente. A especificação do modelo é dada por:

$$Ln(\sigma_t^2) = \omega + \sum_{i=1}^q \left(\alpha_i \left| \frac{\varepsilon_{t-i}}{\sigma_{t-i}} \right| + \gamma_i \frac{\varepsilon_{t-i}}{\sigma_{t-i}} \right) + \sum_{j=1}^p (\beta_j Ln(\sigma_{t-j}^2)). \quad \text{Equação 3.6}$$

Um ponto importante no modelo EGARCH é a não necessidade de se impor restrições nos parâmetros a serem estimados pelo modelo já que a transformação logarítmica garante que as estimativas da Variância não sejam negativas. O efeito de alavancagem está refletido nos parâmetros gama γ 's. O efeito é explicado através do sinal do resíduo ε_{t-i} , a medida que quando é positivo (“notícias boas”) o efeito total é de $(\alpha_i + \gamma_i)|\varepsilon_{t-i}|$, por outro lado quando o sinal é negativo (“notícias ruins”), aonde o efeito total é $(\alpha_i - \gamma_i)|\varepsilon_{t-i}|$, ou seja notícias ruins terão impactos maiores na volatilidade, uma vez que o valor de γ é negativo.

3.2.2 - TGARCH

O modelo TGARCH, também conhecido como GJR³ propõe uma solução para a modelagem do efeito de alavancagem via a utilização de limiares (*thresholds*). A especificação do modelo é dada por:

³ GJR- iniciais do nome dos autores de Glosten, Jagannathan e Runkle (1993).

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p (\alpha_i \varepsilon_{t-i}^2) + \sum_{i=1}^p (\gamma_i S_{t-i} \varepsilon_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^q (\beta_j \sigma_{t-j}^2). \quad \text{Equação 3.7}$$

onde

$$S_{t-i} = \begin{cases} 1 & \text{se } \varepsilon_{t-i} < 0 \\ 0 & \text{se } \varepsilon_{t-i} \geq 0 \end{cases}$$

Portanto o efeito alavancagem depende do valor do resíduo ε_{t-i} estar abaixo do valor do limiar (*threshold*), neste caso (“notícias ruins”), tem um efeito dado por $(\alpha_i + \gamma_i)\varepsilon_{t-i}^2$, ou seja notícias ruins terão impactos maiores e caso o ε_{t-i} esteja acima do valor do limiar, neste caso “notícias boas“, o efeito será dado por $\alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$, que terão um impacto menor na volatilidade.

3.2.3 - PGARCH

O modelo PGARCH, proposto por Ding, Granger e Englen(1993) como uma solução para a modelagem do efeito de alavancagem através de um modelo de potência

$$\sigma_t^d = a_0 + \sum_{i=1}^p (a_i |\varepsilon_{t-i}| + \gamma_i \varepsilon_{t-i})^d + \sum_{j=1}^q (b_j \sigma_{t-j}^d). \quad \text{Equação 3.8}$$

onde:

- d : é um expoente positivo
- γ_i : é o coeficiente de alavancagem

4 - Modelos Multivariados

Neste capítulo iremos generalizar os modelos de volatilidade univariados para modelos multivariados. Os modelos multivariados possuem grande importância em Finanças e na macroeconometria, haja vista que as variáveis econômico-financeiras possuem uma relação entre si logo a modelagem destas sem a influência das demais se torna ineficaz.

Sobre o assunto Franses, Van Dijk (2000, p.200) comentam,

Given the interpretation of shocks as news and the fact that at least certain news item affect various assets simultaneously, it might be suggest that the volatility of different assets moves together over time. Consequently, it is of interest to consider multivariate models to describe the volatility of several time series jointly, to exploit possible linkage, which exist. An alternative motivation for multivariate models is that an important subject of financial economics is the construction of portfolios from various assets.

4.1 - Modelos GARCH Multivariados

Os modelos GARCH multivariados podem ser usados para modelar as matrizes de covariâncias variáveis no tempo (*time-varying covariance*).

O modelo GARCH multivariado na forma geral k-dimensional $\mathcal{E}_t = (\mathcal{E}_{1t}, \dots, \mathcal{E}_{kt})'$ é dado por :

$$\mathcal{E}_t = z_t H_t^{1/2} . \quad \text{Equação 4.1}$$

onde $z_t \sim NI_k[0, I]$, $E[\mathcal{E}_t | \Omega_{t-1}] = 0$ e $E[\mathcal{E}_t \mathcal{E}_t' | \Omega_{t-1}] = H_t$

Assim sendo, o ponto crucial da modelagem consiste na estimação dos parâmetros da matriz de covariância H_t , logo os modelos multivariados procuram de alguma forma estimar a matriz de covariância.

4.2 - Modelo VEC

Este modelo, proposto por Engle e Kroner(1995) é um modelo muito flexível pois permite que todos os elementos de H_t sejam dependente dos produtos cruzados de ε_{t-1} e dos elementos da matriz de covariância H_t , defasadas e é dado por:

$$vech(H_t) = \alpha + \alpha_1 vech(\varepsilon_{t-1} \varepsilon'_{t-1}) + \beta_1 vech(H_{t-1})^4. \quad \text{Equação 4.1}$$

O modelo apresenta dois problemas principais, primeiro o número de parâmetro, aonde o numero de parâmetros estimados é igual a $(k(k+1)/2)(1+2(k(k+1)/2))$, o que gera um crescimento exponencial com o crescimento do número de variáveis estudadas.⁵

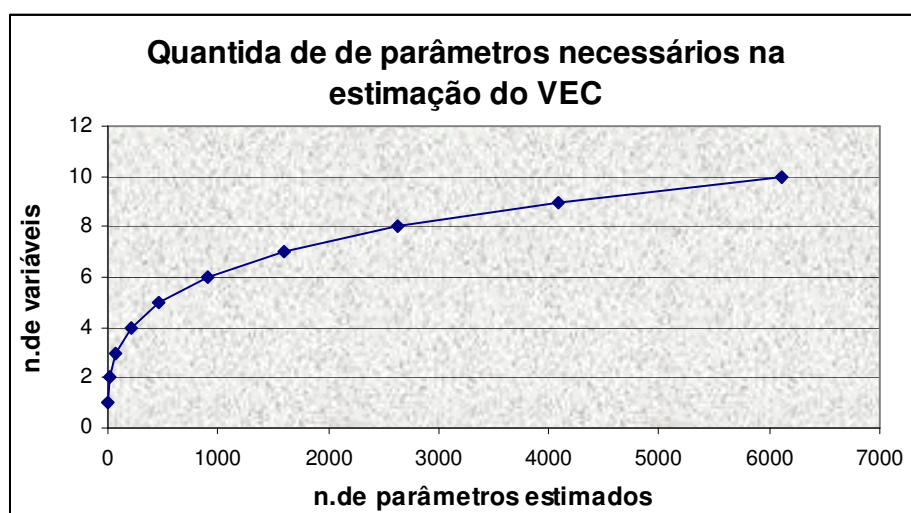


Figura 4.1 – Quantidade de parâmetros necessários para a estimação do VEC

O outro problema é a dificuldade de garantir condições nas matrizes α_1 e β_1 a fim de que a matriz de covariância H_t seja positiva semi-definida.

⁴ $vech(H_t)$: é o vetor que empilha todos os elementos da matriz de covariância excluindo os elementos duplicados.

⁵ Neste trabalho estaremos utilizando o VEC com 4 variáveis, ou seja, será necessária a estimação de 210 parâmetros.

Para exemplificar, o VEC para o caso bi-variado é dado por:

$$\begin{pmatrix} h_{11,t} \\ h_{12,t} \\ h_{12,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{01,t} \\ \alpha_{02,t} \\ \alpha_{03,t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t-1}^2 \\ \varepsilon_{1,t-1}\varepsilon_{2,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11,t-1} \\ h_{12,t-1} \\ h_{22,t-1} \end{pmatrix}. \quad \text{Equação 4.2}$$

4.3 - Modelo diagonal

Este modelo foi proposto por Bollerslev, Engle e Wooldrige (1988), no qual os autores sugeriam uma redução no número de parâmetros necessário para o modelo GARCH multivariados, onde a matriz α_1 e β_1 (equação 4.1) é restrita a uma matriz diagonal. Neste caso, a covariância condicional entre $\varepsilon_{j,t}$ e $\varepsilon_{i,t}$, $h_{i,j,t}$ dependerá apenas dos produtos cruzados do choques e das covariâncias defasadas,

$$h_{ij,t} = w_{ij} + \alpha_{ij}\varepsilon_{i,t-1}\varepsilon_{j,t-1} + \beta_{ij}h_{ij,t-1}. \quad \text{Equação 4.3}$$

onde α_{ij} e β_{ij} são (i,j)th elemento da matriz (k x k) matriz de α_1 e β_1 , respectivamente.

Como era de se esperar o número de parâmetros necessários para a estimação é realmente inferior (vide figura 4.2), sendo a equação $3(k(k+1)/2)$

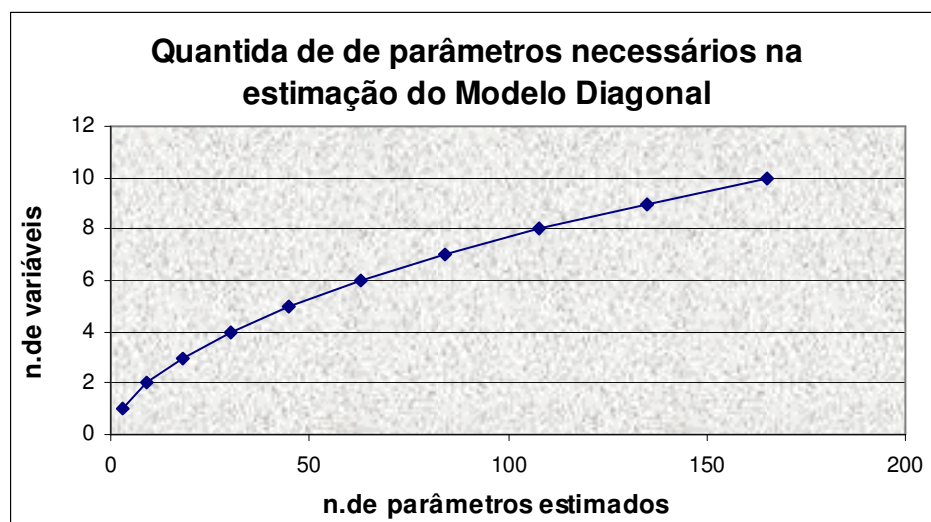


Figura 4.2 - Quantidade de parâmetros necessários para a estimação do Modelo Diagonal

A grande vantagem do modelo é a facilidade em garantir que a matriz de covariância seja positiva semidefinida, sendo que para isto ocorra basta que as matrizes w_{ij} , α_{ij} e β_{ij} sejam positivas semidefinidas.⁶

O grande fragilidade do modelo é ele ser muito restritivo, e não permitir que a variância condicional seja dependente do histórico das outras variáveis do sistema.⁷

4.4 - BEKK

Este modelo foi proposto por Baba, Engle, Kraft e Kroner (1991), onde os autores propõem outra formulação para o cálculo de um GARCH multivariados:

$$H_t = W + A_1' \varepsilon_{i,t-1} \varepsilon' A_1 + \beta_1 H_{t-1} B_1. \quad \text{Equação 4.4}$$

onde W , A_1 e B_1 são matrizes ($k \times k$),

A matriz W é simétrica e positiva definida, isto se dá independente de supor qualquer tipo de restrição as matrizes A_1 e B_1 , uma vez que na equação 4.4 as matrizes são expressas na forma quadrática, sendo esta a maior vantagem do modelo.

A grande fragilidade do modelo como o modelo VEC é a quantidade de parâmetros necessários para a estimação, sendo representado por $2k^2 + k(k+1)/2$.

⁶ Ver Attanasio(1991)

⁷ Ver Franses, Djik (2000), p201.

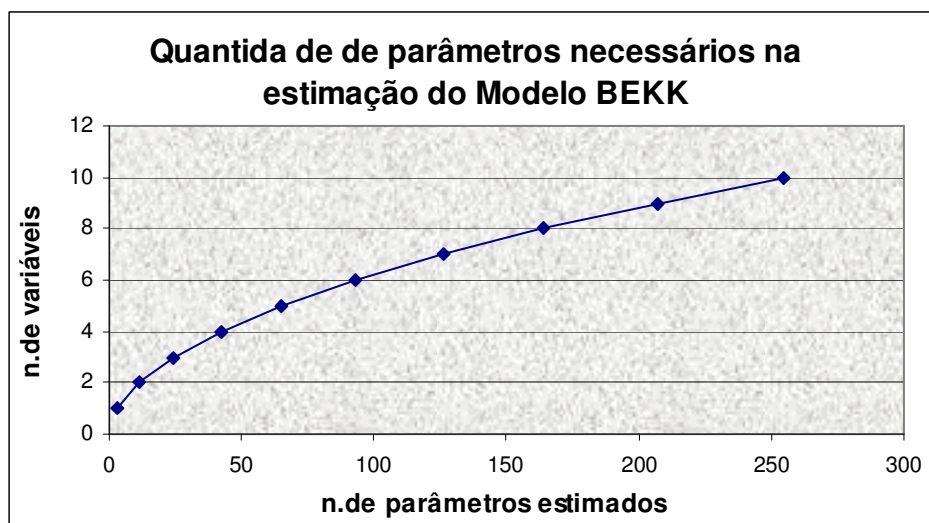


Figura 4.3 - Quantidade de parâmetros necessários para a estimação do Modelo BEKK

Para um caso bivariado o BEKK será especificado como:

$$\begin{pmatrix} h_{11,t} & h_{12,t} \\ h_{12,t} & h_{22,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{12} & w_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t-1}^2 & \varepsilon_{1,t-1}\varepsilon_{2,t-1} \\ \varepsilon_{1,t-1}\varepsilon_{2,t-1} & \varepsilon_{2,t-1}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix} + \quad \text{Equação 4.5}$$

$$+ \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{12} & \beta_{22} \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} h_{11,t-1} & h_{12,t-1} \\ h_{12,t-1} & h_{22,t-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{12} & \beta_{22} \end{pmatrix}$$

4.5 - EWMA

Conforme verificamos neste capítulo, a estimação de modelos GARCH multivariados é realmente de uma grande dificuldade. Em 1995 o Banco J.P Morgan publicou na internet um artigo intitulado Riskmetrics (JPMorgan (1995)) onde era explicitado todo o procedimento para o cálculo do risco de mercado. Para evitar o problema da quantidade de parâmetros o JPMorgan (1995) sugeriu a utilização de um modelo mais simples, onde é feita uma ponderação exponencial nas covariâncias, estimado por :

$$h_{12,t} = \lambda h_{12,t-1} + (1 - \lambda) r_{1,t-1} r_{2,t-1} . \quad \text{Equação 4.6}$$

onde λ é o fator de decaimento.

Logo, podemos chegar à matriz de correlação facilmente, por:

$$\rho_{12,t} = \frac{h_{12,t}}{\sqrt{h_{1,t} h_{2,t}}}. \quad \text{Equação 4.7}$$

4.6 - Modelo de Correlação Constante (CCC)

Neste modelo proposto por Bollerslev (1990), o autor propõe uma combinação não linear para GARCH univariados. Onde a correlação condicional torna-se constante, e a covariância condicional entre \mathcal{E}_{it} e \mathcal{E}_{jt} é proporcional ao produto dos desvios-padrões correspondentes. Como exemplo, iremos analisar o caso bivariado.

Dado:

$$\begin{aligned} h_{1t} &= c_{11} + \alpha_{11} \mathcal{E}_{1,t-1}^2 + \gamma_{11} h_{1t-2} \\ h_{2t} &= c_{22} + \alpha_{22} \mathcal{E}_{2,t-1}^2 + \gamma_{22} h_{2t-2} \\ h_{12t} &= \rho_{12} \sqrt{h_{1t} h_{2t}} \end{aligned}$$

De forma geral, se D_t é uma matriz diagonal ($k \times k$) dos desvios-padrões condicionais e R é a matriz de correlação ($k \times k$), a especificação do modelo é dado por:

$$H_t = D_t R D_t. \quad \text{Equação 4.8}$$

Portanto a grande vantagem desta especificação é que as volatilidades univariadas são utilizadas para a estimação do modelo multivariado.

4.7 - Modelo de Correlação Dinâmica (DCC)

Segundo Marçal (2004), este modelo foi proposto por Engle e Sheppard (2001) e também por Tse e Tsui (2002), ambos os autores relaxam a hipótese de correlação constante, porém sem perda na simplicidade da estimação, definindo-o da seguinte forma:

$$H_t = D_t R_t D_t. \quad \text{Equação 4.9}$$

onde D_t é definida como uma matriz diagonal com GARCH univariados e R_t é definida como uma matriz de resíduos padronizados pela qual a dinâmica é dada

Sobre a definição do tratamento de R_t que os autores se divergem:

- Engle e Sheppard (2001)

$$R_t = \text{diag}(Q_t)^{1/2} Q_t \text{diag}(Q_t)^{1/2}. \quad \text{Equação 4.10}$$

No qual Q_t é dado por:

$$Q_t = \left(1 - \sum_{l=1}^L \alpha_l - \sum_{s=1}^S \beta_s\right) \bar{Q} + \sum_{l=1}^L \alpha_l u_{t-1} u'_{t-1} + \sum_{s=1}^S \beta_s Q_{t-s}. \quad \text{Equação 4.11}$$

onde: $u_t = \varepsilon / h_{it}$, \bar{Q} : é a matriz de variância não condicional e α e β são parâmetros

não negativos que satisfazem a $\sum_{l=1}^L \alpha_l - \sum_{s=1}^S \beta_s < 1$

- Tse e Tsui (2002)

$$R_t = (1 - \theta_1 - \theta_2) R + \theta_1 \psi_{t-1} + \theta_2 R_{t-1}. \quad \text{Equação 4.12}$$

$$\psi_{ij,t-1} = \frac{\sum_{m=1}^M u_{it-m} u_{jt-m}}{\sqrt{\left(\sum_{m=1}^M u_{it-m}^2\right) \left(\sum_{m=1}^M u_{jt-m}^2\right)}}. \quad \text{Equação 4.11}$$

onde: $u_t = \varepsilon / h_t$.

Para garantir que a matriz ψ_{t-1} seja positiva semidefinida, m deve ser maior que o número de séries em análise.

5 - Teoria de Cópulas

5.1 - Introdução

Neste capítulo iremos definir as funções de cópulas, suas propriedades e teoremas.

Basicamente a Função de Cópulas pode ser definida como a função que acopla distribuições marginais univariadas formando distribuições multivariadas. Para tanto, faz-se necessário apenas definir a função de dependência entre as variáveis.

Em Nelsen (1999), Cópulas são definidas por dois pontos de vista: “sob um ponto de vista, Cópulas são funções que juntam ou acoplam funções de distribuições multivariadas as suas distribuições marginais. Alternativamente, Cópulas são funções de distribuição multivariadas cujas as distribuições marginais são uniformes no intervalo (0,1).” Adicionando a isto Nelsen (1999, p01) comenta a importância do estudo de Cópulas citando Fisher(1997)

Copulas [are] of interest to statistician for two main reasons: Firstly, as a way of studying scale-free measures of dependence; and secondly, as a starting point for constructing families of bivariate distributions, sometimes with a view to simulation.

Conforme verificamos as Cópulas nos permitiram criar distribuições multivariadas que possuam marginais com distribuições diferentes. Isto é de grande valia para o nosso

caso em virtude que algumas séries financeiras podem apresentar assimetria e curtose (iremos verificar isto adiante) nos mais diversos graus.

O termo Cópula foi primeiramente empregado no contexto matemático ou estatístico por Abe Sklar (1959, p229-231), através de um artigo escrito pelo mesmo no qual foi remetido a Frechet,

Féron (1956), in studying three-dimensional distributions had introduced auxiliary functions, defined on the unit cube, that connected such distributions with their one-dimensional margins. I saw that similar functions could be defined on the unit n -cube for all $n \geq 2$ and would similarly serve to link n -dimensional distributions to their one-dimensional marginal. Having worked out the basic properties of these functions, I wrote about them to Frechét, in English. He asked me too write a note about them in French. While writing this, I decided I needed a name for these functions. Knowing the word “copula” as a grammatical term for a word or expressions that links a subject and predicate, I felt that this would make an appropriate name for a function that links a multidimensional distribution to its one-dimensional margins, and used it as such. Frechét received my notes, corrected one mathematical statement, made some minor corrections to my French, and had the note published by Statistical Institute of the University of Paris as Sklar (1959).

Assim sendo, a teoria de Cópulas foi desenvolvida Abe Sklar, logo ao teorema que permite os acoplamentos dá-se o nome de Teorema de Sklar.

Para definir precisamente o termo cópulas iremos adotar novamente Nelsen (1999, p.5-6):

Considere por um momento um par de Variáveis Aleatórias X e Y , com funções de distribuição $F(x) = P[X \leq x]$ e $G(y) = P[Y \leq y]$, respectivamente, e a função distribuição conjunta $H(x, y) = P[X \leq x, Y \leq y]$. Para cada par de números reais (x, y) nós podemos associar três números: $F(x), G(y)$ e $H(x, y)$. Note que cada número está no intervalo $(0,1)$ Em outras palavras, cada par (x, y) dos números reais estão contido nos pontos $(F(x), G(y))$ no quadrado unitário $(0,1) \times (0,1)$, e estes

pares ordenados correspondem a um número $H(x, y)$ em $(0,1)$. Nós iremos mostrar que esta correspondência, que assume que o valor da função distribuição conjunta de cada para ordenado dos valores das funções de distribuições individuais, são conectadas por uma função. Esta função é a cópula.

Por simplicidade de notação iremos adotar as definições no caso bivariado, o mesmo poderá ser expandido para o caso multivariado. Seja $I = [0,1]$ e $I^2 = I \times I$. Uma Cópula bidimensional é uma função C definida em I^2 e assumindo valores em I com as seguintes propriedades:

1. Para todo $u_1, u_2 \in I$

$$C(u_1, 0) = 0 = C(0, u_2).$$

$$C(u_1, 1) = u_1, \quad C(1, u_2) = u_2.$$

2. Para cada u_1, u_2, v_1, v_2 em I tais que $u_1 \leq u_2$ e $v_1 \leq v_2$,

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, u_1) - C(u_1, u_2) + C(u_1, u_1) \geq 0.$$

Teorema de Sklar – Nelsen (1999) : Seja F uma função de distribuição conjunta com marginais F e G . Então existe uma cópula C tal que $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathfrak{R}^2$.

$$H(x, y) = C(F(x), G(x)). \quad \text{Equação 5.1}$$

Caso F e G sejam contínuas, C é única. Caso contrário, C é unicamente determinada no conjunto $\text{Im } F \times \text{Im } G$. Reciprocamente, se C é a cópula e F e G são funções de distribuição, então a função H definida pela equação 5.1 é a função de distribuição conjunta com marginais F e G .

Prova: Pode ser encontrada em Nelsen(1999)

Evidentemente, o Teorema de Sklar envolve :

$$\Pr(X \leq x, Y > y) = F_1(x) - C(F_1(x), F_2(y)),$$

$$\Pr(X > x, Y \leq y) = F_2(y) - C(F_1(x), F_2(y)),$$

$$\Pr(X \leq x | Y \leq y) = C(F_1(x), F_2(y)) / F_2(y),$$

$$\Pr(X \leq x | Y > y) = F_1(x) - C(F_1(x), F_2(y)) / (1 - F_2(y)),$$

$$\Pr(X \leq x | Y = y) = C_{|z} (F_1(x), F_2(y)) = \frac{\partial C(v, z)}{\partial z} \Big|_{v=F_1(x), z=F_2(y)} .$$

Como consequência do teorema de Sklar, as Cópulas de mínimo e de máximo C^- , C^+ são chamados respectivamente limites inferior e superior de Frechet. Usando o resultado de Sklar, a desigualdade $C^- \leq C \leq C^+$ pode ser reescrito como :

$$\max(F_1(x) + F_2(y) - 1, 0) \leq F(x, y) \leq \min(F_1(x), F_2(y)). \quad \text{Equação 5.2}$$

O qual é conhecido como desigualdade de Frechet-Hoeffding para funções de distribuição.

5.2 - Medidas de dependência

A grande vantagem que a teoria de Cópulas possui é a de permitir a criação de funções de distribuições de probabilidade multivariadas independentes do formato das distribuições marginais. Esta particularidade nos permitirá calcular os riscos de forma mais precisa, haja vista que as séries financeiras apresentam fatos estilizados como assimetria e curtose (iremos abordar mais especificamente o assunto quando formos analisar as séries financeiras estudadas). Para tanto, fazem-se necessário além das marginais, conhecer a forma de associação que as suas variáveis possuem. Este será o assunto discutido nesta seção.

A medida de associação mais utilizada e mais difundida é a correlação, que é definida por:

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X) \cdot \text{var}(Y)}}. \quad \text{Equação 5.3}$$

Neste tipo de associação somente o grau e o sinal são capturados por ρ .

O cálculo da correlação usual, ou Correlação Pearson, que conhecemos é efetuado substituindo as variâncias e covariâncias pelas as suas versões amostrais.

$$\rho(X, Y) = \frac{\sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})(Y_t - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})^2} \sqrt{\sum_{t=1}^T (Y_t - \bar{Y})^2}}. \quad \text{Equação 5.4}$$

Mendes (2004) comenta que o estimador é o mais popular para associação linear, porém não é robusto, uma vez que o valor da correlação pode ser próximo de zero ou de um caso exista a presença de um único *outlier*.

Embrechts, Mc Neil e Straumann (1999) resumizam os seguintes problemas da correlação linear:

- ρ necessita a existência de ambas as variâncias.
- $\rho = 0$, não implica independência. Apenas se X e Y forem um bivariada normal ρ irá implicar em independência
- ρ é invariante para o caso de transformações estritamente crescentes.
- As distribuições marginais e a correlação não determinam a distribuição conjunta. Isto só será verdade caso a distribuição seja normal bivariada.

Ainda segundo Embrechts, Mc Neil e Straumann (1999), dadas as duas variáveis aleatórias, as propriedades desejadas para uma medida de dependência (δ) são:

1. $\delta(X, Y) = \delta(Y, X)$
2. $-1 \leq \delta(X, Y) \leq 1$
3. $\delta(X, Y) = 1$ se X e Y forem comonotônicas, $\delta(X, Y) = -1$ se X e Y for contramonotônicos;
4. Se T for estritamente monotônico, então:

$$\delta(T(X), Y) = \begin{cases} \delta(X, Y), & T \text{ crescente} \\ -\delta(X, Y), & T \text{ decrescente} \end{cases}$$

A correlação de Pearson somente satisfaz as duas primeiras propriedades. Iremos ver a seguir as correlações baseadas em posto, medidas estas que satisfazem a todas as propriedades citadas.

5.2.1 - Tau de Kendall

A versão amostral da medida de associação conhecida como tau de Kendall é definida em termos de concordância. Para ilustrarmos o conceito suponha que (x_i, y_i) e (x_j, y_j) sejam duas observações do vetor (X, Y) de variáveis aleatórias contínuas. Dizemos que (x_i, y_i) e (x_j, y_j) são concordante se $x_i < x_j$ e $y_i < y_j$ ou se $x_i > x_j$ e $y_i > y_j$. Similarmente, dizemos que (x_i, y_i) e (x_j, y_j) são discordantes se $x_i < x_j$ e $y_i > y_j$. Entendido o conceito podemos definir o tau de Kendall em termos de concordância como: Seja $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$ uma amostra de variáveis aleatórias com n observações a partir de um vetor (X, Y) de variáveis aleatórias contínuas. Existem $\binom{n}{2}$ pares distintos (x_i, y_i) e (x_j, y_j) da amostra observada, onde cada par pode ser concordante ou discordante- denote c como o número de pares concordantes e do número de pares discordantes. Então tau de Kendall para uma amostra é definido como:

$$t = \frac{c-d}{c+d} = \frac{(c-d)}{\binom{n}{2}}. \quad \text{Equação 5.5}$$

Equivalentemente o t é a probabilidade de concordância menos a probabilidade de discordância para cada par de observações (x_i, y_i) e (x_j, y_j) escolhidos aleatoriamente da amostra. Logo a versão populacional do tau Kendall será dada por:

$$\tau = \tau_{X,Y} = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0]. \quad \text{Equação 5.6}$$

De forma empírica τ pode ser estimado por:

$$\rho = \frac{12}{\binom{n}{2}} \sum_{i=1}^n \left(\text{posto}(x_i) - \frac{n+1}{2} \right) \left(\text{posto}(y_i) - \frac{n+1}{2} \right). \quad \text{Equação 5.7}$$

Se C é a cópula associada com a distribuição F , pode ser mostrado que:

$$\tau = 4 \iint_{I^2} C \, dC - 1 = 4 \iint_{I^2} C(u,v) c(u,v) \, du \, dv - 1. \quad \text{Equação 5.8}$$

onde $c(u,v)$ é a densidade da cópula

5.2.2 - Rho Spearman

Como o tau de Kendall, a versão populacional da medida conhecida como rho de Spearman é baseado na concordância e discordância. A medida é definida como proporção da probabilidade de concordância menos a probabilidade de discordância para dois vetores (X_1, Y_1) e (X_2, Y_3) , que é o par de vetores com mesma margem, porem um vetor tem função de distribuição H , mas os componentes de cada vetor são independentes:

$$\rho = \rho_{X,Y} = 3(P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0]). \quad \text{Equação 5.9}$$

De forma empírica ρ pode ser estimado por:

$$\rho = \frac{12}{n(n^2 - 1)} \sum_{i=1}^n \left(posto(x_i) - \frac{n+1}{2} \right) \left(posto(y_i) - \frac{n+1}{2} \right). \quad \text{Equação 5.10}$$

O Rho Spearman pode ser calculado através da cópula associada entre as Variáveis X e Y por:

$$\rho_s = 12 \iint_{I^2} C(u, v) du dv - 3. \quad \text{Equação 5.11}$$

Ambas as medidas tau de Kendall e rho de Spearman são medidas de probabilidade de concordância entre variáveis aleatórias dadas as cópulas, porem os valores de ρ e τ são diferentes (vide Nelsen (1999))

Todavia, Nelsen (1999) sumariza a relação entre ρ e τ através das seguintes inequações.

$$\frac{3\tau - 1}{2} \leq \rho \leq \frac{1 + 2\tau - \tau^2}{2}, \quad \tau \geq 0 \quad \text{Equação 5.12}$$

e

$$\frac{\tau^2 + 2\tau - 1}{2} \leq \rho \leq \frac{1 + 3\tau}{2}, \quad \tau \geq 0$$

Outra forma de dependência que iremos utilizar ao longo deste trabalho será a medida de dependência das caudas. Estas medidas são utilizadas para capturar a dependência na cauda da distribuição bivariada. O Coeficiente de dependência da cauda superior é definido como:

$$\lambda_u(X, Y) = \lim_{q \rightarrow 1} \Pr(Y > VaR_q(Y) | X > VaR_q(X)). \quad \text{Equação 5.13}$$

onde $VaR_q(X)$ e $VaR_q(Y)$ refere-se a quantis de X e Y , respectivamente.

Outras formas importantes de se modelar às funções de dependência de distribuições elípticas são as chamadas cópulas arquimedianas. Este tipo de função de acoplamento permite que se possam criar distribuições multivariadas.

5.3 - Cópulas arquimedianas

A Cópula arquimediana, construída através do gerador φ , é dado por :

$$C(u_1, \dots, u_p) = \varphi^{-1} \{ \varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_p) \}. \quad \text{Equação 5.14}$$

Onde φ^{-1} é o gerador inverso de φ . A condição de existência da cópula obriga que o gerador precisa ser necessariamente uma função monotônica.⁸ O gerador único determina a cópula archmediana. Yan(2006) comenta o que diferencia o tipo de cópulas arquimedianas é o gerador, conforme quadro:

Tabela 5-1: fatores geradores de Cópulas arquimedianas.

Família	Espaço Paramétrico	Gerador $\varphi(t)$	Gerador Inverso $\varphi^{-1}(s)$	Distribuição <i>Frailty</i>
Clayton(1978)	$\alpha \geq 0$	$t^{-\alpha} - 1$	$(1+s)^{-1/\alpha}$	Gamma
Frank (1979)	$\alpha \geq 0$	$\ln \frac{e^{\alpha t} - 1}{e^{\alpha} - 1}$	$\alpha^{-1} \ln(1 + e^s (e^{\alpha} - 1))$	Log Series
Gumbel (1960)	$\alpha \geq 1$	$-(\ln t)^{\alpha}$	$\exp(-s^{1/\alpha})$	Positive stable

Fonte: Yan (2006)

⁸ Nelsen(1999) – p.122

Logo para a cópula de Clayton , que será objeto de estudo, é obtida por :

FDA

Equação 5.15

$$\left(1 + (u_1^{-\alpha} - 1 + u_2^{-\alpha} - 1 + u_3^{-\alpha} - 1 + u_4^{-\alpha} - 1)\right)^{-1/\alpha}.$$

$$FD \left(1 + (u_1^{-\alpha} - 1 + u_2^{-\alpha} - 1 + u_3^{-\alpha} - 1 + u_4^{-\alpha} - 1)\right)^{\left(\left(\left(\left(-1/\alpha\right) - 1\right) - 1\right) - 1\right) - 1\right)} * \left(\left(\left(\left(-1/\alpha\right) - 1\right) - 1\right) - 1\right) * (u_4^{(-\alpha-1)*(-\alpha)}) * \left(\left(\left(-1/\alpha\right) - 1\right) - 1\right) * (u_3^{(-\alpha-1)*(-\alpha)}) * \left(\left(-1/\alpha\right) - 1\right) * (u_2^{(-\alpha-1)*(-\alpha)}) * \left(\left(-1/\alpha\right) - 1\right) * (u_1^{(-\alpha-1)*(-\alpha)})\right).$$

Equação

5.16

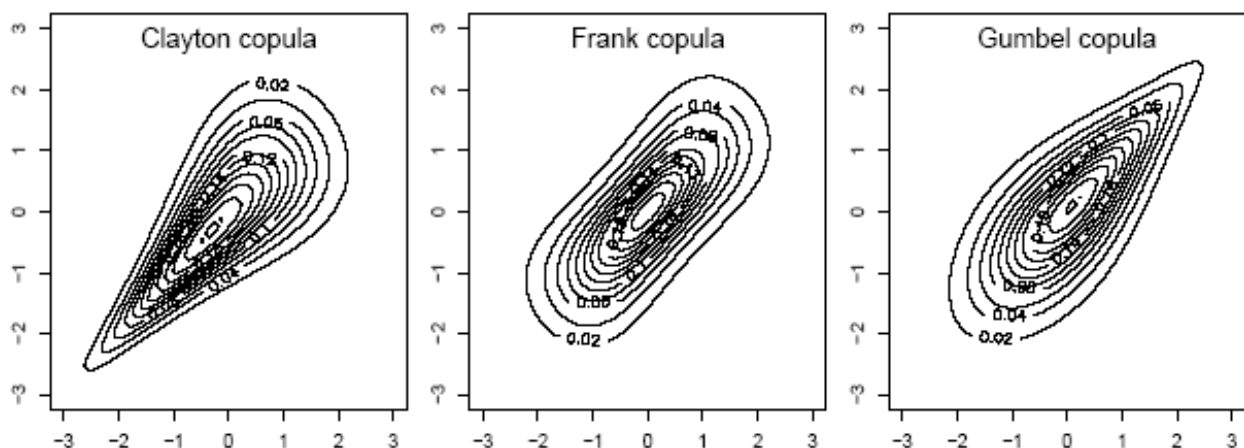


Figura 5.1 - Gráfico de contorno para cópulas Arquimedianas.⁹

Como estamos interessados na modelagem da cauda esquerda estaremos adotando a cópula de Clayton neste estudo.¹⁰

Neste estudo a partir da escolha da função de acoplamento iremos analisar os resultados que encontramos quando variamos a forma que é tratada as distribuições marginais, ou seja, normais e também a distribuição gama que é a distribuição frailty da cópula de Clayton(1978).

⁹ Figura retirada de Yan (2006) e gerada pelo software R 2.3.0.

¹⁰ O interesse é relativo a necessidade de se modelar o VaR (vide capítulo 2.2)

Para se estimar as cópulas adotamos o modelo de estimação em dois estágios, haja vista que outras formas de estimações não convergiram.¹¹

6 - Aplicação

6.1 - Descrição de séries

Neste capítulo iremos comparar as medidas de risco *VaR* e *ES*, estimados pela teoria de Cópulas e pela demais metodologias multivariadas. A modelagem será feita na distribuição tetravariada das séries de retorno diárias de Índice Bovespa, do Índice Dow Jones e das séries de fatores de risco - taxa pré e cupom cambial para 252 dias no período de 31/12/1998 à 16/02/2006 .

6.2 - Descrição da amostra

Este estudo utiliza séries financeiras de referenciais para investimento de ativos normalmente usados em bancos de investimentos, sendo investimento em bolsas – Ibovespa e Dow Jones - e em juros – Pré e Cupom cambial.

A fim de simplificarmos o entendimento, iremos separar as séries de estudo em dois grupos as séries de retornos do índice da Bolsa e as séries de fatores de risco – juros.

Para o cálculo das séries de retorno de ativos de bolsa usamos as variações logarítmicas dos preços de fechamento diário.

$$r_t = \text{Ln} \left(\frac{P_{t+1}}{P_t} \right). \quad \text{Equação 6.1}$$

Onde, P_{t+1} e P_t são os preços de fechamento em $t+1$ e t

Para o cálculo dos fatores de risco adotamos o seguinte procedimento. Diariamente é retirada da Estrutura temporal de taxa de juros a taxa correspondente ao período de 252 dias úteis a partir da data referencia tx . Com base nesta série de taxas criadas, podemos então calcular os retornos diários segundo a formula abaixo¹²:

¹¹ Sobre o assunto, verificar Cherubini et alli (2005) e Yan (2006)

¹² Sobre ETTJ verificar Securato (2004)

$$r_t = \frac{\text{Ln}(1 + tx_{t+1})}{\text{Ln}(1 + tx_t)}. \quad \text{Equação 6.2}$$

A seguir a descrição de cada série utilizada:

- PRE 252 – criado pela identificação da taxa de mercado referente a 252 dias proveniente da Estrutura temporal de taxa de juros (ETTJ). Onde a ETTJ é criada pelos vencimentos disponíveis de taxas de juros dos Futuros de Depósito Interbancários de 1dia divulgados pela Bolsa de Mercadorias e Futuros(BM&F) e taxa de Swap Pré X DI, também divulgado diariamente pela (BM&F).
- Cupom 252 – criado pela identificação da taxa de mercado referente a 252 dias proveniente da Estrutura temporal de taxa de Cupom Cambial (ETTCC), onde a ETTCC é criada pelos vencimentos disponíveis de taxas de juros dos Futuros de Dólar de 1dia divulgados pela Bolsa de Mercadorias e Futuros(BM&F) e taxa de Swap Dólar X DI, também divulgado diariamente pela (BM&F), corrigido pela Ptax800 de Venda divulgada diariamente pelo Banco Central do Brasil.
- Dow Jones – Cotação de fechamento do Índice Dow Jones Industrial,
- Ibovespa – Cotação de fechamento do Índice Bovespa

6.3 - Análise Exploratória dos Dados

Neste capítulo iremos efetuar uma Análise Exploratória dos Dados. Como podemos verificar na tabela abaixo, todas as séries apresentam Curtose superior a três, indicando que a distribuição dos retornos tem caudas pesadas. Com exceção do Dow Jones, todas as outras séries apresentam assimetria positiva.

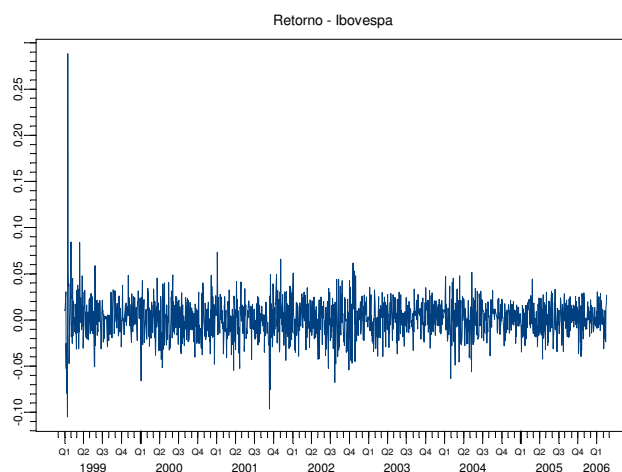
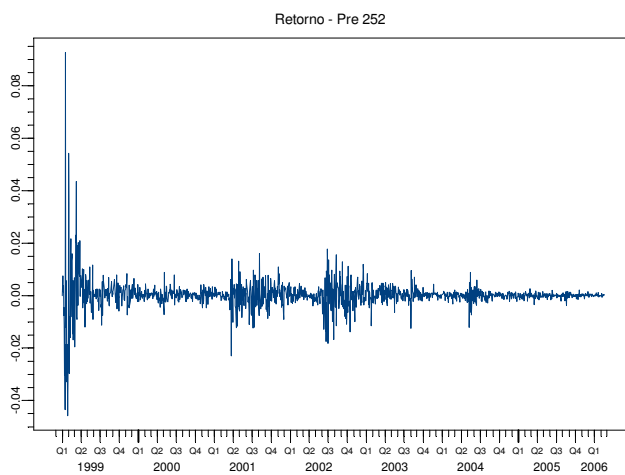
Tabela 6.1 – Estatística Descritiva das séries utilizadas.

Série	tamanho da amostra	Média	Desvio-padrão	Assimetria	Curtose
PRE 252	1657	0,00019	0,00525	3,170	81,250
Ibovespa	1657	0,00087	0,02086	1,349	25,270
Cupom Cambial 252	1657	-0,00002	0,01020	0,652	18,310
Dow Jones	1657	0,00009	0,01171	-0,053	7,608

Série	Mínimo	1° quartil	Mediana	3° quartil	Máximo
PRE 252	-0,0458	-0,0002	0,0002	0,0014	0,0927
Ibovespa	-0,1050	-0,0116	0,0013	0,0136	0,2882
Cupom Cambial 252	-0,0948	-0,0051	-0,0001	0,0044	0,0995
Dow Jones	-0,0740	-0,0061	0,0000	0,0060	0,0691

Fonte: Cálculos efetuados pelo S-Plus, base de dados proveniente da Economática

Analisando os gráficos de retornos, podemos verificar a existência do fato estilizado agrupamento de volatilidade, isto é as volatilidades altas(baixas) são seguidas por volatilidades altas (baixas).



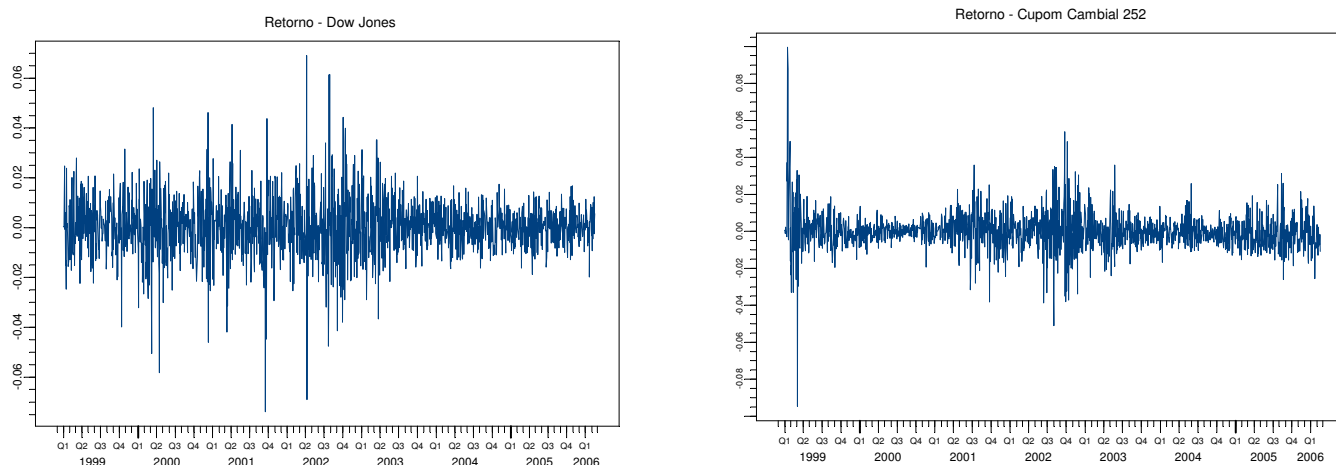


Figura 6.1- Gráfico dos retornos das séries estudadas

Para efetuarmos os cálculos das medidas de riscos *VaR* e *ES* pela teoria de cópulas e pelo DCC, necessitamos identificar os melhores modelos de volatilidade para as séries financeiras.

Desta forma, para escolher os melhores modelos, utilizaremos o critério de informação de Akaike (*AIC*) que é definido por:

$$AIC = -\frac{2}{T} \ln(\ell_{\max}) + \frac{2k}{T} \quad \text{Equação 6.3}$$

onde k é o número de parâmetros estimados e T o tamanho da amostra. O melhor modelo é aquele que tiver o menor *AIC*.

Com base nas series financeiras de retornos efetuamos as estimações de modelos da família GARCH onde foram encontrados os seguintes resultados ¹³:

¹³ Os modelos foram estimados usando o software S-PLUS através do pacote Finmetrics e do software EViews 5.0

Tabela 6.2 – Critério de informação de Akaike

Critério de Informação - Akaike	DJ	LN252	Ibovespa	Cupom de Dolar 252
GARCH(1,1)	-10395	-15418	-8398	-11325
GARCH c/ estrutura na média AR(1)	-10393	-15429	-8397	-11326
GARCH c/ estrutura na média MA(1)	-10393	-15429	-8397	-11326
GARCH c/Distribuição t	-10450	-15593	-8422	-11385
GARCH c/Distribuição t e estrutura na média AR(1)	-10448	-15600	-8421	-11385
GARCH c/Distribuição t e estrutura na média MA(1)	-10448	-15600	-8421	-11385
EGARCH	-10429	-15481	-8432	-11325
EGARCH c/ estrutura na média AR(1)	-10427	-15490	-8432	-11324
EGARCH c/ estrutura na média MA(1)	-10428	-15490	-8432	-11324
EGARCH c/Distribuição t	-10484	-15617	-8447	-11385
EGARCH c/Distribuição t e estrutura na média AR(1)	-10482	-15623	-8448	-11384
EGARCH c/Distribuição t e estrutura na média MA(1)	-10482	-15621	-8448	-11384
TGARCH	-10424	-15453	-8441	-11334
TGARCH c/ estrutura na média AR(1)	-10422	-15464	-8442	-11335
TGARCH c/ estrutura na média MA(1)	-10422	-15464	-8442	-11335
TGARCH c/Distribuição t	-10476	-15612	-8453	-11384
TGARCH c/Distribuição t e estrutura na média AR(1)	-10474	-15619	-8454	-11387
TGARCH c/Distribuição t e estrutura na média MA(1)	-10474	-15619	-8452	-11385
PGARCH	-10449	-15480	-8439	-11335
PGARCH c/ estrutura na média AR(1)	-10448	-15488	-8440	-11335
PGARCH c/ estrutura na média MA(1)	-10448	-15488	-8440	-11335
PGARCH c/Distribuição t	-10495	-15615	-8451	-11385
PGARCH c/Distribuição t e estrutura na média AR(1)	-10493	-15621	-8452	-11385
PGARCH c/Distribuição t e estrutura na média MA(1)	-10493	-15621	-8452	-11385

Fonte: Cálculos efetuados pelo S-Plus, base de dados provenientes da Económica

Assim sendo, os parâmetros estimados pelos melhores modelos para cada série segundo o critério de AIC serão aqueles que estão em negrito na tabela 6.2.

Caso estes modelos estejam bem especificados esperamos que a autocorrelação dos resíduos padronizados de cada série não sejam significâncias, indicando que as séries capturaram adequadamente a estrutura na média. O mesmo deverá ocorrer com as séries de resíduos ao quadrado que neste caso indicará que o modelo proposto explica corretamente a variância.

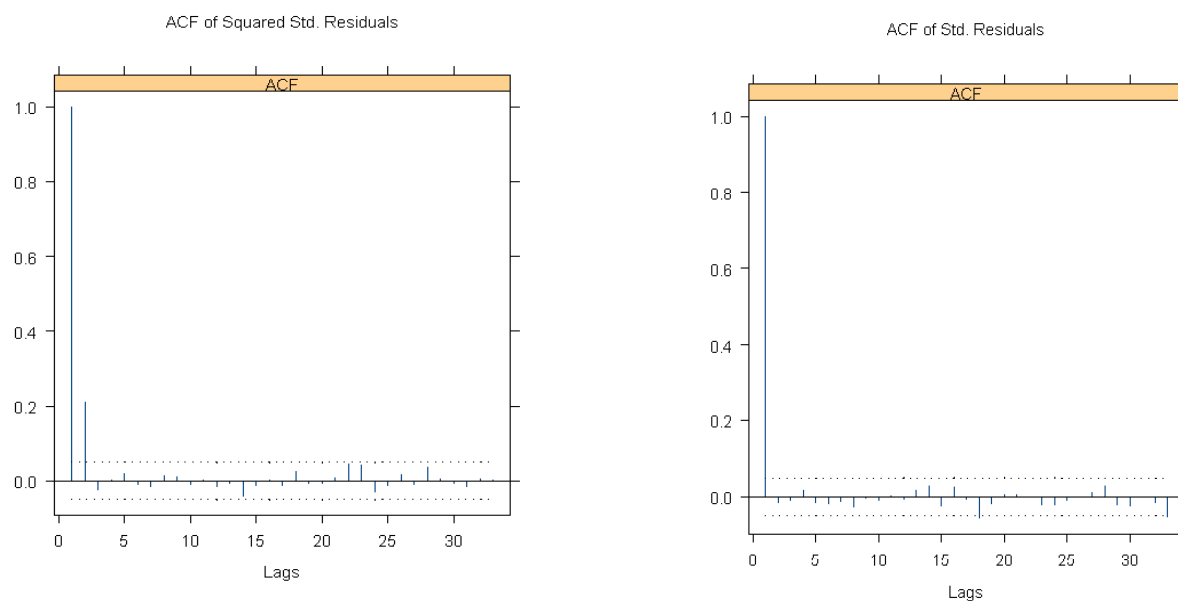


Figura 6.2 - ACF dos resíduos padronizados de Dow Jones por PGARCH(1,1) c/dist t

Podemos ver claramente que a série apresenta autocorrelação significativa indicando presença de estrutura na média, logo a série não está bem estimada através do modelo proposto, portanto necessitamos re-estimar o modelo.

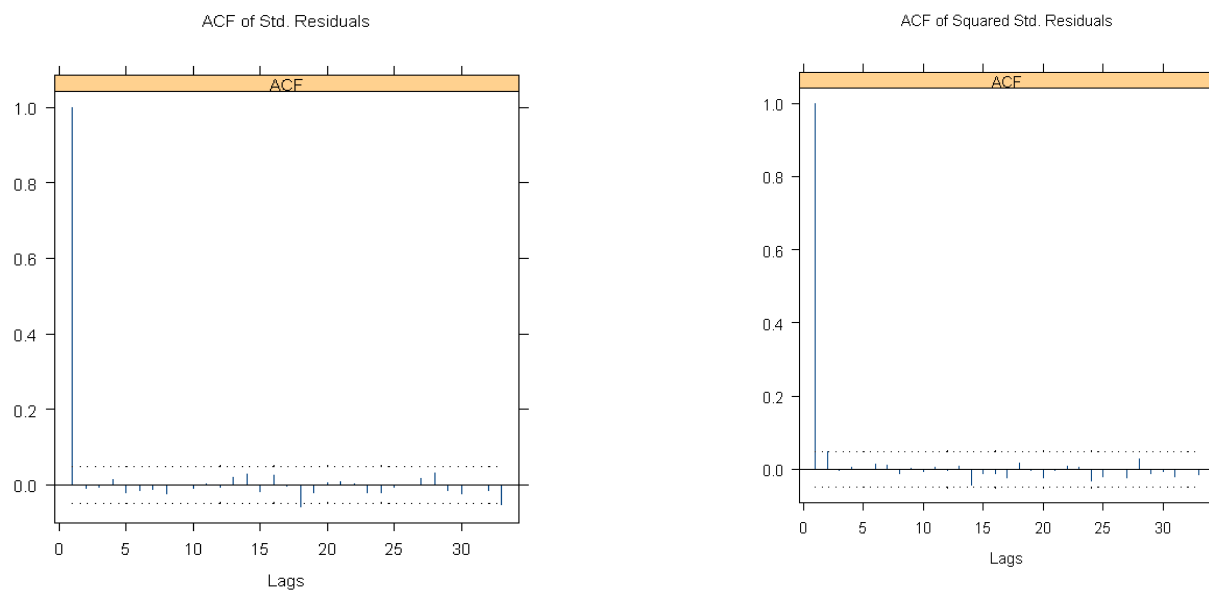


Figura 6.3 - ACF dos resíduos padronizados de Ln 252 por EGARCH c/dist t AR(1)

Ao analisarmos o ACF do modelo proposto para a série de EGARCH, podemos ver que a estrutura na média está bem controlada o mesmo se aplica para as séries de resíduos ao quadrado.

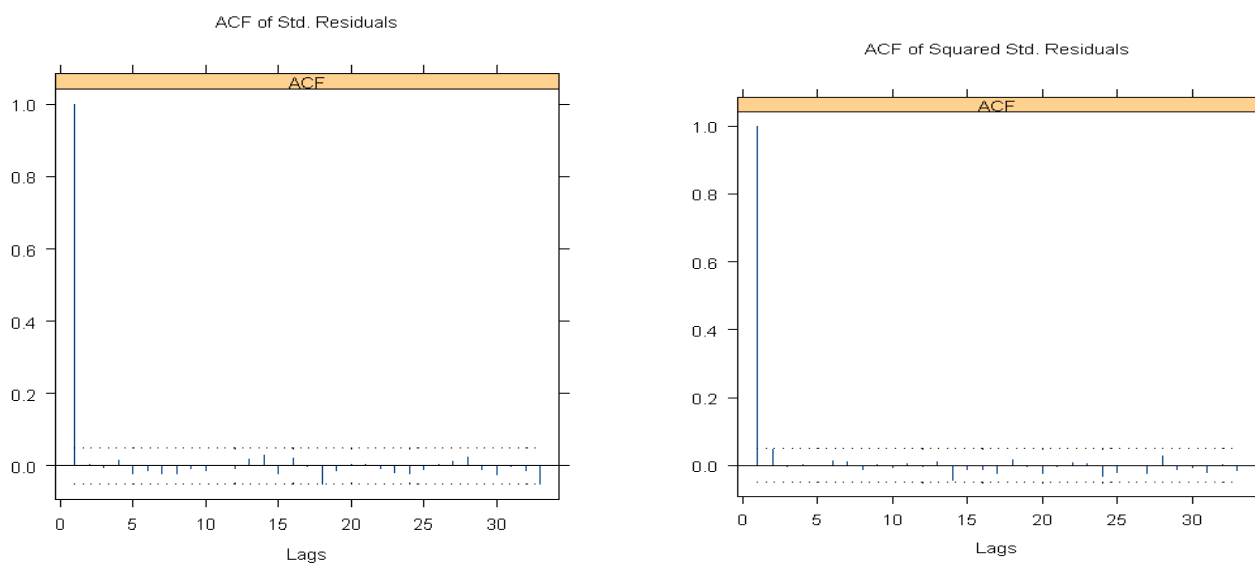


Figura 6.4 - ACF dos resíduos padronizados de IBovespa por TGARCH $c/dist t AR(1)$

Podemos ver claramente que o ACF das séries de Cupom cambial e de Ibovespa, estão controladas pelos modelos propostos.

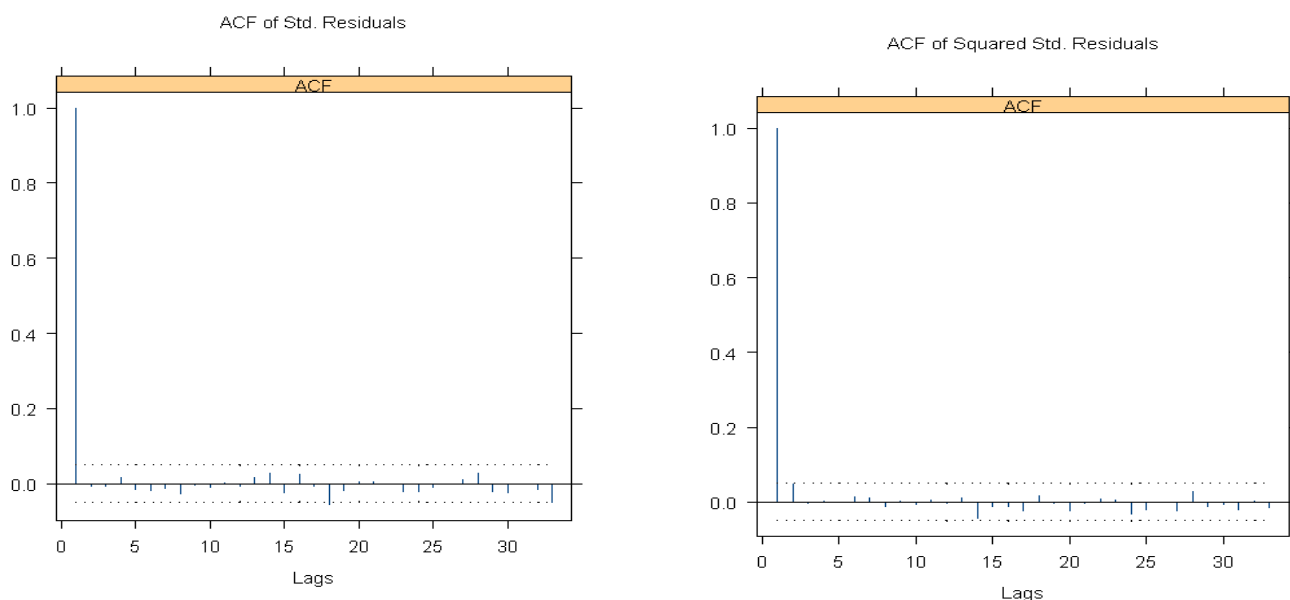


Figura 6.5 - ACF dos resíduos padronizados de Cupom Cambial 252 por TGARCH $c/dist t AR(1)$

Assim sendo, efetuamos uma análise na série de Dow Jones, onde encontramos o modelo GARCH(1,2) como solução a seguir iremos verificar a análise dos resíduos.

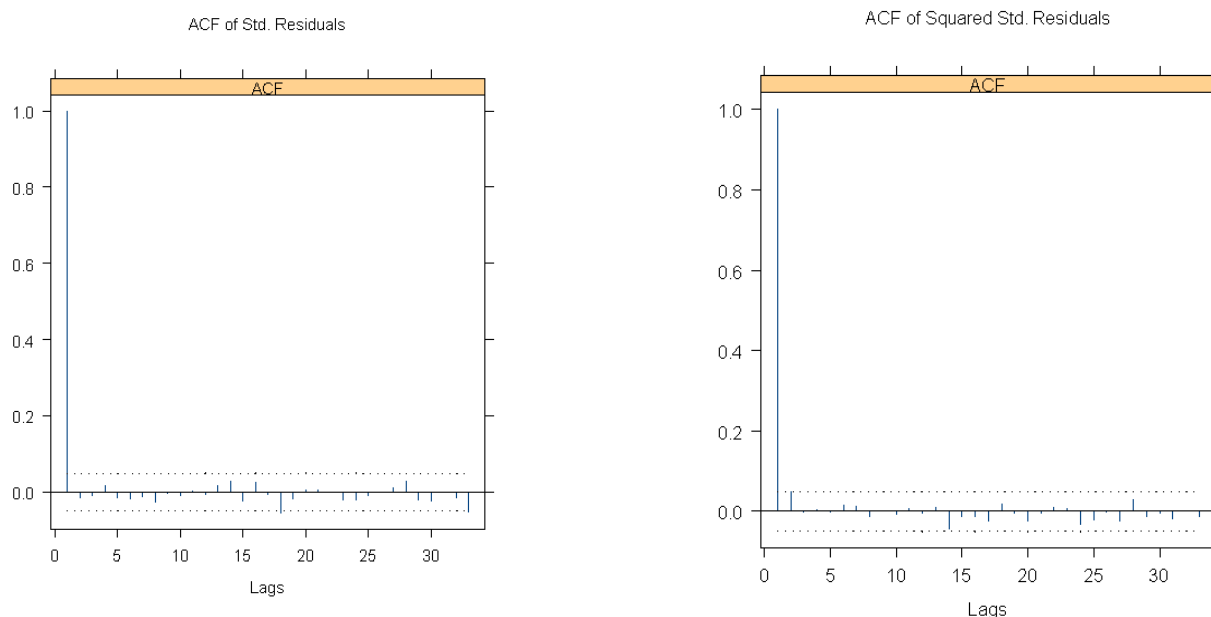


Figura 6.6 - ACF dos resíduos padronizados de Dow Jones por GARCH(1,2)

Podemos ver claramente que a série não apresenta autocorrelação significativa, logo a série esta bem estimada através do modelo proposto, portanto as melhores especificações dadas às séries são:

Tabela 6.3 – Melhores modelos de volatilidade

Modelos	GARCH(1, 2)	EGARCH	TGARCH	TGARCH
Séries	Dow Jones	Pre 252	Ibovespa	Cupom 252
Distribuição	cond.dist = "n"	cond.dist = "t"	cond.dist = "t"	cond.dist = "t"
Estrutura na média	-	AR(1)	AR(1)	AR(1)
C	3.394e-004	0.00008923	0.00084418	7.796 e-005
AR	-	0.07056471	0.04000182	7.940 e-003
MA	-	-	-	-
A	1.361e-006	-0.37832855	0.00002548	1.313e-006
ARCH(1)	1.252e-001	0.30437325	0.00216248	1.828e-002
GARCH(1)	5.572e-001	0.98751954	0.85908053	0.9179
GARCH(2)	3.318e-001	-	-	-
POWER	-	-	-	-
LEV(1)	-	-0.27486036	-	-
GAMMA(1)	-	-	0.13907144	1.104 e-001
Graus de liberdade	-	9.293097	9.941554	9.048866

Fontes: Cálculos efetuados pelo S-Plus, base de dados proveniente da Económica

Analisando os modelos podemos verificar claramente que todas as séries apresentaram a necessidade de se utilizarem erros não gaussianos para a melhor estimação

do modelo, logo efetuando análise de um qq-plot (distribuição t), podemos comprovar esta necessidade.

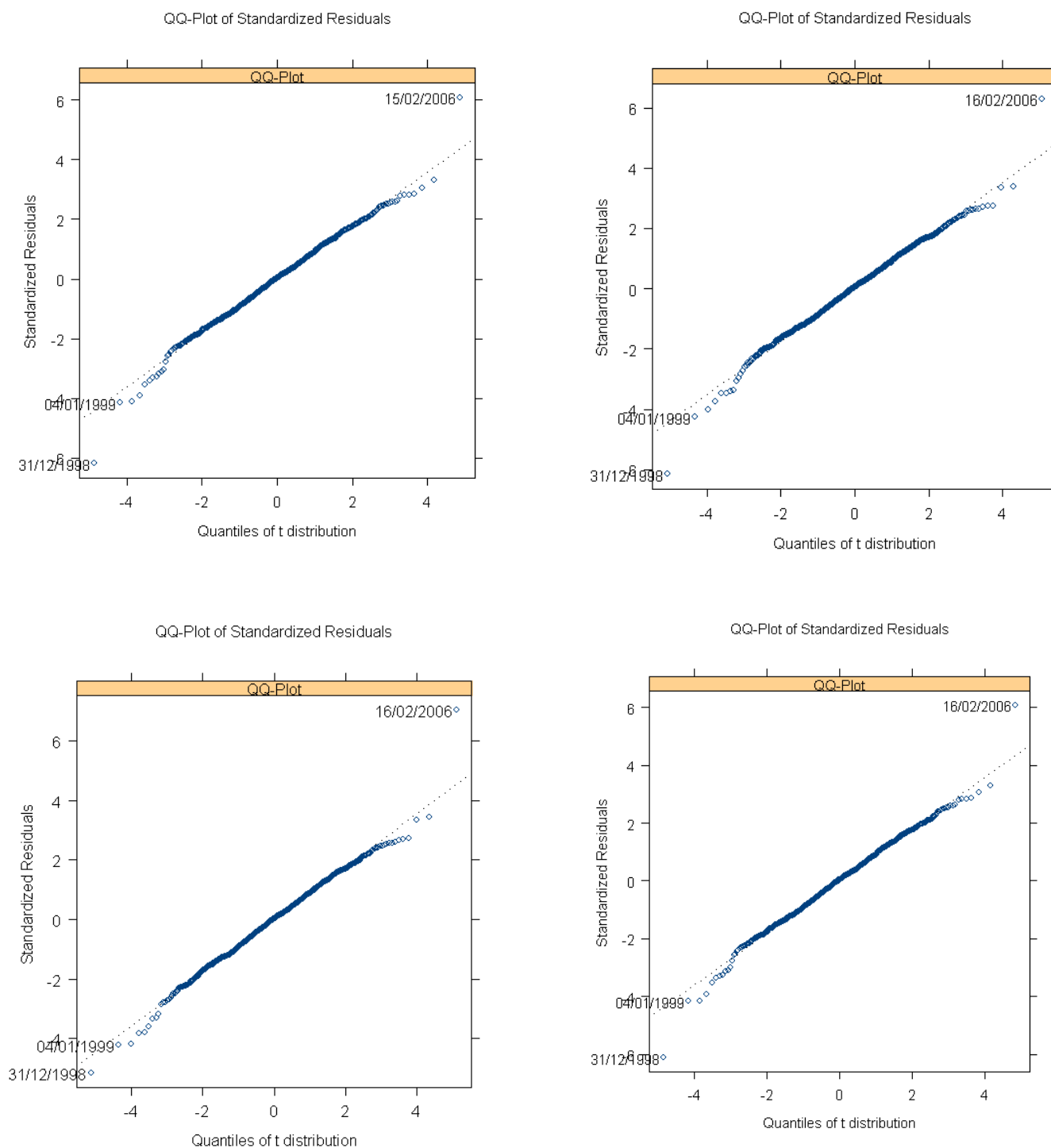


Figura 6.7 – QQ Plot (distribuição t) : Dow Jones, Ibovespa, LN252 e Cupom 252

6.4 - Cálculo do *VaR* e do *ES*

Para obter o *VaR* e o *ES*, para as séries estudadas, foram criadas rotinas no S-plus, R e Matlab, sendo que cada um dos softwares foram adotados de acordo com a necessidade.

6.4.1 – Modelos multivariados

Para as estimativas diárias das Matrizes de Covariância dos seguintes modelos Multivariados – BEKK, VEC diagonal, VEC diagonal com resíduos seguindo distribuição t, Matriz diagonal, EWMA¹⁴, adotamos o seguinte procedimento:

- (i) Iniciamos a primeira estimativa com 252 dias, calculamos a matriz de variância e covariância, esta matriz será utilizada para o cálculo da primeira medidas de risco;
- (ii) Diariamente acrescentamos uma nova amostra (dia) e re-estimamos o modelo, repetindo o procedimento até o final da amostra, ou seja, re-estimamos o modelo 1405 vezes.

Com base na matriz de covariância estimada para cada um dos modelos multivariados, geramos a matriz de correlação, usaremos estas matrizes para gerar via simulação de Monte Carlo as medidas de risco. Para tanto, iremos gerar Variáveis Aleatórias i.i.d. (independente e identicamente distribuídas), no nosso caso, iremos gerar (Nx4) Variáveis Aleatórias.

Todavia, estas variáveis não possuem a relação de dependência que existia inicialmente, neste caso caracterizado pela correlação. Este relação de dependência será criada pela transformada de Cholesky da matriz de correlação. Com base nesta matriz e os números aleatórios, teremos então variáveis aleatórias que possuem a mesma relação de dependência. Com base nestas variáveis, calcula-se então o *VaR*¹⁵:

$$VaR = q_{0,95} \quad \text{Equação 6.4}$$

¹⁴ Vide capítulo 3

¹⁵ As medidas de risco foram explicadas no capítulo 2

e o Expected Shortfall

$$ES = E(x|x > VaR) \quad \text{Equação 6.5}$$

6.4.2 – Modelos multivariado – Modelo de correlação dinâmica (DCC)

Para as estimações diárias das Matrizes de Covariância dos modelos Multivariado DCC, adota mos o seguinte procedimento, conforme verificamos no capítulo 4.7 a grande vantagem deste modelo é a redução de parâmetros a serem estimadas, isto se deve ao fato de utilizar-se de modelos univariados pré-estimados preocupando-se apenas em estimar a correlação condicional. Em virtude disto, efetuamos o estudo de cada série com intuito de verificar qual o modelo de volatilidade melhor explica a série estudada.¹⁶

Com base nos modelos de volatilidade encontrados, modificamos a rotina desenvolvida por Sheppard em Matlab ¹⁷para cálculo do DCC (a original não permitia a utilização de volatilidade distintas) para efetuar o cálculo corretamente, ou seja, utilizando as volatilidades pré-estimadas. Com base na primeira estimação com 252 dias de amostra, calculamos a matriz de covariância, esta matriz será utilizada para o cálculo da primeira estimação das medidas de risco, como em 6.4.1 re-estimamos o modelo diariamente acrescentamos sempre um nova amostra (dia) perfazendo um total de 1405 estimações.

Com base na matriz de covariância foi gerada a matriz de correlação e com base nestas medidas de risco via simulação de Monte Carlo (seguindo o mesmo procedimento descrito anteriormente).

6.4.3 – Modelos multivariado – VaR Calculado pela Teoria de Cópulas

O mesmo procedimento foi implementado para os cálculos das medidas de risco das variáveis geradas por cópulas; porém neste caso após a estimação dos parâmetros da cópula geram-se a variáveis aleatórias com o gerador específico da cópula.¹⁸

No caso das cópulas, como verificado no capítulo 5 o Teorema de Sklar permite que a modelagem de distribuições multivariadas seja função de suas marginais e da função

¹⁶ Vide tabela 6.3

¹⁷ Disponível do site:

¹⁸ Sobre este procedimento verificar o capítulo 5.3 – Tabela 5.1

de acoplamento. Desta forma, após o estudo de dependência podemos verificar se a função de acoplamento Clayton apresenta uma melhor modelagem para a cauda negativa, logo como as medidas de risco preocupam-se com a estimação das perdas, adotamos esta função para o estudo¹⁹. Com base na escolha da função de acoplamento, optamos em estimar as distribuições marginais como normais e pela distribuição gama, esta escolha baseou-se para efetuar-se a análise da força da suposição de normalidade.

6.4.4 – Modelos multivariado – VaR Histórico

Para obter o *VaR* histórico este trabalho adotou o seguinte procedimento, calculamos primeiramente o quantil de cada fator de risco, ou seja o *VaR*, a seguir para transformá-lo em um *portfolio* multiplicamos pela matriz de correlação histórica

6.4.5 – Análise do *Backtesting* para o VaR

Para efetuarmos os cálculos de *backtesting* para VaR, iremos adotar a metodologia descrita no livro de McNeil et al (2005, p.162-163).

Assim sendo temos, considerando o indicador de violação como:

$$\hat{I}_{t+1} := I_{\{L_{t+1} > \overline{VaR}_{\alpha}^t\}}. \quad \text{Equação 6.6}$$

Onde:

$\overline{VaR}_{\alpha}^t$ - VaR condicional estimado um passo a frente.

De acordo com McNeil et al (2005, p.162), caso a estimação do quantil estiver correta, deve-se esperar que o indicador empírico de violações siga uma sequência de variáveis aleatórias i. i.d., isto é, independentes com distribuição de Bernoulli e probabilidade de sucesso igual a $(1-\alpha)$.

Para se verificar se as violações do VaR de um passo a frente tem distribuição de Bernoulli devemos verificar dois aspectos: verificar se o número de violações está correto em média e verificar se o padrão das violações é consistente com o comportamento de variáveis i.i.d..

¹⁹ ver figura 5.1

Certamente, se calcularmos um VaR para as datas $t=1, \dots, m$, esperamos que:

$$\sum_{t=1}^m \hat{I}_t \sim B(m, 1-\alpha), \text{ e isto é facilmente comprovado através de um } two\text{-sided binominal}$$

test, aonde ao se rejeitar hipótese nula o teste irá sugerir que o VaR esta super-estimado ou sub-estimado.

Os resultados para o Backtest do *VaR* serão apresentados a seguir.

Tabela 6.4 – Proporção dos dados em que a perda excede o VaR de 97,5% para cada cauda, para o total e seus respectivos p-valores²⁰

Modelo	$\alpha=0.025$	$\alpha=-0.025$	$\alpha=0.05$
Matriz Diagonal	2,99% 0,2656	2,21% 0,4971	5,20% 0,7594
EWMA	5,27% 0,0000	5,05% 0,0000	10,32% 0,0000
VEC com dist. T	3,91% 0,0015	3,77% 0,0046	7,69% 0,0000
BEKK	3,35% 0,0595	2,92% 0,3464	6,26% 0,0371
Histórico	3,20% 0,1034	2,95% 0,2656	6,15% 0,0659
Copulas Clayton - marginais Gamma	3,98% 0,0011	3,47% 0,0396	7,45% 0,0001
Copulas Clayton - marginais Normais	3,90% 0,0015	2,40% 0,7976	6,30% 0,0272
VEC	4,20% 0,0002	4,20% 0,0002	8,40% 0,0000
DCC - Volatilidade univariadas	2,49% 1,0000	2,85% 0,4413	5,34% 0,5814

Fontes: Cálculos efetuados pelo Software S-Plus , R e Matlab, base de dados proveniente da Económica

Como podemos verificar o modelo DCC foi o que apresentou os melhores resultados para pontos abaixo do VaR porém o modelo matriz diagonal apresentou uma pequena superioridade ao se somar os pontos acima do VaR. A respeito da alta falha

²⁰ Seguindo explicação anterior

produzida pelas Cópulas, não nos surpreendeu em virtude de que a maioria dos trabalhos que usamos como referência em níveis de confiança alto encontraram resultados também desfavoráveis. Analisando o p-valor não rejeitamos a hipótese nula para os seguintes modelos: VaR calculado por Matriz diagonal, VaR Histórico e DCC para todos os teste, para o teste das caudas BEKK não rejeitou a hipótese nula e finalmente para as Cópulas com marginais gama e com marginais normais não rejeitaram apenas para a cauda esquerda. Nos casos aonde a hipótese nula foi rejeitada, segundo McNeill et all (2005, p.163), o VaR pode estar sistematicamente sobre-estimado ou super-estimado.

Tabela 6.5 – Proporção dos dados em que a perda excede o VaR de 99,5% para cada cauda, para o total e seus respectivos p-valores.

Modelo	$\alpha=0.005$	$\alpha=-0.005$	$\alpha=0.01$
Matriz Diagonal	0,36% 0,571	0,14% 0,0561	0,50% 0,0593
EWMA	0,93% 0,0344	0,57% 0,7019	1,49% 0,0786
VEC com dist. T	0,78% 0,1797	0,43% 0,8506	1,21% 0,4186
BEKK	0,71% 0,3416	0,36% 0,5707	1,07% 0,7874
Histórico	0,57% 0,7019	0,64% 0,4439	1,21% 0,4186
Copulas Clayton - marginais Gamma	0,49% 1,0000	0,58% 0,7019	1,07% 0,7874
Copulas Clayton - marginais Normais	0,45% 0,8506	0,48% 1,0000	0,94% 0,8935
VEC	0,85% 0,0828	0,43% 0,8506	1,28% 0,3464
DCC - Volatilidade univariadas	0,92% 0,0344	0,85% 0,0828	1,77% 0,0067

Fontes: Cálculos efetuados pelo Software S-Plus , R e Matlab, base de dados proveniente da Económica

Como já era de se esperar os modelos que utilizam as Cópulas realmente melhoraram a sua eficiência quando os níveis de confiança aumentaram, sendo que as

Cópuas foram superiores aos demais ao se analisar os pontos abaixo do VaR (onde o risco é maior, ou seja, a perda real).

Analisando o p-valor encontramos apenas no caso do DCC bi-caudal a rejeição da hipótese nula, portanto como comentado anteriormente o VaR estimado por este modelo poderá estar superestimando ou subestimando o VaR.

6.4.6 – Análise do *Backtesting* para o *Expected Shortfall*

Para efetuarmos os cálculos de backtesting para Expected Shortfall, iremos adotar a metodologia descrita no livro de McNeil et al. (2005, p.163).

A partir de da observação de ES_{α}^t que é o *expected shortfall* de um distribuição (contínua) de perdas $F_{L_{t+1}|\mathfrak{S}}$ e definimos $S_{t+1} = (L_{t+1} - ES_{\alpha}^t)I_{t+1}$, onde o processo de perda arbitrário $(L_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ do processo $(S_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ forma uma série diferencial martingal satisfazendo $E(S_{t+1}|\mathfrak{S}_t) = 0$, temos :

$$S_{t+1} = \sigma_{t+1} (Z_{t+1} - ES_{\alpha}(Z)) I_{\{Z_{t+1} > q_{\alpha}(Z)\}}. \quad \text{Equação 6.7}$$

Isto sugere que, quando a medida de risco e volatilidade são estimadas podemos criar o *violation residuals* da seguinte forma :

$$R_{t+1} = \hat{S}_{t+1} / \hat{\sigma}_{t+1} \quad \hat{S}_{t+1} := (L_{t+1} - \hat{E}S_{\alpha}^t) \hat{I}_{t+1} \quad \text{Equação 6.8}$$

Onde : \hat{I}_{t+1} é o indicador de violação definido na (Equação 6.6). Esperamos que estas realizações deste indicador se comportem com uma variável iid com média zero.²¹

²¹ Maiores detalhes podem ser verificados em EFRON, B.F e TIBSHIRANI, R.J (1994, pág.224)

Tabela 6.6 – P-valor para os modelos estimados para Expected Shortfall referente a um VaR de 95% IC

Modelo	ES=(L L>VaR 95%)
Matriz Diagonal	0,5342
EWMA	0,0040
VEC com dist. T	0,0663
BEKK	0,1573
Histórico	0,1245
Copulas Clayton - marginais Gamma	0,1653
Copulas Clayton - marginais Normais	0,2432
VEC	0,0003
DCC - Volatilidade univariadas	0,4523

Fontes: Cálculos efetuados pelo Software S-Plus , R e Matlab, base de dados proveniente da Económica

Analisando o p-valor gerado pelo teste de *violation residuals*, podemos concluir que somente os modelos EWMA e VEC utilizados para a estimação de *expected shortfall* rejeitaram a hipótese H0, indicando que a média não é igual a zero.

Tabela 6.7 – P-valor para os modelos estimados para Expected Shortfall referente a um VaR de 99% IC

Modelo	ES=(L L>VaR 99%)
Matriz Diagonal	0,0453
EWMA	0,0500
VEC com dist. T	0,4327
BEKK	0,6623
Histórico	0,4672
Copulas Clayton - marginais Gamma	0,6538
Copulas Clayton - marginais Normais	0,7834
VEC	0,0340
DCC - Volatilidade univariadas	0,0512

Fontes: Cálculos efetuados pelo Software S-Plus , R e Matlab, base de dados proveniente da Económica

Analisando o p-valor gerado pelo teste de *violation residuals*, podemos concluir que todos os modelos utilizados para a estimação de *expected shortfall* não rejeitaram a hipótese H0, indicando que a média é igual a zero.

Conclusão

Esta dissertação de mestrado mostrou como a teoria de Cópulas pode ser aplicada como ferramenta para a estimação de medidas de riscos.

Este trabalho consistiu na análise de um *portfolio* tetra-variado formado pelos fatores de risco pré 252 e cupom 252; e pelos índices da Bolsa de São Paulo e de Nova York – Ibovespa e Dow Jones respectivamente.

Utilizamos a grande maioria de modelos multivariados utilizados para a estimação de modelos multivariados, além do *Dynamic Conditional Correlation (DCC)* para confrontar a teoria de Cópulas

Claramente podemos verificar que as medidas de risco estimadas pela teoria de Cópulas apresentam uma superioridade considerável as outras técnicas quando se considera nível de confiança alto.

O grande problema que encontramos é em relação à estimação do modelo que é relativamente lento e de difícil convergência, neste trabalho tivemos que adotar um processo de estimação em dois estágios, pois de outra forma não conseguimos convergência.

Em relação sua aplicabilidade e implantação em bancos de investimentos, entendemos como um pouco crítica no momento, por dois motivos principais: primeiro a necessidade de ter que se supor alguma função de acoplamento de forma “*ad-hoc*”, este tipo de imposição dificulta a defesa perante a alta cúpula, e em segundo lugar o dificuldade para estimar modelos multivariados acima de quatro. Nesta linha o *package* cópulas possui uma funcionalidade de criar FDA e FD em linguagem simbólica o que permite utilizar funções geradas para fazer a estimação em outros softwares²² e linguagens.

²² As formulas 5.15 e 5.16 foram geradas através desta funcionalidade

Referências bibliográficas

- ALEXANDER, Carol (2001) **Market Models: A Guide to Financial Data Analysis**, New York: John Wiley & Sons Ltd, 2001. 445p
- ARTZNER, P.et al. Thinking Coherently, **RISK**, v.10, n.11, p.68-71, 1997.
- ARTZNER, P.et al. Coherent measures of risk. **Mathematical Finance**, n.9, p.203-228, 1999.
- ATTANASIO, O.P. Risk, time varying second moments and market efficiency. **Review of Economic Studies**, n.58, p.479-94, 1991
- BABA, Y., R.F. Engle; D.F. Kraft e K.F. Kroner, Multivariate simultaneous generalized ARCH, Department of Economics, University of California, San Diego, **Economics Working Paper Series**, 89-57r, 1993.
- BOLLERSLEV, T; R.F ENGLE e J.M WOOLDRIDGE .A Capital asset pricing model with time varying covariance's. **Journal of Political Economy**, n.96, p.116-31, 1988.
- BOLLERSLEV, T. Modeling the coherence in short-run nominal exchange rates: A multivariate generalized ARCH approach. **Review of Economics and Statistics**, n.72, p.498-505, 1990.
- CHERUBINI, Umberto; LUCIANO, Elisa e VECHIATO, Walter. **Copulas Methods in Finance**. 1.edição. Chichester: John Wiley Sons Inc, 2004. 293 p.
- CLAYTON, D. G. A model for association in bivariate life tables and its application in epidemiological studies of familial tendency in chronic disease incidence. **Biometrika**, n.65, p. 141–152, 1978.
- DING, Z; Granger; C.W.J; R F., Engle, R F. A long memory property of stock market returns and new model. **Journal of Empirical Finance** 1, p.83-106, 1998.
- EMBRECHTS P; McNEIL, A; STRAUMAN, D. Correlation and dependency in risk: Properties and pitfalls. In: DEMPSTER, M. **Risk Management: value at risk and beyond**, Cambridge: Cambridge University Press, 1999
- EFRON, B.F; TIBSHIRANI, R.J, **An Introduction to the Bootstrap**. Flórida: Chapman & Hall, 1994. 456p.
- ENGLE, R F. Autoregressive conditional heteroscedastic with estimates of the variance of U.K inflation. **Econometrica**, n.50, p.987-1008, 1982

ENGLE, R F e KRONOER, K.F. Multivariate simultaneous generalized ARCH. **Econometric Theory**, v. 50, p.987-1007, 1995.

ENGLE, R F e SHEPPARD, K. Theoretical and Empirical Properties of Dynamic Conditional Correlation Multivariate GARCH, **NBER Working Paper**, n.8554, 2001.

FÉRON, R. Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont donnés, cas de l'espace à trois dimensions. **Publ. Inst. Statist. Univ. Paris**, n.5, p .3-12, 1956.

FISHER, N.I. **Cópuas** . Encyclopedia of Statistical Sciences, Nova York: John Wiley & Sons, 1997. p.159-163

FRANK, M. J .On the simultaneous associativity of $F(x, y)$ and $x + y - f(x, y)$. **Aequationes Mathematicae**, n.19, p.194–226, 1979.

FRANSES, P.H e VAN DJIJK. **Non-linear time series models in empirical finance**. Cambridge: Cambridge University Press, 2000, 280p.

GLASTEN, L R.; JAGANNATHAN, R e RUNKLE D.E. On the relation between the Expected Value and the Volatility of the Normal Excess return on Stocks. **Journal of Finance**, n.48, p. 1779-1801, 1993.

GUMBEL, E. J. Bivariate exponential distributions. **Journal of the American Statistical Association**, n.55, p. 698–707, 1960.

JP Morgan Bank. **Risk Metrics Technical Manual**. New York: J.P Morgan Bank, 1995.

JORION, P. **Value at Risk: The New Benchmark for controlling Market Risk**. Nova York: McGraw-Hill, 2001, 305p.

MARÇAL, E.F. **Ensaio sobre eficiência, cointegração, componentes comuns, não linearidades na variância nos mercados financeiros**: Um estudo da estrutura a termo das taxas de juros e da volatilidade de títulos da dívida soberana, São Paulo,2004. 121p, Tese (Doutorado em Economia) – Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade, Universidade de São Paulo, São Paulo,2004.

MARKOWITZ, H. Portfolio Selection. **Journal of Finance**, n.7, p 77-91, 1952

McNEIL, Alexander J; FREY, Rüdiger e EMBRECHTS, Paul. **Quantitative Risk Management: concepts, techniques, and tools**. New Jersey: Princeton University Press, 2005, 538p.

MENDES, B.V. **Introdução à Análises de Eventos Extremos**. Rio de Janeiro: E-Paper Serviços Editoriais Ltda, 2004, 232p.

NELSEN R.B. **An introduction to Cópulas**. Lectures notes Statistics 139, Nova York: Spring-Verlang New York, Inc, 1999, 216p.

NELSON, D. B. Conditional Heteroscedasticity in Asset Returns: a New Approach. **Econometrica**, v.59, 347-370, 1991.

PALARO, H. **Aplicação de acoplamento no cálculo do Valor em Risco**, Campinas.142p. Dissertação (Mestrado em Estatística) - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, Campinas, 2004.

SKLAR, A. Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. **Publ. Inst. Statist. Univ. Paris**, n.8, p 229-231, 1954

SECURATO, J.R. **Cálculo Financeiro das Tesourarias**. São Paulo: Saint Paul Institute of finance, 2004, 312p.

TSAY, R.S. **Analysis of financial time series**. New York: John Wiley & Sons Inc, 2002, 448p.

TSE, Y.K e TSUI, A.K.C. A Multivariate Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity Model with Time-Varying Correlations. **Jornal of Business and Economic Statistics**, Vol. 2002, n.3, 2002.

YAN, J. Enjoy the joy of Cópulas, **preprint submitted to Elsevier Science**, 20 jun. 2006. Disponível em: <<http://www.stat.uiowa.edu/techrep/tr365.pdf>>. Acesso em: 20 julho. 2006.

ZIVOT, E e WANG, J . **Modeling Financial Time Series with Splus** . New York: Spring Science+Business Media, Inc., 2006, 998p.