

**Insper Instituto de Ensino e Pesquisa  
Faculdade de Economia e Administração**

**Vitor Cardoso Granero**

***Value at Risk (VaR): DIFERENTES ABORDAGENS  
ECONOMÉTRICAS***

**São Paulo  
2012**

Vitor Cardoso Granero

***Value at Risk (VaR): diferentes abordagens econométricas***

Monografia apresentada ao curso de Ciências Econômicas, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel do Insper Instituto de Ensino e Pesquisa.

Orientador:  
Prof. Sérgio Ricardo Martins – Insper

**São Paulo  
2012**

Granero, Vitor Cardoso

*Valor em Risco (VaR): diferentes abordagens econométricas.*

– São Paulo: Insper, 2012.

52 f..

Monografia: Faculdade de Economia e Administração. Insper  
Instituto de Ensino e Pesquisa.

Orientador: Prof. Sérgio Ricardo Martins

Vitor Cardoso Granero

***Value at Risk (VaR): diferentes abordagens econométricas***

Monografia apresentada à Faculdade de Economia do Insper, como parte dos requisitos para conclusão do curso de graduação em Economia.

Aprovado em Dezembro 2012

**EXAMINADORES**

---

Prof. Sérgio Ricardo Martins  
Orientador

---

Prof Dr. Michael Viriato Araújo  
Examinador(a)

---

Profa. Priscila Fernandes Ribeiro  
Examinador(a)

## Agradecimentos

Agradeço a todos aqueles que de alguma forma me incentivaram, apoiaram e desafiaram, proporcionando-me a oportunidade de superar os limites e apresentaram grande parte do conhecimento que levarei como maior patrimônio pessoal.

Ao Professor Sérgio Ricardo Martins pelo acompanhamento e tempo dedicado na construção do embasamento que viabilizou este trabalho, marco na minha conquista da formação acadêmica.

## Dedicatória

À minha família. Especialmente ao meu irmão, que me apoiou e acompanhou de perto ao longo dos quatro anos da faculdade.

## Resumo

GRANERO, Vitor Cardoso. Value at Risk (VaR): diferentes abordagens econométricas. São Paulo, 2012. 49p. Monografia – Faculdade de Economia e Administração. Insper Instituto de Ensino e Pesquisa.

O presente trabalho procura utilizar diferentes abordagens estatísticas para o cálculo do *Value at Risk* (VaR) para uma carteira de ativos exposta ao fator de risco IBOVESPA e cambial, controlado pela PTAX. O diferencial deste trabalho, no entanto, consiste em aplicar a metodologia de cópulas a fim de capturar um cenário mais fidedigno à realidade dos fatores de risco quando comparado às metodologias usuais de cálculo de risco. Isto porque, as cópulas não necessitam de hipóteses simplificadoras, como, por exemplo, pressuposição de normalidade e que, por vezes, acabam gerando resultados menos assertivos. Sendo assim, as metodologias comparativas tendem a ser menos fidedignas na modelagem dos fatores de risco. Logo, é esperado que, ao fazer o backtesting dos modelos, o mesmo consiga capturar variações do VaR com maior eficiência.

Palavras-chave: Risco, Value at Risk, Cópulas.

## Abstract

GRANERO, Vitor Cardoso. Value at Risk (VaR): different econometric approaches. São Paulo, 2012. 49p. Monograph – Faculdade de Economia e Administração. Insper Instituto de Ensino e Pesquisa.

This paper seeks to use different statistical approaches for calculating Value at Risk (VaR) for a portfolio of assets exposed to the risk factor IBOVESPA and exchange, controlled by PTAX. The differential of this work, however, is to apply the methodology of copulas to capture a more reliable the reality of risk factors when compared to the usual methodologies for calculating risk. This is because the mating need not simplifying assumptions, such as, for example, assumption of normality and sometimes end up generating less assertive results. Thus, the comparative methodologies tend to be less reliable in the modeling of risk factors. Therefore, it is expected that by doing the backtesting of models, it can capture changes in VaR more efficiently.

Keywords: Risk, Value at Risk, Copulas.



# Sumário

|       |   |    |
|-------|---|----|
| 1     | Introdução.....   | 11 |
| 2     | Revisão Bibliográfica .....                                       | 14 |
| 3     | Metodologia.....  | 16 |
| 3.1   | Definindo VaR ( <i>Value at Risk</i> ).....                       | 16 |
| 3.2   | VaR via ARMA - GARCH.....   | 18 |
| 3.3   | VaR via Quantis Empíricos .....                                   | 18 |
| 3.4.  | VaR via Cópulas.....  | 19 |
| 3.4.1 | Introdução à Cópulas .....  | 19 |
| 3.4.2 | Definição da Função Cópula .....                                  | 19 |
| 3.4.3 | Distribuição de Probabilidades pelo Teorema de Sklar .....        | 20 |
| 3.5   | Aplicação Prática da Teoria de Cópulas.....                       | 22 |
| 3.6   | Famílias de Cópulas .....   | 23 |
| 3.6.1 | Cópulas Arquimedianas.....  | 23 |
| 3.6.2 | Cópulas Elípticas .....   | 24 |
| 4     | Dados .....   | 27 |
| 4.1.  | IBOVESPA: previsões <i>versus</i> realidade nos últimos anos..... | 27 |
| 4.2   | Metodologia de cálculo IBOVESPA.....                              | 28 |
| 4.3   | PTAX: <i>proxy</i> para o fator de risco cambial.....             | 30 |
| 5     | Metodologia de Seleção do Modelo de Cópula.....                   | 33 |
| 5.1   | Definições para Cálculo do VaR .....                              | 34 |
| 5.1.1 | Modelo de Cópulas.....  | 34 |
| 5.1.2 | Modelo de Quantis Empíricos .....                                 | 35 |
| 5.1.3 | Modelo <i>RiskMetrics</i> <sup>TM</sup> .....                     | 35 |

|   |    |
|---|----|
| 5.2 Comparação dos Modelos .....                          | 36 |
| 6 Resultados.....   | 37 |
| 7 Conclusão .....   | 46 |
| Referências Bibliográficas.....                           | 47 |
| Apêndice 1 : Descritivo da carteira teórica de ações..... | 49 |
| Apêndice 2: Teste de Raiz Unitária.....                   | 51 |
| Anexo – Banco Central do Brasil – Circular N° 3.478.....  | 52 |

## Lista de figuras

|  |    |
|--|----|
| Figura 3.1: Representação Cópula Frank ( $\alpha = 2$ ) .....      | 24 |
| Figura 3.2: Representação para Cópula Normal ( $\rho=0,8$ ). ..... | 25 |
| Figura 3.3: Cópula t-Student ( $\rho=0,95$ , $n=2$ ).....          | 26 |
| Figura 4.1: Evolução IBOVESPA a partir de 01/01/2000. ....         | 28 |
| Figura 4.2: Evolução da PTAX a partir de outubro de 2009.....      | 31 |
| Figura 6.1: Retorno diário IBOVESPA.....                           | 38 |
| Figura 6.2: Retorno diário PTAX.....                               | 28 |
| Figura 6.3: Histograma para os retornos diários do IBOVESPA.....   | 39 |
| Figura 6.4: Histograma para os retornos diários do PTAX. ....      | 39 |
| Figura 6.5: Gráfico Quantil-Quantil para IBOVESPA.....             | 40 |
| Figura 6.6: Gráfico Quantil-Quantil para PTAX.....                 | 41 |

## 1 Introdução

Nos últimos anos, com a passagem por períodos turbulentos marcados pelas crises do mercado financeiro global e a bancarrota de inúmeras instituições financeiras, principalmente nos mercados ditos desenvolvidos, aumentou-se a percepção da importância e necessidade da estimação de medidas de risco que procuram capturar de forma mais eficiente a exposição das instituições inseridas neste contexto e o impacto no sistema como um todo em caso de falência. Além disso, os órgãos competentes e responsáveis pela regulação do setor financeiro vêm aumentando as exigências legais para a implantação da gestão de risco por meio de leis como a Sarbanes-Oxley, o Comitê de Basileia, no âmbito internacional e, no Brasil, pelo Banco Central do Brasil (Bacen). O Anexo deste estudo traz um panorama do marco regulatório do tema para o setor financeiro.

Entretanto, a gestão de risco não se deve apenas às exigências legais, mas também às exigências institucionais, uma vez que há interesse direto dos investidores e parceiros do negócio para atividades no sentido de mitigação dos riscos, uma vez que há benefícios diretos na estrutura de capital e retorno sobre os investimentos. Tradicionalmente, as organizações estão sujeitas à três classes de riscos, sendo eles o estratégico, o operacional e o financeiro, cada qual com as suas subclasses.

Apesar da percepção dos riscos inerentes às atividades, sejam bancos ou empresas, a mensuração se revelou uma tarefa difícil, dadas as diversas classificações possíveis. Neste trabalho, especificamente, o foco será o risco financeiro de mercado, ou seja, aquele relacionado às perdas às quais os bancos estão sujeitos devido às variações no valor de mercado dos ativos em carteira, em decorrência de variações nos preços, taxas de juros ou taxa de câmbio.

Usualmente, estabeleceu-se como medida padrão desse tipo de risco o VaR (*Value at Risk*), que envolve o cálculo da volatilidade de um ativo financeiro ou de uma carteira composta por vários ativos. As abordagens para este tipo de cálculo geralmente se concentram em três principais métodos: o do *RiskMetrics*<sup>TM</sup> (MINA e XIAO, 2001), dos quantis empíricos e o método de acordo com a Teoria dos Valores Extremos (MORETTIN, 2011).

Uma abordagem econométrica aceitável neste cenário de cálculo da volatilidade para medir o VaR são aquelas que utilizam, por exemplo, os modelos da família ARCH

(*Autorregressive Conditional Heterocedastic*), proposto inicialmente por Engle (1982) e generalizado, posteriormente, por Bollerslev (1986), dando origem aos modelos GARCH (*Generalized Autorregressive Conditional Heterocedastic*). Entretanto, esta abordagem se mostra, de certa forma, complexa para o cálculo do VaR na prática, em função da dificuldade em se ajustar um modelo multivariado com variância condicional heterocedástica, como descreve Morettin (2011, p.193), para o caso de uma carteira composta por diversos instrumentos financeiros, sendo alguns sujeitos a inúmeros fatores de risco. A fim de propor uma maneira de simplificar esta abordagem, o *RiskMetrics*<sup>TM</sup> proposto pelo banco JP Morgan sugere o uso do modelo EWMA (*Exponentially Weighted Moving Average*), Morettin (2011), também chamado de Alisamento Exponencial, que pressupõe erros normais e sugere uma ponderação para a volatilidade passada dependendo do instante de tempo, sugerindo que os choques nas séries de retornos sejam dissipados suavemente com o tempo. O que se mostra uma ponderação plausível, uma vez que eventos passados influenciam cada vez menos em eventos presentes, ou seja, vão perdendo o poder de influencia ao longo do tempo.

Aqui, cabe ressaltar, que a metodologia a ser utilizada neste trabalho também será estatística, todavia, diferente das usuais já citadas. Ou seja, o intuito será de avaliar o uso de Cópulas (NELSEN, 1999) a fim de capturar a dependência entre variáveis financeiras e fatores de risco, independentemente da distribuição possuir caudas pesadas e assimetria, entre outras características, as quais colocam em xeque muitas vezes, os métodos utilizados pelo mercado financeiro e a confiabilidade das estimativas geradas.

Assim sendo, a cópula acopla as distribuições de probabilidade marginais, utilizando-se para tanto da relação de dependência entre as variáveis aleatórias, que constituem os fatores de risco. Entretanto a vantagem desta teoria está no fato de a cópula fazer isso sem a necessidade das restrições ao formato das distribuições marginais, permitindo que tais variáveis sejam escolhidas de maneira a modelar os fatores de risco de forma mais realista.

A discussão da aplicabilidade das cópulas como uma metodologia alternativa para o cálculo do risco financeiro de mercado é crescente nos últimos anos, com um número alto de artigos que abordam o tema e colocando também em prática a recomendação de um dos maiores percussores do *Value at Risk* no sentido de que o mesmo deve ser encarado como “[...] *procedimento necessário, porém não suficiente,*

*para gerenciamento do risco. No entanto, precisa ser suplementado por testes de stress, limites e controles [...]*" (JORION, 2007).

## 2 Revisão Bibliográfica

O uso do VaR como medida de risco financeiro de mercado começou a se popularizar a partir de 1995, quando o JP Morgan divulgou por meio do *RiskMetrics*<sup>TM</sup> a metodologia que rapidamente se difundiu entre as instituições financeiras e, posteriormente, também passou a ser utilizada até mesmo por órgãos reguladores. Alexander (2001), por exemplo, discute em seu trabalho alguns dos modelos geralmente usados pelo mercado financeiro, o que inclui dentre eles o VaR. Na mesma publicação, é possível identificar algumas vantagens do uso dessa medida como, por exemplo, a simplicidade de cálculo, o arcabouço teórico que o fundamenta e, também, o fato de poder ser estendido a outros tipos de riscos inerentes às atividades bancárias e instituições financeiras em geral. No entanto, algumas desvantagens também são destacadas para o uso desta metodologia. Apenas como exemplo, para o caso do VaR *Paramétrico*, ou seja, aquele no qual a metodologia se utiliza de estimações de parâmetros, é feita a suposição de distribuição normal do retorno, implicando que o risco pode ser obtido a partir da estimação de tão somente dois parâmetros relacionados aos retornos: média e variância incondicional. Ou seja, os mesmos parâmetros que definem a distribuição Normal. Já para o VaR *Histórico*, outra maneira de calcular a medida de risco, a distribuição dos retornos do ativo é preservada, no entanto, a distribuição conjunta da carteira de ativos é desprezada, gerando imprecisões nos resultados.

Com isso, a temática envolvendo a agregação de riscos está bastante em voga. Conjuntamente, a discussão acerca da estrutura de dependência entre os ativos financeiros é acalorada, sendo que a estimação por cópulas vêm se mostrando uma saída com resultados satisfatórios aos problemas levantados, como mostrado, por exemplo, por Zunino (2006), em que enfatiza a negligência em se estudar os efeitos da interdependência.

A estrutura de dependência é importante na identificação e cálculo da matriz de correlação dos ativos que compõem a carteira de uma instituição financeira, uma vez que impacta diretamente na exposição ao risco financeiro de mercado da organização, conforme citam Fermanian e Scaillet (2004). Logo, a mesma deve ser preservada e levada em conta no momento de cálculo do VaR, mas fato esse que algumas abordagens descartam ou adotam metodologias simplificadoras para sua modelagem.

Para tanto, é preciso especificar qual a estrutura de correlação entre os retornos dos ativos, que, por sua vez, está diretamente ligada à distribuição dos retornos. Geralmente, a estrutura adotada na literatura é a correlação linear de Pearson. Todavia, Pereira (2009), discute em seu artigo a implicação de tal utilização e mostra um comparativo entre as diferentes maneiras de se estimar a estrutura adequada de correlação.

Sumariamente, a linearidade é apenas mais uma das simplificações dos modelos teóricos e que pode causar erros significativos nas medidas de riscos. Por exemplo, Ang e Chen (2002) e Patton (2004) explicam que os retornos dos ativos financeiros tendem a possuir uma estrutura de dependência assimétrica, diferentemente da simétrica que usualmente é pressuposto pelos modelos. Ou seja, implicando que tal simplificação possa gerar resultados imprecisos e não correspondentes à realidade. Uma constatação empírica, encontrada em Maheu e McCurdy (2000), verificou que em períodos de queda de preços, a correlação entre ativos é mais forte, devido ao comportamento defensivo dos acionistas, denominado “*bear market*”, sendo este, outro fator que exige atenção no momento de cálculo das estimativas da exposição ao risco de mercado.

Ainda, o uso do método de simulações históricas implica na geração de números aleatórios, mas que pressupõem independência dos eventos, fato este, que sabemos não se aplicar à realidade. Por isso, qualquer tomada de decisão baseada em cenários gerados a partir de simulações desse tipo pode ser igualmente errônea e comprometer a integridade da instituição. Sendo assim, já é possível perceber que na prática o tratamento da estrutura de dependência dos retornos financeiros, em geral, não é feito de maneira apropriada. Tendo esse problema em vista, Zunino (2006) e Pereira (2009), discutem, por exemplo, a relevância de se desenvolver a metodologia de cálculo do VaR via Cópulas, tendo tal abordagem uma detalhada descrição em Morettin (2011), que observa diretamente este ponto e preserva a dependência entre os ativos, sendo capaz de gerar cenários com um grau satisfatório de correlação e, portanto, mais condizente com a realidade.

Posto isso, o intuito deste trabalho é fazer a comparação do nível de assertividade do VaR por meio dos modelos usuais e por meio do uso das cópulas. Tal comparação será feita via *backtesting* dos modelos para a volatilidade da carteira teórica deste estudo.



### 3 Metodologia

#### 3.1 Definindo VaR (*Value at Risk*)

Informalmente, Morettin (2011, p. 194) define o VaR como sendo uma medida de perda potencial máxima do valor de um ativo (ou carteira de ativos), sobre um período pré-fixado, com dada probabilidade. Mantendo tudo mais constante, o VaR é uma medida de perda associada às condições de mercado.

Vale destacar que o VaR é um aprofundamento do conceito de risco, que é a probabilidade de desvio de um determinado evento esperado. De acordo com Morettin (2011), a definição formal do VaR de determinada posição para um horizonte de tempo  $h$  e probabilidade  $p$ , pode ser dada da seguinte maneira:

$$p = P(\Delta P(h) \leq \text{VaR}) = F_h(\text{VaR}), \quad (3.1)$$

em que,

$p$  é a probabilidade associada ao evento extremo que poderá impactar no valor de mercado da carteira;

$\Delta P(h)$  é a variação do valor da carteira marcada a mercado (*Mark-to-Market*, MtM) para um horizonte de  $h$  dias depois; e

$F_h(\cdot)$  é a função de distribuição acumulada (f.d.a) de  $\Delta P(h)$ .

Ou seja, a fórmula define a probabilidade  $p$  da variação do valor de mercado da carteira, em um horizonte de tempo  $h$ , ser menor que o VaR. Logo  $p$  é uma função do VaR da carteira, dado um horizonte de tempo.

Vale destacar que tanto a posição comprada quanto a vendida da carteira são simétricas e, por isso, não será levado em conta o sinal, uma vez fixada que o foco está em monitorar a possibilidade de perda. Do anteriormente citado, é possível ver que o  $\text{VaR}_{p,h}$  aumenta quando a probabilidade diminui ou o horizonte de tempo é maior.

Complementarmente, temos que:

- i. O VaR é dado em unidades monetárias e usa-se os log-retornos ( $r_t$ ) para as variações do valor de mercado da carteira, dada a normalidade de tal transformação, e que são, aproximadamente, iguais ao retornos simples ( $R_t$ ).

ii. O VaR é o p-quantil da distribuição  $F_h(\cdot)$ . Na prática, teremos que estimar esse quantil, usando, por exemplo, a distribuição empírica dos retornos.

iii. A quantia em unidades monetárias no cálculo do VaR é obtida multiplicando o valor da posição financeira pelo VaR do log-retorno, sendo que a posição financeira do ativo é usualmente marcada a mercado (*Mark-to-Market*).

Novamente, como assumimos que na interpretação do VaR o conceito de perda está implícito, desconsideraremos o sinal. Ainda, o quantil de interesse sempre estará à esquerda da distribuição acumulada dos log-retornos.

Sob a hipótese de normalidade da distribuição condicional dos retornos, com média zero e variância  $\sigma_t^2$  a representação é a seguinte:

$$r_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2). \quad (3.2)$$

Cabe, então, a estimação da volatilidade  $\sigma_t^2$  condicional, a qual pode ser feita via modelo EWMA, cuja forma funcional é dada por:

$$\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda) r_{t-1}^2, \text{ em que } 0 < \lambda < 1 \quad (3.3)$$

O *RiskMetrics*<sup>TM</sup> sugere como estimativa para o parâmetro de suavização  $\lambda$ , que apresenta Erro Quadrático Médio (EQM) mínimo, um valor igual a 0,94. Dado o fato anterior, além da demonstração feita por Morettin (2011) para o modelo da volatilidade, é possível ver que o VaR é diretamente dependente da raiz do tempo, tendo a fórmula de cálculo como a descrita a seguir:

$$\text{VaR}_{p,h} = (\text{Valor de Mercado}) \times p - \text{quantil} \times \sqrt{h} \times \sigma_h, \quad (3.4)$$

sendo que  $h$  é o horizonte de tempo e  $\sigma_h$  é o desvio-padrão condicional dos retornos dos ativos ou carteira de ativos.

### 3.2 VaR via ARMA - GARCH

Não é incomum encontrar entre as séries de retornos de ativos financeiros estrutura de correlação na média condicional, além da já sabida estrutura de dependência na variância condicional. Logo, a combinação de modelos da classe ARMA(p,q), para a média condicional, e GARCH(m,n) para a volatilidade será ARMA(p,q)-GARCH(m,n), com a seguinte forma funcional:

$$r_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i r_{t-i} + a_t - \sum_{j=1}^q \theta_j a_{t-j} \quad (3.5)$$

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim \text{i.i.d}(0,1) \quad (3.6)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^n \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (3.7)$$

A partir disso, é usual escolher para  $\varepsilon_t$ , em (3.6) uma distribuição normal, t-Student ou alguma distribuição generalizada. Cada qual com a sua particularidade de benefícios e prejuízos no processo de estimação. Finalmente, a partir da estimação das equações (3.5) à (3.7) é possível obter previsões para o cálculo do VaR, como descrito, por exemplo, em Morettin (2011).

### 3.3 VaR via Quantis Empíricos

Morettin (2011) descreve o método dos quantis empíricos como sendo uma maneira não paramétrica de se obter o VaR. Basicamente, o método consiste em calcular os log-retornos para a janela de tempo observada e a partir disso, gerar cenários do valor de mercado dos ativos financeiros ou da carteira. No entanto, esta metodologia pressupõe que a distribuição passada dos retornos se aplicará no futuro, mas esta é uma premissa não razoável, dado que o padrão de comportamento do mercado oscila de acordo com uma série de fatores que constituem o contexto econômico vigente, podendo causar imprecisões no cálculo do VaR.

Ainda assim, a metodologia supracitada é comumente usada devido, principalmente, à simplicidade e à baixa exigência de esforço computacional em sua implementação. Ainda, em Morettin (2011, p. 206) é possível verificar uma descrição estatística mais aprofundada, contemplando as regras da lógica de cálculo bem como suas premissas.

## 3.4. VaR via Cópulas

### 3.4.1 Introdução à Cópulas

Devido ao aumento da volatilidade verificada no mercado financeiro como um todo, percebeu-se que eram necessários modelos alternativos para avaliação e gestão de risco. Neste sentido, a cópula se mostrou uma saída relativamente simples e que vem mostrando sua eficácia em capturar os efeitos da interdependência entre os ativos.

A teoria básica de cópulas surgiu nas décadas de 1940 e 1950, com os trabalhos de Hoeffding (1940) e Sklar (1958), sendo que na década de 2000, publicações como a de Goorah (2007) e Martellini e Meyfredi (2007), nas quais é ressaltada a importância da capacidade de modelar resultados simultâneos de diferentes variáveis aleatórias. Neste sentido é que se desenvolverá o conteúdo da próxima seção.

### 3.4.2 Definição da Função Cópula

Na última década, a Teoria de Cópulas vem ganhando espaço principalmente nas aplicações em finanças e gestão de risco, muito em função do estudo de dependência que ela proporciona e destacado em Zunino (2006) e Pereira (2009). De maneira informal, o grande atrativo das cópulas se deve a sua capacidade de agrupar as distribuições marginais univariadas, gerando distribuições conjuntas multivariadas, sem as típicas premissas simplificadoras e citadas anteriormente necessárias aos outros modelos usuais e que geram de alguma maneira imprecisões nas medidas do cálculo de risco.

Em Morettin (2011, p. 329) é possível ver a definição matemática formal de uma cópula, bem como as suposições e teoremas que as suportam. Mas de maneira mais simplificada, Nelsen (1999, p.5-6), introduz o conceito de cópula da seguinte maneira:

*“Considere por um momento um par de Variáveis Aleatórias  $X$  e  $Y$ , com funções de distribuição acumulada  $F(x) = P[X \leq x]$  e  $G(y) = P[Y \leq y]$ , respectivamente, e a função distribuição conjunta  $H(x, y) = P[X \leq x, Y \leq y]$ . Para cada par de números reais  $(x, y)$  nós podemos associar três números:  $F(x)$ ,  $G(y)$  e  $H(x, y)$ . Note que cada número está no intervalo  $(0, 1)$ . Em outras*

*palavras, cada par  $(x,y)$  dos números reais estão contido nos pontos  $(F(x),G(y))$  no quadrado unitário  $(0,1) \times (0,1)$ , e estes pares ordenados correspondem a um número  $H(x, y)$  em  $(0,1)$ . [...] esta correspondência, que assume que o valor da função distribuição conjunta de cada par ordenado dos valores das funções de distribuições individuais são conectados por uma função. Esta função é a cópula.”*

Em suma, a grande vantagem da utilização das cópulas está no fato de ela permitir que sejam criadas funções de distribuição de probabilidades multivariadas independentes do formato das distribuições marginais que as compõem. No mundo das finanças isto é importante, pois as séries financeiras contêm fatos estilizados como, por exemplo, assimetria e curtose superior àquelas das distribuições usuais e simplificadas, fazendo com que os resultados obtidos da estimação sejam diferentes daqueles, caso a real distribuição conjunta da carteira ou uma outra que se adeque melhor fosse levada em consideração.

### **3.4.3 Distribuição de Probabilidades pelo Teorema de Sklar**

Para entendermos o conceito de distribuição de probabilidade implícita no conceito da metodologia de cópulas, é necessário explorar sua relação com o Teorema de Sklar. Tal entendimento, no entanto, tem como ponto de partida duas afirmações iniciais:

- a. Cópulas são funções de distribuição conjunta cujas distribuições marginais são uniformes no intervalo  $(0,1)$ ;
- b. A relação de dependência entre duas ou mais funções de distribuição marginal e sua função de distribuição conjunta é totalmente expressa por sua cópula.

Isto é, na mesma linha do raciocínio do anteriormente citado, sendo  $H(x,y)$  a função de distribuição conjunta das variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$ ,  $F(x)$  e  $G(y)$  suas funções de distribuições marginais contínuas e  $x$  e  $y$  números reais, existe uma única cópula  $C$ , tal que:

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)) \quad (3.8)$$

A equação (3.8), portanto, é a base do Teorema de Sklar, para a qual a demonstração formal pode ser encontrada em Cherubini, Luciano e Vecchiato (2004). Ainda, o teorema segue o corolário que, dada uma cópula que satisfaça a equação (3.8), ela pode ser obtida por inversão, conforme descrito a seguir:

$$C(a, b) = H(F^{-1}(a), G^{-1}(b)) \quad (3.9)$$

Sumariamente, o conceito do Teorema de Sklar justifica o apelo conceitual atribuído ao uso das cópulas, o da flexibilidade para agregação dos fatores de risco, uma vez que as variáveis aleatórias podem ser escolhidas independentemente da tradicional premissa de normalidade dos retornos. Vale reforçar que tal premissa enfraquece o poder de inferência sobre a real exposição ao risco financeiro de mercado, já que se baseia na existência da relação linear entre os fatores de risco e baixa probabilidade de ocorrência de eventos extremos, podendo assim, levar a subestimação do risco. Por esse motivo, autores importantes da literatura especializada acreditam na expansão da utilização da teoria de cópulas para a modelagem de riscos.

### 3.5 Aplicação Prática da Teoria de Cópulas

Como visto anteriormente, o uso do VaR é alvo de críticas relevantes com relação as premissas adotadas. O uso das cópulas, no entanto, permitiu que esta perspectiva com a falibilidade do método de estimação da exposição ao risco financeiro de mercado fosse enfim mitigada.

Portanto, levando em consideração que para a aplicação da teoria de cópulas as tradicionais premissas podem ser descartadas, em Jorion (2007) podemos encontrar uma breve descrição das principais etapas de sua utilização para o cálculo do VaR de uma carteira exposta a mais de um fator de risco, sendo elas as seguintes:

- Determinação das distribuições marginais dos fatores de risco;
- Escolha da cópula para integração das distribuições marginais;
- Estimação dos parâmetros das distribuições marginais e da cópula;
- Geração de realizações das variáveis aleatórias;
- Construção da distribuição dos retornos da carteira; e
- Determinação do VaR como sendo um quantil da distribuição gerada, de acordo com o nível de confiança escolhido.

Utilizando-se destas etapas, Pereira (2006) calcula tanto o VaR como a *Expected Shortfall*, que é uma modalidade alternativa de VaR, para uma carteira composta basicamente por quatro ativos expostos a diferentes fatores de risco: taxa de juros pré-fixada, taxa de cupom cambial e os índices Ibovespa e Dow Jones para Brasil e Estados Unidos, respectivamente. A conclusão do estudo foi que para altos níveis de confiança, o modelo se mostrou superior aos tradicionais modelos de cálculo do VaR, como o de simulação histórica e o chamado delta-normal, que também se baseia em perdas passadas.

Por fim, Goorah (2007) elenca as principais vantagens da teoria de cópulas da seguinte maneira:

- Não é necessária a premissa de normalidade conjunta dos retornos;
- Medidas de dependência mais robustas do que o coeficiente de correlação linear podem ser aplicadas;

- Diferentes distribuições marginais podem ser utilizadas para ativos que possuem comportamentos distintos.

### 3.6 Famílias de Cópulas

Neste item serão apresentados os três tipos de cópulas a serem testadas neste estudo. A cópula de Frank é uma delas e pertence à classes das chamadas cópulas arquimedianas. Essa classe se caracteriza por ser construídas a partir de funções geradoras específicas. Já a cópula Normal e t-Student, pertencem à classe de cópulas elípticas e são construídas a partir de distribuições multivariadas.

#### 3.6.1 Cópulas Arquimedianas

Esta família de cópulas se destaca pela sua flexibilidade, uma vez que permite a modelagem de diversas formas de dependência, incluindo assimetria e dependência extrema nas extremidades, comportamento este bastante factível ao mundo das finanças e, por este motivo a escolha de um tipo representante desta família.

Uma cópula arquimediana é definida da seguinte maneira:

$$C^A(x, y) = \phi^{[-1]}(\phi(x) + \phi(y)) \quad (3.10)$$

sendo  $\phi$  a função geradora e que apresente as seguintes características:

- $\phi: [0,1] \rightarrow [0,\infty]$ ;
- Contínua, decrescente ( $\phi'(t) < 0$ ) e convexa ( $\phi''(t) > 0$ );
- $\phi(1) = 0$

Já  $\phi^{[-1]}$  é a função inversa de  $\phi$  e definida da seguinte maneira:

- $\phi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \phi^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \phi(0) \\ 0, & \phi(0) \leq t \leq +\infty \end{cases}$
- $\phi^{[-1]}(\phi(t)) = t$  para todo  $t \in [0,1]$

Assim sendo, a fórmula da cópula e a expressão matemática para a função geradora da Cópula Frank são, respectivamente, como se segue:



- Função Cópula Frank:

$$-\frac{1}{\alpha} \ln \left( 1 + \frac{(\exp(-a\alpha)-1)(\exp(-b\alpha)-1)}{(\exp(-\alpha)-1)} \right) \quad (3.11)$$

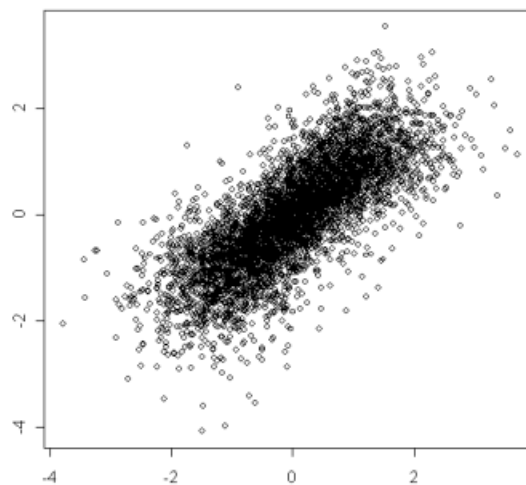
- Função geradora:

$$-\ln \left( \frac{\exp(-t\alpha)-1}{\exp(-\alpha)-1} \right) \quad (3.12)$$

- Intervalo para parâmetro  $\alpha$ :

$$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

A representação abaixo é mostrada conforme também em Assis e Laurini (2008) e é possível verificar a simetria na estrutura de dependência das duas caudas para a representação da cópula Frank com distribuições marginais normais padronizadas e  $\alpha=2$ .



**Figura 3.1:** Representação Cópula Frank ( $\alpha = 2$ )

### 3.6.2 Cópulas Elípticas

Como representante desta classe de cópulas, serão utilizadas neste estudo tanto a Cópula Normal como a Cópula t-Student.

Diferentemente da Cópula Frank, a Cópula Normal não admite dependência extrema em suas extremidades, no entanto, também é simétrica. Ela advém da distribuição Normal multivariada, que nada mais é do que a combinação de

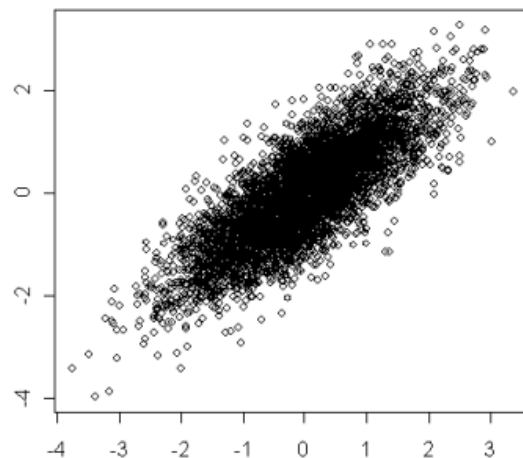
distribuições marginais Normais. Entretanto, caso uma das dessas distribuições marginais não seja Gaussiana a distribuição conjunta resultante também não será. Para finalidade deste estudo, apenas o caso bivariado da Cópula Normal é suficiente, sendo sua função descrita a seguir.

- Função Cópula Normal (bivariada):

$$C(u, v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} dx \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} dy \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[x^2 + y^2 - 2\rho xy]\right) \quad (3.13)$$

onde  $\rho$  é a correlação que parametriza a cópula.

A Figura 3.2 ilustra a representação deste tipo de cópula para com  $\rho=0,8$ .



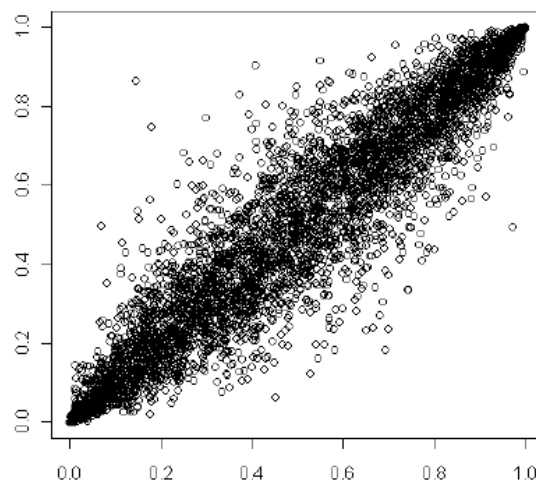
**Figura 3.2:** Representação para Cópula Normal ( $\rho=0,8$ ).

Posteriormente será utilizada a Cópula t-Student que também é simétrica, mas diferentemente da Cópula Normal permite uma maior grau de dependência em suas extremidades. Outra característica desse tipo de cópula é que quanto os graus de liberdade tendem ao infinito, mais ela se aproxima da normal. Ou seja, enquanto menor for o grau de liberdade, maior será o grau de dependência nas extremidades. A Figura 3.3 mostra a representação da Cópula t-Student com o parâmetro de correlação  $\rho=0,95$  e 2 graus de liberdade, o que caracteriza um número baixo para n, gerando a estrutura de dependência nas extremidades.

- Função Cópula t-Student (bivariada):

$$C(x, y) = t_{\rho, n}(t_n^{-1}(x), t_n^{-1}(y)) \quad (3.14)$$

onde,  $\rho$  é o coeficiente de correlação linear,  $n$  representa os graus de liberdade,  $t_{\rho, n}$  é a função distribuição conjunta de um vetor t-student bidimensional e  $t_n^{-1}$  é a função inversa da distribuição t-student univariada.



**Figura 3.3:** Cópula t-Student ( $\rho=0,95, n=2$ )

A figura anterior é, portanto, uma representação de um caso típico da Cópula t-Student, mas que caso a parametrização do grau de liberdade fosse significativamente superior, por exemplo,  $n = 1000$ , a representação se aproximaria do formato apresentado na Figura 3.2.

Ademais, se elencarmos a flexibilidade oferecida por cada uma dos tipos de cópulas em ordem crescentes pode-se dizer que teríamos a Cópula Normal, t-Student e Frank, respectivamente.

## 4 Dados

### 4.1. IBOVESPA: previsões *versus* realidade nos últimos anos

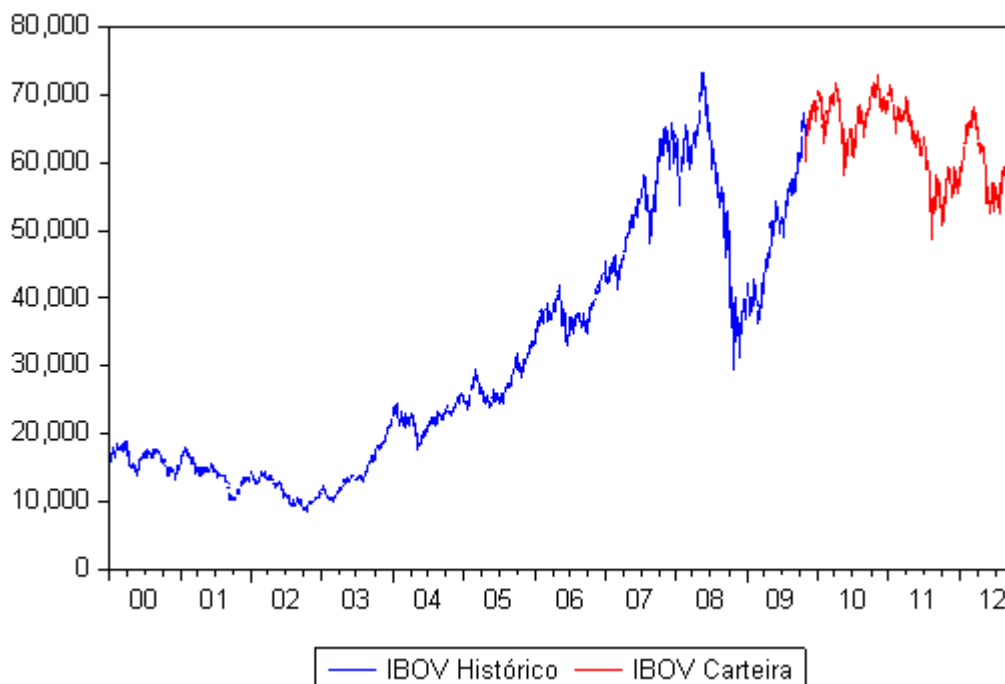
O primeiro fator de risco a ser considerado neste estudo é o IBOVESPA que será replicado através de uma carteira composta por ações que compõem o cálculo do índice. Este é o mais importante indicador de desempenho médio das cotações do mercado de ações brasileiro. Basicamente, o critério de determinação da composição desta carteira teórica é a negociabilidade dos papéis na BM&FBOVESPA, a Bolsa de Valores de São Paulo. Adicionalmente, outro fator que contribuiu para que o IBOVESPA se tornasse o mais tradicional índice do setor financeiro é manutenção da integridade de sua série histórica, já que não sofreu modificações metodológicas desde sua implementação em 02/01/1963.

Nos anos mais recentes, como em todos os mercados de ações, é possível observar que o IBOVESPA vem acumulando momentos de grande volatilidade diante dos eventos de crise externa que reflete diretamente no desempenho do índice. Até meados de 2008, quando a gravidade da crise imobiliária norte americana de fato se revelou com a insolvência do Lehman Brothers nos Estados Unidos, a Bolsa de Valores de São Paulo acumulava o recorde da série histórica do IBOVESPA, ao redor dos 73.000 pontos. No entanto, apesar do cenário que se construía, o mercado não sabia dimensionar o real tamanho do impacto e alguns analistas do mercado apostavam na cenários otimistas como na manutenção do patamar e outros, por sua vez, acreditavam o índice chegaria ao nível dos 86.000 pontos. O fechamento daquele ano ficou na casa dos 68.000 pontos.

Já em 2009, as divergências nas previsões eram ainda mais acentuadas. Enquanto uns faziam apostas mais pessimistas nos 61.000 pontos, havia aqueles que apostavam na recuperação ainda naquele ano, com a expectativa de atingir os 90.000 pontos. Mas mais uma vez o cenário desfavorável prevaleceu em meio a tentativas de pacotes para estimular a reabilitação econômica e o fechamento do último pregão ficou em 69.000 pontos. Para 2010, o cenário não foi muito diferente e bolsa andou de lado, como se diz no jargão do mercado financeiro, fechando o ano nos mesmos 69.000 pontos do ano anterior.

Em 2012, o que vemos ainda é a apreensão dos analistas e de quem opera na bolsa. É possível observar ainda, que houve nos últimos anos uma mudança no padrão de comportamento do retorno dos ativos com aumento da volatilidade. Fato este que, aliás, se estende aos títulos de renda fixa e historicamente tendem a ser menos instáveis. Prova desta instabilidade, é o fato de que a BM&FBOVESPA concluiu no último dia do ano passado a segunda pior performance anual em uma década. Entretanto, outro fato que chama atenção é que este ano a bolsa vem batendo recordes de negociações. Só em maio de 2012 foram registrados 19,6 milhões de negócios, frente aos 14,7 milhões do mês de abril e 16,2 milhões do recorde anterior em março de 2011.

A Figura 4.1 apresenta a evolução do IBOVESPA desde 01/01/2000 e destaca o período no qual o estudo proposto neste trabalho se dará.



**Figura 4.1:** Evolução IBOVESPA a partir de 01/01/2000.

## 4.2 Metodologia de cálculo IBOVESPA

Diante da necessidade de cálculo da exposição das instituições financeiras, o *Basel Committee on Banking Supervision* (BCBS) determinou, em 1996, como melhor prática de mercado que, além do modelo interno, o *Value at Risk* (VaR) deve ser calculado diariamente. Da mesma forma, a Circular 3.478 do Banco Central do Brasil,

de 24/12/2009 disposta no Anexo 1, refere-se aos requisitos qualitativos e quantitativos de análise para o sistema financeiro brasileiro. Mediante o cenário regulatório vigente então, este estudo fará a análise com frequência diária dos dados. No entanto, apesar da base de cálculo ser diária, compara-se à média dos 60 dias úteis anteriores, sendo o capital econômico, alocado sobre o maior valor entre os dois, o que exige este mínimo de dias. Sendo assim, o período de análise (*backtesting*) será feito para o período de 28 de outubro de 2009 a 9 de setembro de 2012.

Ao observar a conjuntura econômico-financeira dos mercados desse período, notam-se diferentes níveis de *stress*, sendo os dias mais recentes, aqueles nos quais houve grande queda do valor de mercado dos ativos financeiros, inclusive ações.

O objeto de estudo aos quais se aplicarão as diversas metodologias de cálculo do VaR será uma carteira de ações, baseada na carteira teórica que compõe o Índice BOVESPA. Como exposto em seções anteriores, a participação de cada ação na Carteira Teórica, tem relação direta com a representatividade desse título no mercado à vista e tal representatividade é obtida pelo índice de negociabilidade da ação calculado pela seguinte fórmula, disponível no site da BM&FBOVESPA:

$$IN = \sqrt{\frac{n_i}{N}} * \sqrt{\frac{v_i}{V}}, \quad (4.1)$$

em que:

IN = Índice de Negociabilidade;

$n_i$  = número de negócios com a ação “i” no mercado a vista;

N = número total de negócios no mercado a vista da BM&FBOVESPA;

$v_i$  = volume financeiro gerado pelos negócios com a ação “i” no mercado a vista;

V = volume financeiro total do mercado a vista da BM&FBOVESPA.

A partir disso, o Índice é calculado sendo o somatório dos pesos das ações integrantes de sua carteira teórica, podendo ser apurada a qualquer momento, por meio do seguinte cálculo:

$$IBOVESPA_t = \sum_{i=1}^n P_{i,t} * Q_{i,t}, \quad (4.2)$$

em que,

$IBOVESPA_t$  = Índice BOVESPA no instante t;

n = número total de ações componentes da Carteira Teórica;

P = último preço da ação “i” no instante t;

Q = quantidade teórica da ação “i” na carteira no instante t.

É preciso destacar ainda os critérios de inclusão de ações no Índice. A carteira teórica é composta pelas ações que atenderam cumulativamente aos seguintes critérios, com relação aos 12 meses anteriores à formação da carteira:

- I. Estar incluída em uma relação de ações cujos índices de negociabilidade somados representem 80% do valor acumulado de todos os índices individuais;
- II. Apresentar participação, em volume, superior a 0,1% do total;
- III. Ter sido negociada em mais de 80% do total de pregões no período.

Isto posto, no Apêndice 1 encontra-se a descrição detalhada da carteira que será levada em conta na condução do estudo. A partir dessa amostra, que busca refletir o comportamento do mercado de ações brasileiro, o presente estudo fará a avaliação dos diferentes métodos para o cálculo do VaR, caso esta carteira teórica fosse mantida por uma instituição financeira. Vale destacar que, para a finalidade aqui pretendida, a carteira teórica vigente em setembro de 2012 será replicada para todos os dias do período em estudo.

### **4.3 PTAX: *proxy* para o fator de risco cambial**

O segundo fator a ser levado em consideração é o risco cambial. Para tanto, é preciso considerar a série de cotações diárias do dólar. A escolha deste fator de risco está no fato de ser uma exposição comum aos bancos e instituições que compõe o sistema financeiro e sua volatilidade é de certa forma tem um comportamento mais aleatório.

Por isso, analogamente a análise dos fatos históricos mais relevantes que interferiram no desempenho do IBOVESPA, cabe fazer um levantamento também para

a PTAX, a taxa de câmbio geralmente utilizada pelo mercado financeiro como referência.

A PTAX é constituída a partir da consulta diária feita pelo Banco Central do Brasil junto aos maiores *dealers* de câmbio e divulgada diariamente. As consultas são feitas em horários predeterminados da manhã e a metodologia consiste em excluir as duas maiores e as duas menores cotações antes de calcular a média aritmética simples, então, será a PTAX daquele dia.

A Figura 4.2 mostra a evolução da taxa em questão para o período de estudo.



**Figura 4.2:** Evolução da PTAX a partir de outubro de 2009.

O primeiro fato importante a ser destacado no comportamento da série é a tendência de queda observada até o final do segundo trimestre de 2011, atingindo a cotação mínima do período em 26 de julho a R\$1,53. Tal fato se deveu principalmente a atratividade dos investidores estrangeiros às condições macroeconômicas brasileiras e a possibilidade de obter retornos acima daqueles observados nos países desenvolvidos que ainda sofriam de maneira mais intensa os efeitos da crise financeira dos anos recentes.

Vale destacar também que em meio a maciça entrada de dólares no país, o governo por meio do Banco Central do Brasil, intervia quase que diariamente no mercado de câmbio a fim de conter a valorização da moeda nacional frente à americana.



Este esforço tinha como objetivo reduzir o impacto nas exportações nacionais, uma vez que respondem por grande parte do produto interno bruto e que podia ser reduzido em caso o preço das mercadorias brasileiras no exterior perdessem competitividade frente a produtos substitutos de outros países.

Passado este período de valorização, o cenário externo não apresentou a recuperação esperada mesmo após pacotes de medidas lançadas pelas autoridades econômicas. Como consequência, os recursos externos foram aos poucos sendo retirados do país devido às condições internacionais e a cotação atingiu um novo patamar que vem se mantendo desde então ao redor de R\$2,00.

## 5 Metodologia de Seleção do Modelo de Cópula

A metodologia de seleção do modelo de cópula se divide basicamente em duas etapas. A primeira se dedica a escolha das distribuições marginais associadas aos fatores de risco. Apesar de não ser uma premissa fundamental, a distribuição normal pode ser uma primeira tentativa do teste. A lista abaixo procura elencar as 5 principais etapas da metodologia de escolha, sendo elas as seguintes:

1. Análise das estatísticas descritivas como curtose e assimetria;
2. Teste Jarque-Bera (JB) para testar a hipótese nula de que a distribuição segue uma normal com os valores padrões deste tipo de distribuição para a curtose e assimetria, sendo, respectivamente, 3 e 0.
3. Teste Kolmogorov-Smirnov (KS) para verificação da distribuição observada na amostra por meio da análise comparativa dos parâmetros estimados.
4. Teste Shapiro-Wilk que também busca avaliar se a distribuição normal se aplica aos dados amostrais.
5. Análise gráfica para comparação da densidade de probabilidade dos dados empíricos com a obtida pela distribuição normal.

A segunda etapa finalmente se dedica a escolha da função de cópula por meio da avaliação das cinco famílias usualmente utilizadas em estudos deste tipo como em Fermanian (2003). Para a estimação dos parâmetros o método de máxima verossimilhança é o mais disseminado, como, por exemplo, pode ser visto em Pereira (2006). Mas, neste trabalho, bem como em outros, é relatada a dificuldade de convergência na estimação dos parâmetros por meio do método em um estágio via maximização da função de verossimilhança. Dados estes relatos, o mais prudente, então, é realizar a estimação por meio do método em dois estágios, uma vez que os parâmetros para as distribuições marginais já terão sido estimados e apenas os da função cópula terá de ser feito, semelhantemente ao modo do método em um estágio. Em outras palavras, as estimativas para as distribuições marginais servirão como uma espécie de condição de contorno para a maximização da função de verossimilhança.

## 5.1 Definições para Cálculo do VaR

Nesta seção serão feitas algumas definições para em seguida o VaR da carteira ser efetivamente calculado. Além disso, é importante destacar os critérios de comparação entre as metodologias propostas de cálculo da medida de risco.

Primeiramente, o período de cálculo pré-estabelecido é constituído de 707 observações, sendo que a divisão em dois subperíodos nos ajudará tanto na estimação como na posterior comparação dos dados amostrais. Isto é, a primeira parte a ser utilizada para a estimação dos parâmetros será composta dos 364 primeiros retornos e o restante será utilizado para o cálculo diário do VaR.

Como uma das especificações do Comitê de Basiléia e relatada anteriormente no trabalho, será utilizada uma janela móvel que leve em consideração as últimas 60 observações.

Outra prática de mercado e também vista em trabalhos acadêmicos, como em Caselato (2009), o VaR será calculado para dois níveis de significância, permitindo assim, que mais um critério de comparação entre os modelos seja estabelecido, uma vez que diferentes modelos sejam mais adequados para estimação da exposição aos fatores de risco. Tais níveis de significância são os usuais 95% e 99%.

Isto posto, caberá agora detalhar a metodologia aplicada a cada um dos três modelos escolhidos para cálculo do VaR da carteira: cópulas, empírico (histórico) e o ARMA-GARCH.

### 5.1.1 Modelo de Cópulas

Tanto as funções de cópulas como as distribuições marginais serão definidas de acordo com os testes iniciais e descritos no item 5. Respeitando a janela de 364 dias previamente estabelecida, e, a partir daí, reestimar os parâmetros diariamente por meio do método em dois estágios via maximização da função de verossimilhança, as etapas do procedimento serão as seguintes:

1. Seleção da amostra de acordo com a janela móvel de estimação de 364 observações;

2. Estimação dos parâmetros das distribuições marginais pelo método da máxima verossimilhança (primeiro estágio);
3. Transformação dos retornos da amostra em probabilidades, através da função de distribuição acumulada gerada a partir dos parâmetros das marginais;
4. A partir das probabilidades calculadas, estimação do parâmetro da função de cópula método da máxima verossimilhança (segundo estágio);
5. Através do parâmetro da cópula estimado, geração de 364 observações de probabilidades independentes e identicamente distribuídas para cada fator de risco.
6. Transformação de probabilidades em retornos através da função de distribuição.

### 5.1.2 Modelo de Quantis Empíricos

Na implementação prática este é o modelo que menos exige esforços, no entanto, apesar de sua simplicidade de implementação, parte da premissa que a exposição ao risco financeiro de mercado pode ser calculado com base no passado o que nem sempre é verdadeiro. No entanto, este ainda é um modelo utilizado e, por isso, será levado em consideração na análise deste estudo.

Assim como adotado para o modelo de cópulas descrito no item anterior, a janela de estimação levada em consideração será composta pelo mesmo número de observações, 364 ao todo. Já o procedimento em si, seguirá os seguintes passos:

1. Cálculo do retorno da carteira para cada cenário, com base na ponderação da carteira e nos retornos históricos observados para cada fator de risco;
2. Ordenação dos retornos de forma crescente;
3. O VaR será igual ao retorno que corresponde ao percentil definido pelo nível de confiança em questão (95% ou 99%).

### 5.1.3 Modelo *RiskMetrics*<sup>TM</sup>

Esta metodologia consiste em aplicar os conceitos apresentados e detalhados na seção 3.2 . Vale destacar que o parâmetro de decaimento a ser utilizado será o proposto pelo *RiskMetrics*<sup>TM</sup> de  $\lambda = 0,94$ .

## 5.2 Comparação dos Modelos

Os três modelos que servirão como objeto de estudo deste trabalho serão validados conforme sugerido por Jorion (2007), sendo tal procedimento conhecido por *Backtesting*. O teste implícito a esta metodologia de validação dos modelos, consiste em verificar se o número de vezes, dada a janela de estudo, que o retorno empírico da carteira extrapola aquele sugerido pelo VaR estimado está condizente com o nível de significância dos cálculos.

Sendo assim, os excessos serão calculados da seguinte maneira:

$$E = \sum_{i=1}^N \begin{cases} 1, R_i < \text{VaR}_i \\ 0, R_i \geq \text{VaR}_i \end{cases} \quad (5.1)$$

em que,

$N$  é o número de observações da amostra;

$R_i$  é o retorno empírico da carteira referente a observação  $i$ ;

$E$  o número de excessos computados ao longo da janela de teste do *Backtesting*.

Como o VaR é a pior perda esperada com determinado grau de confiança  $c$  para um certo horizonte de tempo de um dia, é esperado que a proporção de excessos esteja de acordo com esse grau de confiança  $c$ . Isto é:

$$\frac{E}{N} = (1 - c)$$

Finalmente o critério de seleção do melhor modelo para a estimação do VaR da carteira será aquele com melhor desempenho conforme os níveis de confiança de 95% e 99%.

## 6 Resultados

Como mencionado nas seções anteriores, os fatores de risco objetos de estudo deste trabalho serão o de risco cambial, medido pela PTAX, e o risco do mercado de ações, medido pela variação da carteira teórica com ativos que compõe o IBOVESPA. Vale destacar que não necessariamente os ativos tem exposição direta a ambos os fatores de risco. O intuito, portanto, deste trabalho é simular estes fatores de risco e seus impactos na carteira de uma instituição hipotética, ainda que sejam impactados por meio de diferentes ativos.

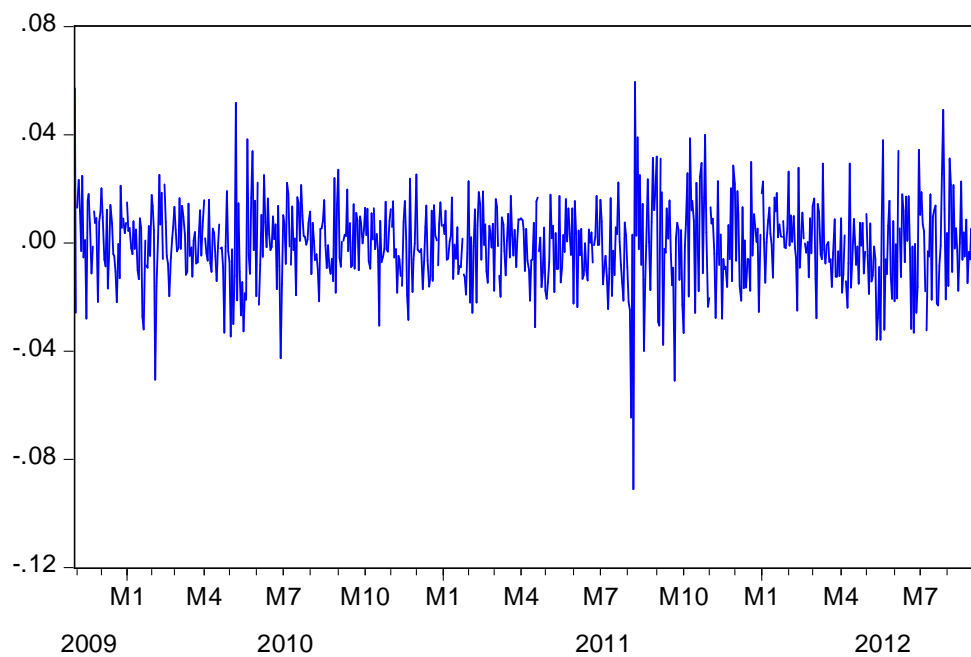
A primeira parte da metodologia de da seleção do modelo de cópula consiste em encontrar as distribuições marginais que melhor representam as distribuições dos retornos diários dos fatores de risco.

A tabela 6.1 traz as estatísticas descritivas relativas às séries de estudo. É possível ver que os números não se adéquam àqueles que seriam característicos da curva normal. Esta constatação fica mais evidente na série relativa à PTAX, com curtose e assimetria acentuadas. Ainda, é possível ver que existem ocorrências onde os retornos observados se distanciam diversos desvios-padrão da média. Ao olhar para esta estatística, observa-se maior volatilidade dos dados referentes ao IBOVESPA do que aqueles referentes à PTAX.

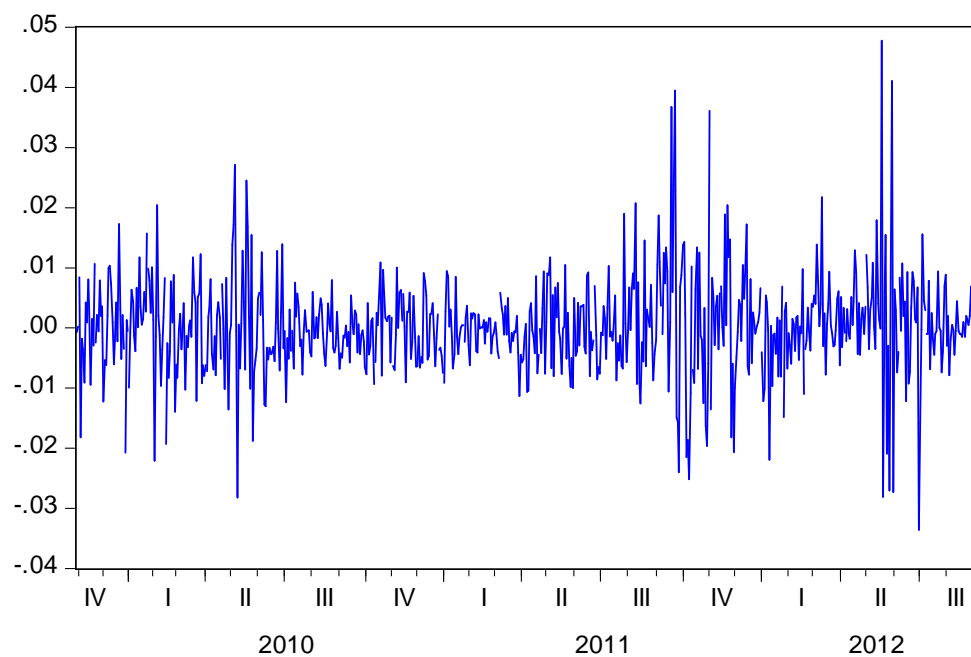
**Tabela 6.1:** Estatísticas descritivas.

|               | IBOVESPA | PTAX     |
|---------------|----------|----------|
| Média         | -0,0446% | 0,0220%  |
| Desvio padrão | 1,5482%  | 0,8261%  |
| Curtose       | 2,43     | 4,76     |
| Assimetria    | -0,24    | 0,52     |
| Intervalo     | 15,048%  | 8,133%   |
| Mínimo        | -9,1047% | -3,3572% |
| Máximo        | 5,9437%  | 4,7757%  |
| Contagem      | 707      | 707      |

Já os gráficos 6.1 e 6.2 mostram o comportamento dos retornos diários ao longo do período de análise do pós-crise de 2008, que compreende aproximadamente dois anos.



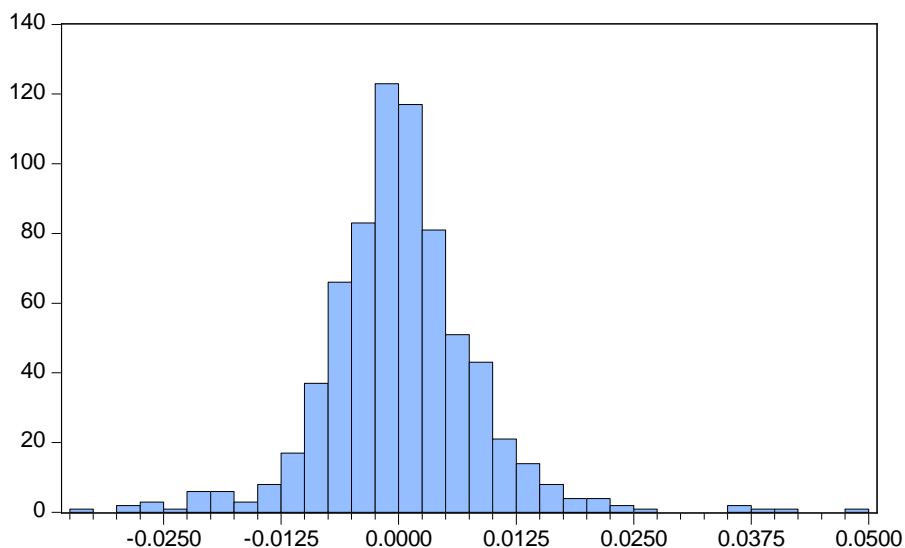
**Figura 6.1:** retorno diário IBOVESPA.



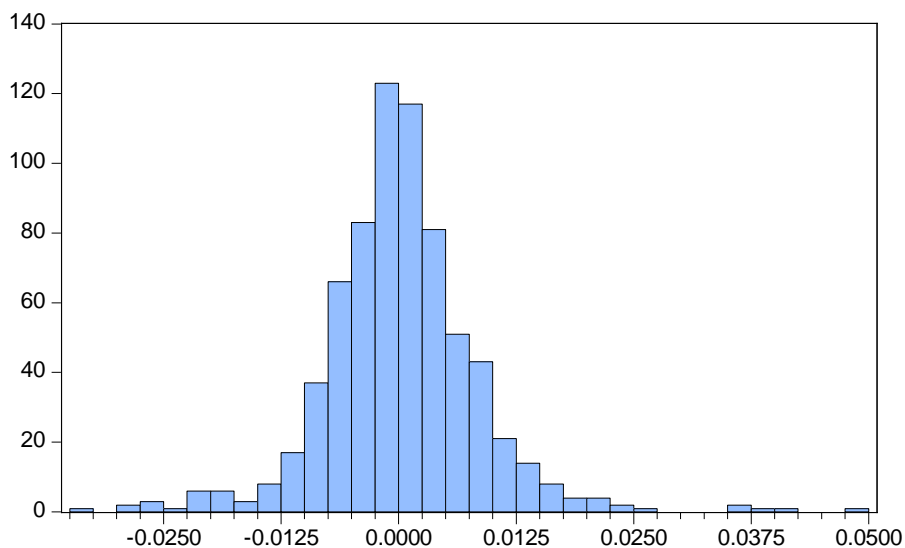
**Figura 6.2:** retorno diário PTAX.

Já nas figuras 6.3 e 6.4 é possível ver a distribuição de probabilidades dos retornos diários para cada um dos fatores de risco levados em consideração neste estudo.

Ambas as figuras ilustram o que as estatísticas descritivas revelam. Ou seja, a leptocurtose pode ser observada nos retornos de ambos os casos e, além disso, a concentração de retornos distantes da média, revelando a curtose acima da característica da normal.



**Figura 6.3:** Histograma para os retornos diários do IBOVESPA.



**Figura 6.4:** Histograma para os retornos diários do PTAX.

Além da construção dos histogramas, é preciso realizar os testes de normalidade, nos quais a hipótese nula é que os dados seguem uma distribuição normal. Aqui será utilizado o teste JB, no qual a hipótese nula ( $H_0$ ) é que a distribuição dos dados empíricos segue uma normal. Caso a hipótese nula seja rejeitada, a interpretação mais



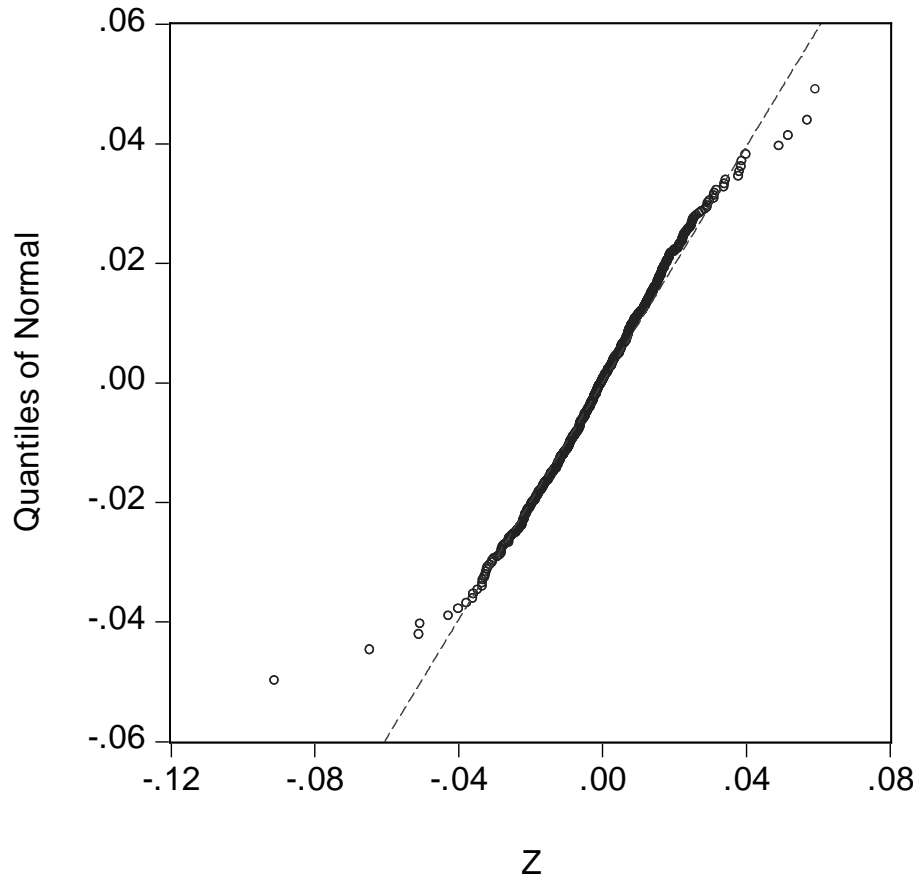
adequada é que não há evidências estatísticas suficientes para inferir a presença de normalidade. Os testes serão executados a 5% de significância.

**Tabela 6.2:** Teste de normalidade.

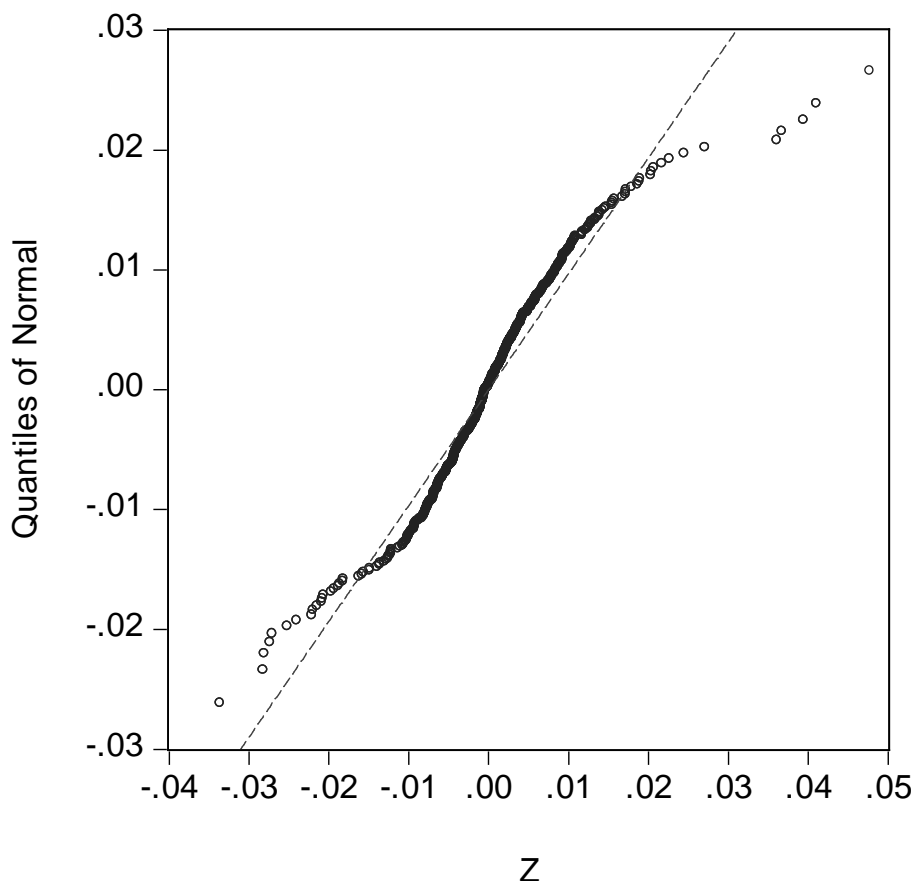
| <i>Teste de Normalidade - Jarque Bera</i> |          |         |
|---|----------|---------|
|   | IBOVESPA | PTAX    |
| Estatística                               | 177,6985 | 686,10  |
| P-valor                                   | 0,0000   | 0,0000  |
| Hipótese Nula                             | Rejeita  | Rejeita |

Outra metodologia geralmente utilizada para verificar a hipótese de normalidade dos dados empíricos, é o gráfico Quantil-Quantil. Sumariamente, o gráfico permite visualizar a série a ser testada, e padronizada pela estatística  $z = \frac{u-\mu}{\sigma}$  (eixo X), contra uma Normal-Padrão (0,1) (eixo Y). Ou seja, caso a série testada seja normal, é esperado que o gráfico Z x Y apresente uma reta, caso contrário a hipótese de normalidade deve ser descartada.

As Figuras 6.5 e 6.6 mostram a metodologia descrita anteriormente para as séries de retorno dos dois fatores de risco em questão.



**Figura 6.5:** Gráfico Quantil-Quantil para IBOVESPA.



**Figura 6.6:** Gráfico Quantil-Quantil para PTAX.

Como ambos os testes indicaram para a rejeição da hipótese nula, é preciso encontrar uma distribuição alternativa à normal que seja mais adequada a modelagem dos fatores de risco que a distribuição normal. Para a determinação da função cópula, as três opções mais recomendadas e geralmente utilizadas em estudos desse tipo são as distribuições Hiperbólica (HIP) e Hiperbólica Generalizada (HG). Neste caso, o método para estimação dos parâmetros referentes a tais distribuições é o da máxima verossimilhança para que então seja feita a comparação daquela que melhor se ajusta aos dados empíricos.

Antes de apresentar os resultados de fato, vale destacar que a metodologia que envolve a modelagem da volatilidade das séries exige que seja feito o teste de raiz unitária para cada um dos fatores de risco. O Apêndice 2 traz o resultado detalhado do teste. Para cada caso foi testado os diversos modelos de acordo com a metodologia que envolve o teste Dickey-Fuller Aumentado (ADF). O resultado obtido foi a não constatação da presença de raiz unitária nas séries de retorno de ambos os fatores de risco.

A Tabela 6.3 a seguir retoma a temática de propor uma nova distribuição aos dados empíricos. Novamente, as distribuições usualmente utilizadas para modelar as distribuições marginais para posterior estimação da função cópula. Também foi realizado o teste de Komolgorov-Smirnov (KS), que mostrou a maior capacidade de ajuste aos dados da distribuição hiperbólica generalizada tanto para a PTAX quanto para a série de retornos do IBOVESPA.

**Tabela 6.3:** Estatísticas dos parâmetros das distribuições marginais e resultado do teste KS.

|                 | PTAX     |          | IBOVESPA |          |
|-----------------|----------|----------|----------|----------|
|                 | HG       | HIP      | HG       | HIP      |
| alfa            | 17,40    | 61,86    | 15,75    | 72,35    |
| beta            | 7,08     | 8,30     | -3,31    | -3,60    |
| delta           | 0,0067   | 0,0041   | 0,0250   | 0,0060   |
| um              | -0,0014  | -0,0015  | 0,0026   | 0,0040   |
| lambda          | -1,2174  |          | -1,3200  |          |
| Valor Função    | 4.543,60 | 4.004,32 | 3.603,08 | 3.712,40 |
| <b>Teste KS</b> |          |          |          |          |
| Estatística     | 0,0165   | 0,0385   | 0,0131   | 0,0194   |
| P-valor         | 0,8500   | 0,0520   | 0,8100   | 0,6300   |
| Rejeita Ho      | Não      | Sim      | Não      | Não      |

Isto posto, coube então estimar as funções cópulas de fato. Os resultados obtidos da estimação pela metodologia de máxima verossimilhança em dois estágios são apresentados na tabela seguinte. A descrição dos parâmetros bem como o comportamento esperado e as expressões matemáticas que formam cada uma delas estão descritas na seção 3.6, referente à família de cada uma dos tipos de cópulas usadas.

**Tabela 6.4:** Estimativas dos parâmetros das funções cópulas.

|              | Cópula  |           |         |
|--------------|---------|-----------|---------|
|              | Normal  | t-Student | Frank   |
| Parâmetro 1  | -0,3975 | -0,5913   | -1,9861 |
| Parâmetro 2  |         | 5,0208    |         |
| Valor Função | 139,54  | 198,53    | 125,67  |

Vale destacar que a metodologia de estimação por máxima verossimilhança em dois estágios foi uma alternativa viável uma vez que a em um estágio geralmente apresenta dificuldade na convergência, como Assis e Laurini (2008) e até mesmo Pereira (2006) mostraram.

Feito este procedimento, é construção de um painel comparativo entre os diferentes métodos de cálculo do VaR da carteira teórica propostas sendo a exposição a cada fator de risco igual, ou seja 50%. Para avaliar o desempenho de cada uma das metodologias foi aplicado o *backtesting* que proporciona a análise comparativa e, posteriormente, permite testar a hipótese para verificar se os excessos com relação ao nível de confiança das metodologias propostas estão de acordo com o nível aceitável. Este processo de comparação segue o raciocínio descrito na Seção 5.2. A Tabela 6.5 mostra os resultados e permite a análise comparativa dos mesmos.

**Tabela 6.5:** Comparativo dos resultados para modelos propostos.

|                         | VaR 95%                           |                | VaR 99%                           |               |
|-------------------------|-----------------------------------|----------------|-----------------------------------|---------------|
|                         | 364 janelas<br>móveis de<br>350du | Rejeita<br>H0* | 364 janelas<br>móveis de<br>350du | Rejeita H0*   |
| EWMA ( $\lambda=0.94$ ) | <b>8,8%</b>                       | <b>Aceita</b>  | 16,4%                             | Rejeita       |
| Histórico               | 16,6%                             | Rejeita        | 14,5%                             | Rejeita       |
| Cópula Normal           | 18,1%                             | Rejeita        | 10,7%                             | Rejeita       |
| Cópula Frank            | 23,3%                             | Rejeita        | <b>2,7%</b>                       | <b>Aceita</b> |
| Cópula t-Student        | 12,4%                             | Rejeita        | 10,5%                             | Aceita        |

\* H0: percentual de excessos previsto pelo modelo é estatisticamente igual ao encontrado empiricamente

Cabe ressaltar que a comparabilidade é possível, pois em todas as metodologias ambos os fatores de risco foram levados em consideração com uma exposição igual a ambos, sendo seus impactos refletidos no cálculo do VaR. No entanto, o tratamento de

agregação dado pelas cópulas e específico a cada um e, por isso, é esperado o resultado superior aos demais.

Como resultado é possível ver que a cópula se destacou para o VaR de 99%. Já para o VaR de 95% o EWMA se mostrou mais eficaz. As possíveis razões para este resultado serão abordadas na próxima seção.

## 7 Conclusão

O presente trabalho trouxe como tema principal a utilização da metodologia de cópulas para a agregação de diferentes fatores de risco aos quais instituições financeiras estão geralmente expostas e posterior cálculo do VaR.

A metodologia de cópulas vem ganhando espaço para modelagem dos riscos inerentes ao mercado financeiro. A atratividade da função cópula é a flexibilidade que ela oferece no que tange a agregação dos fatores de risco sem que seja necessária qualquer suposição com respeito a normalidade da distribuição dos dados empíricos.

Aqui foram aplicadas três metodologias para cálculo do VaR, sendo elas o histórico, EWMA, e, por fim, o de cópulas por meio da cópula de Frank, t-Student e Normal e aplicadas a uma carteira teórica exposta ao risco cambial e ao IBOVESPA.

O modelo de cópula de Frank foi o que apresentou o melhor resultado para o cálculo do VaR com 99% de confiança. Para o VaR com 95% de confiança foi o modelo que se utiliza da modelagem da volatilidade com o uso do modelo EWMA com o parâmetro de decaimento exponencial sugerido pelo *RiskMetrics*<sup>TM</sup> de 0,94.

Ou seja, é possível constatar empiricamente que o modelo de cópulas se mostrou realmente superior, ainda que apenas em um dos casos propostos, comprovando de alguma forma a superioridade e efetividade do propósito ao qual a metodologia se dedica. O diferencial pode se dizer que foi o fato da distribuição dos dados empíricos ser modelada por uma hiperbólica generalizada que leva em consideração a concentração de retornos nas extremidades das caudas e que caracterizam a leptocurtose dos dados.

Já para o VaR 95% o fato do EWMA ter apresentado um melhor ajuste aos dados pode ser explicado pela rápida resposta à mudança no comportamento da volatilidade e fundamental em meio às características da crise financeira do período em análise.

Por fim, a conclusão mais relevante que este trabalho pode deixar é a importância e a necessidade de se aprofundar os estudos da aplicabilidade de cópulas como instrumento para a medida de risco, mas acima de tudo não se restringir a esta finalidade.

## Referências Bibliográficas

ALEXANDER, Carol. **Market Models**: a guide to financial data analysis. Chichester: Wiley, 2001. 494 p.

ANG, Andrew e CHEN, Joseph. Asymmetric correlations of equity portfolios. *Journal of Financial Economics*, 63(3):443-494, March 2002.

ASSIS, R. M.; LAURINI, M. P. Funções de Cópula na Precificação de Opções. 2008. Working Paper 148 – Ibmec São Paulo, São Paulo.

CHERUBINI, Umberto; LUCIANO, Elisa; VECCHIATO, Walter. **Copula Methods in Finance**. 1ª ed. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2004.

ENDERS, Walter. **Applied Econometric Time Series**. Alabama: Wiley, 2003. 459 p

FERMANIAN, Jean-David. **Goodness of Fit Tests for copulas**. Working-paper – IMSEE, Paris. 2003.

FERMANIAN, Jean-David e SCAILLET, Olivier. **Some statistical pitfalls in copula modeling for financial applications**. FAME Research Paper Series n°108, International Center for Financial Asset Management and Engineering, March 2004.

JORION, P. **Value at Risk**: the new benchmark for managing financial risk. 3ª ed. New York: McGraw-Hill, 2007.

MAHEU, John. M. e MCCURDY, T. H. **Identifying Bull and Bear Markets in Stock Returns**. *Journal of Business and Economic Statistics*, 18 (1), 100-112, 2000

MORETTIN, Pedro Alberto. **Econometria Financeira**: um curso em séries temporais financeiras. São Paulo: Blucher, 2011. 383 p.

NELSEN Robert. **An introduction to Cópulas**. Lectures notes Statistics 139, Nova York: Spring-Verlang New York, Inc, 1999, 216 p.

PATTON, Andrew. **Modelling Asymmetric Exchange Rate Dependence**. *International Economic Review*, 47(2):527–556, May 2006.



PEREIRA, Pedro Luis Valls. **Cópuas – Uma Alternativa para a Estimação de Modelos de Risco Multivariados**. São Paulo, 2009. 39 f. Textos para discussão 179 - Escola de Economia de São Paulo, Fundação Getúlio Vargas, São Paulo, 2009.

ZUNINO, Ney André de Mello. **Um Ambiente para Experimentação de Tratamento de Dependência em Análise de Risco**. Florianópolis. 2006. 39f. Dissertação (Conclusão de Curso Ciências da Computação). Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, 2006.

## Apêndice 1 : Descritivo da carteira teórica de ações

Composição da carteira teórica levada em consideração na condução deste estudo.

**Tabela 1:** Composição da carteira teórica de ações com período de referência de setembro a dezembro de 2012.  
Fonte: BM&FBOVESPA.

| <b>Código</b> | <b>Ação</b>  | <b>Tipo</b> | <b>Qtde. Teórica</b> |
|---------------|--------------|-------------|----------------------|
| ALLL3         | ALL AMER LAT | ON NM       | 50.81                |
| AMBV4         | AMBEV        | PN          | 11.60                |
| BBAS3         | BRASIL       | ON NM       | 76.20                |
| BBDC4         | BRADESCO     | PN N1       | 57.04                |
| BISA3         | BROOKFIELD   | ON ES NM    | 116.44               |
| BRAP4         | BRADSPAR     | PN N1       | 15.51                |
| BRFS3         | BRF FOODS    | ON NM       | 23.92                |
| BRKM5         | BRASKEM      | PNA N1      | 30.22                |
| BRML3         | BR MALLS PAR | ON NM       | 24.59                |
| BTOW3         | B2W VAREJO   | ON NM       | 24.22                |
| BVMF3         | BMFBOVESPA   | ON NM       | 159.21               |
| CCRO3         | CCR SA       | ON NM       | 41.18                |
| CESP6         | CESP         | PNB N1      | 8.51                 |
| CIEL3         | CIELO        | ON EDJ NM   | 14.09                |
| CMIG4         | CEMIG        | PN N1       | 18.17                |
| CPFE3         | CPFL ENERGIA | ON NM       | 11.93                |
| CPLE6         | COPEL        | PNB N1      | 7.92                 |
| CRUZ3         | SOUZA CRUZ   | ON EJ       | 15.34                |
| CSAN3         | COSAN        | ON NM       | 12.26                |
| CSNA3         | SID NACIONAL | ON          | 82.93                |
| CTIP3         | CETIP        | ON EJ NM    | 14.70                |
| CYRE3         | CYRELA REALT | ON NM       | 54.17                |
| DASA3         | DASA         | ON NM       | 31.67                |
| DTEX3         | DURATEX      | ON NM       | 22.68                |
| ELET3         | ELETROBRAS   | ON N1       | 20.57                |
| ELET6         | ELETROBRAS   | PNB N1      | 14.28                |
| ELPL4         | ELETROPAULO  | PN N2       | 20.48                |
| EMBR3         | EMBRAER      | ON NM       | 24.87                |
| FIBR3         | FIBRIA       | ON NM       | 26.82                |
| GFA3          | GAFISA       | ON NM       | 230.49               |
| GGBR4         | GERDAU       | PN N1       | 82.25                |
| GOAU4         | GERDAU MET   | PN N1       | 17.04                |
| GOLL4         | GOL          | PN N2       | 43.23                |
| HGTX3         | CIA HERING   | ON NM       | 13.59                |
| HYPE3         | HYPERMARCAS  | ON NM       | 69.70                |

(Cont.)

(Cont.)

| <b>Código</b> | <b>Ação</b>  | <b>Tipo</b> | <b>Qtde. Teórica</b> |
|---------------|--------------|-------------|----------------------|
| ITSA4         | ITAUSA       | PN N1       | 145.08               |
| ITUB4         | ITAUUNIBANCO | PN N1       | 80.62                |
| JBSS3         | JBS          | ON NM       | 79.09                |
| KLBN4         | KLABIN S/A   | PN N1       | 41.23                |
| LAME4         | LOJAS AMERIC | PN          | 36.25                |
| LIGT3         | LIGHT S/A    | ON EJ NM    | 11.36                |
| LLXL3         | LLX LOG      | ON NM       | 101.43               |
| LREN3         | LOJAS RENNER | ON EJ NM    | 8.50                 |
| MMXM3         | MMX MINER    | ON NM       | 127.43               |
| MRFG3         | MARFRIG      | ON NM       | 39.24                |
| MRVE3         | MRV          | ON NM       | 86.41                |
| NATU3         | NATURA       | ON NM       | 10.93                |
| OGXP3         | OGX PETROLEO | ON NM       | 467.67               |
| OIBR3         | OI           | ON          | 16.55                |
| OIBR4         | OI           | PN          | 92.01                |
| PCAR4         | P.ACUCAR-CBD | PN N1       | 4.15                 |
| PDGR3         | PDG REALT    | ON NM       | 527.32               |
| PETR3         | PETROBRAS    | ON          | 66.81                |
| PETR4         | PETROBRAS    | PN          | 226.08               |
| RDCD3         | REDECARD     | ON NM       | 23.81                |
| RENT3         | LOCALIZA     | ON NM       | 11.59                |
| RSID3         | ROSSI RESID  | ON NM       | 115.95               |
| SANB11        | SANTANDER BR | UNT N2      | 39.04                |
| SBSP3         | SABESP       | ON NM       | 2.32                 |
| SUZB5         | SUZANO PAPEL | PNA INT N1  | 85.94                |
| TIMP3         | TIM PART S/A | ON NM       | 84.41                |
| TRPL4         | TRAN PAULIST | PN N1       | 2.47                 |
| UGPA3         | ULTRAPAR     | ON NM       | 7.83                 |
| USIM3         | USIMINAS     | ON N1       | 18.44                |
| USIM5         | USIMINAS     | PNA N1      | 124.44               |
| VAGR3         | V-AGRO       | ON NM       | 480.65               |
| VALE3         | VALE         | ON N1       | 48.84                |
| VALE5         | VALE         | PNA N1      | 157.00               |
| VIVT4         | TELEF BRASIL | PN          | 11.67                |

## Apêndice 2: Teste de Raiz Unitária

**Tabela Apêndice:** Teste ADF para raiz unitária da série de retornos da PTAX.

Hipótese Nula: LOGRET\_PTAX tem raiz unitária

Exógena: Nenhuma

Lag: 4 (fixo)

|                            |             | Estatística t | Prob          |        |
|----------------------------|-------------|---------------|---------------|--------|
| Dikey-Fuller Aumentado     |             | -13,52        | 0,0043        |        |
| Valores críticos do teste: | Nível 1%    | -2,57         |               |        |
|                            | Nível 5%    | -1,94         |               |        |
|                            | Nível 10%   | -1,61         |               |        |
| Variável                   | Coeficiente | Desv.Pad.     | Estatística t | Prob   |
| LOGRET_PTAX(-1)            | -1,11       | 0,08          | -13,52        | 0,0043 |
| D(LOGRET_PTAX(-1))         | 0,17        | 0,07          | 2,41          | 0,0162 |
| D(LOGRET_PTAX(-2))         | 0,15        | 0,06          | 2,49          | 0,0130 |
| D(LOGRET_PTAX(-3))         | 0,16        | 0,05          | 2,93          | 0,0034 |
| D(LOGRET_PTAX(-4))         | 0,06        | 0,03          | 1,68          | 0,0091 |

**Tabela 3:** Teste ADF para raiz unitária da série de retornos do IBOVESPA.

Hipótese Nula: LOGRET\_IBOVESPA tem raiz unitária

Exógena: Nenhuma

Lag: 0 (fixo)

|                            |             | Estatística t | Prob          |        |
|----------------------------|-------------|---------------|---------------|--------|
| Dikey-Fuller Aumentado     |             | -27,14        | 0,0453        |        |
| Valores críticos do teste: | Nível 1%    | -2,57         |               |        |
|                            | Nível 5%    | -1,94         |               |        |
|                            | Nível 10%   | -1,61         |               |        |
| Variável                   | Coeficiente | Desv.Pad.     | Estatística t | Prob   |
| LOGRET_IBOVESPA(-1)        | -1,11       | 0,08          | -13,52        | 0,0453 |

## **Anexo – Banco Central do Brasil – Circular Nº 3.478**

O trecho abaixo foi extraído do documento original disposto para consulta no site do Banco Central do Brasil e expõe os requisitos qualitativos necessários para a elaboração e implantação do gerenciamento de risco.

### **Requisitos Qualitativos**

Art. 2º Os modelos internos de risco de mercado devem:

I - estar integrados à estrutura de gerenciamento de risco de mercado e ser utilizados em conjunto com os limites definidos pela instituição para medir, monitorar e controlar a exposição ao risco de mercado;

II - possuir sofisticação, controles e infra-estrutura tecnológica compatíveis com a natureza das operações, a complexidade dos produtos e a dimensão da exposição ao risco de mercado da instituição;

III - mensurar todos os riscos de mercado relevantes;

IV - mensurar adequadamente o risco advindo das características não lineares de opções e de outros instrumentos financeiros, quando relevantes;

V - avaliar de maneira conservadora novos produtos e instrumentos financeiros com baixa liquidez;

VI - permitir a mensuração do risco de mercado, mediante utilização de carteiras hipotéticas; e

VII - tratar adequadamente carteiras concentradas em determinados fatores de risco.

Art. 3º As instituições devem manter quantidade suficiente de profissionais tecnicamente qualificados em suas áreas de negócio, operacionais, de gerenciamento de risco, de auditoria interna, de tecnologia da informação, bem como em quaisquer outras envolvidas no desenvolvimento, validação, avaliação e utilização dos modelos internos.

Art. 4º As instituições devem manter documentação adequada e atualizada sobre todos os aspectos relevantes do modelo interno de risco de mercado, abrangendo, no mínimo:

- I - políticas e estratégias adotadas;
- II - controles internos;
- III - fundamentação teórica;
- IV - descrição das metodologias de avaliação, mensuração e monitoramento;
- V - rotinas operacionais;
- VI - relatórios de avaliação, incluindo os da auditoria interna, dos processos de validação e dos testes de aderência (**backtests**);
- VII - relatórios de risco, incluindo os relatórios de valor em risco (VaR) e de testes de estresse;
- VIII - relatórios gerenciais que forneçam subsídio ao processo decisório da diretoria da instituição e do conselho de administração, se houver; e
- IX - histórico das alterações efetuadas no modelo interno, inclusive no processo de validação.

Art. 5º A diretoria da instituição e o conselho de administração, se houver, devem definir as diretrizes de atuação das atividades de controles internos, os níveis de autorização necessários para assunção de diferentes níveis de risco, assim como as informações e os relatórios periódicos a serem submetidos à sua consideração.

Parágrafo único. A diretoria da instituição deve definir a estrutura de limites de risco assumido pela instituição e verificar a adequação dos resultados do modelo interno de risco de mercado ao perfil de risco da instituição