Insper Instituto de Ensino e Pesquisa
Faculdade de Economia e Administração

Victor Jannuzzi Affonso

Um ensaio sobre modelos de escolha intertemporal

São Paulo - SP
2020

Victor Jannuzzi Affonso

Um ensaio sobre modelos de escolha intertemporal

Monografia apresentada ao curso de Ciências Econômicas, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Bacharel do Insper Instituto de Ensino e Pesquisa.

Insper Instituto de Ensino e Pesquisa

Faculdade de Economia e Administração

Orientador: Prof. José Heleno Faro

São Paulo - SP

2020

Victor Jannuzzi Affonso

Um ensaio sobre modelos de escolha intertemporal/ Victor Jannuzzi Affonso. - São Paulo - SP: 2020

34 p.

Monografia: Insper Instituto de Ensino e Pesquisa

Faculdade de Economia e Administração , 2020.

Orientador: Prof. José Heleno Faro

1. Escolha intertemporal. 2. Axiomatização. 3. Modelo de desconto geométrico. 4. Viés do presente. 5. Economia comportamental. 6. Modelo de desconto quase-hiperbólico. I. Victor Jannuzzi Affonso. II. Um ensaio sobre modelos de escolha intertemporal.

Victor Jannuzzi Affonso

Um ensaio sobre modelos de escolha intertemporal

Monografia apresentada ao curso de Ciências Econômicas, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Bacharel do Insper Instituto de Ensino e Pesquisa.

Banca examinadora

Prof. José Heleno Faro
Orientador

Prof. Paulo Casaca
Examinador

São Paulo - SP
2020

Agradecimentos

Agradeço primeiro a meus pais, que sempre me deram todo amor, carinho e atenção, especialmente durante esse ano tão difícil. Agradeço a eles também pela oportunidade de ter uma educação impecável, a qual foi essencial para eu estar onde estou hoje. Nessa linha, agradeço ao Insper por ter me fornecido uma ótima educação, além de diversas oportunidades acadêmicas, imprescindíveis para minha formação profissional e, sobretudo, acadêmica. Agradeço a todo corpo docente do Insper com o qual tive contato durante minha graduação, desde os professores com os quais tenho mais contato, até os quais pouco conversei, sou muito grato por todos os ensinamentos, vocês foram e são uma grande inspiração para mim.

Um agradecimento especial ao meu orientador José Heleno Faro, que desde o início de nosso contato sempre se demonstrou muito aberto e solícito, me ajudando nas mais diversas questões acadêmicas e pessoais. Agradeço muito ao incentivo para eu fazer o curso de verão no IMPA, que foi uma das experiências mais impressionantes e gratificantes que eu já tive. Obrigado também por todas as conversas e sugestões, além do apoio para eu seguir para o mestrado. Especificamente sobre este trabalho, suas sugestões, apontamentos e referências (com destaque para as notas de aula do curso de Decision Theory) foram essenciais para chegarmos a um bom resultado.

Gostaria de agradecer também a todos meus amigos, principalmente aos da Móbile, que sempre estiveram ao meu lado, me apoiando, ajudando e proporcionando momentos que eu jamais vou esquecer. Por último, um agradecimento especial à minha namorada Camila por sempre estar ao meu lado nos momentos mais difíceis, sendo o meu maior apoio nesse ano tão complicado. Suas palavras e incentivos foram essenciais para eu me manter de pé com foco nos meus objetivos, então lhe devo meus mais sinceros agradecimentos.

Resumo

O presente trabalho apresenta uma discussão geral sobre dois modelos de escolha intertemporal. O primeiro é o modelo de desconto geométrico, o qual, apesar de ser mais elementar, proporciona discussões práticas e teóricas de alto valor para a ciência econômica. Em linha com a importância teórica da axiomatização, é promovida uma ampla discussão da estrutura do modelo, seguida dos enunciados e análises dos axiomas, almejando assim esclarecer o porquê dos axiomas propostos, além de suas relações com o comportamento do tomador de decisão. Após a descrição da classe de fenômenos comportamentais que invalidam a representação pelo modelo de desconto geométrico, o viés do presente é escolhido para prosseguir com a discussão, a qual tem como referência importante os teóricos de Economia Comportamental. Então, uma análise nos moldes da realizada para o primeiro modelo é feita pra o modelo de desconto quase-hiperbólico, o qual aborda exatamente o fenômeno do viés do presente. Nessa segunda parte, a diferenciação dos modelos se mostra essencial, uma vez que, apesar de compartilharem de uma estrutura semelhante, possuem elementos específicos que estão intimamente ligados com as discussões relevantes do modelo.

Palavras-chave: Escolha intertemporal, Axiomatização, Modelo de desconto geométrico, Viés do presente, Economia comportamental, Modelo de desconto quase-hiperbólico.

Abstract

The present work features a general discussion of intertemporal choice models. The first one is the geometric discount model, which, despite being more elementary, provides practical and theoretical discussions of high value for economic science. In line with the theoretical importance of axiomatization, a wide discussion of the model is promoted, followed by the formal statements and analysis of each axiom, thus aiming to clarify the reasons behind the proposed axioms, in addition to their relation with the decision-maker's behavior. After describing the class of behavioral phenomena that invalidates the representation by the geometric discount model, the present bias is chosen to proceed with the discussion, which has the Behavioral Economics theorists as its important references. Then, an analysis similar to the one performed for the geometric discount is made for the quasi-hyperbolic discount model, which addresses the present bias phenomenon. In this second section, the differentiation of the models is essential, since they have specific elements which are intimately related to the relevant discussions of the model, despite sharing a similar structure.

Keywords: Intertemporal choice, Axiomatization, Geometric discount model, Present bias, Behavioral economics, Quasi-hyperbolic discount model.

Sumário

1 INTRODUÇÃO 8

2 REVISÃO DE LITERATURA 12

2.1 Modelos teóricos do processo de escolha e axiomas comportamentais 12

2.2 Evolução dos Modelos de Escolha Intertemporal - De Koopmans a Olea e Strzalecki 13

2.2.1 Ajustes da axiomatização de Koopmans - Bleichrodt, Rohde e Wakker 13

2.2.2 Evidências empíricas de Inconsistência temporal 14

2.2.3 Modelo de Desconto Quase-hiperbólico e o Viés do Presente 16

3 MODELOS DE ESCOLHA INTERTEMPORAL 17

3.1 Axiomatização do Modelo de Desconto Geométrico 17

3.1.1 Estrutura e definições essenciais 17

3.1.2 Axiomas e Teorema de representação 19

3.2 Axiomatização do Modelo de Desconto Quase-hiperbólico 23

3.2.1 Axiomas e Teorema de representação 25

4 CONCLUSÃO 31

REFERÊNCIAS 33

1 Introdução

Os modelos de escolha intertemporal enquadram-se no campo de estudo da ciência econômica conhecido como Teoria da Decisão. De modo objetivo, em tal campo "pretendemos dispor de um modelo matemático aproximado das decisões humanas que nos permita prever, dentro de limitações aceitáveis, quais serão suas decisões" (CASTRO; FARO, 2005, p. 6). Por meio da formalização matemática dos conceitos estudados e do uso de ferramentas analíticas da matemática, tal campo de estudo é de suma importância teórica, pois permite um melhor entendimento de como o ser humano toma decisões e quais suas consequências. Além disso, fica evidente que qualquer agente, não apenas aqueles inseridos em um contexto econômico, pode se utilizar do caráter normativo dos modelos para tomar melhores decisões, baseadas nas premissas e previsões dos mesmos. Essa característica normativa é diretamente influenciada pelos trabalhos empíricos e problemas descritos pela Economia Comportamental, aspecto central deste trabalho e que será desenvolvido a seguir.

Uma das questões importantes sobre a forma como seres humanos tomam decisões é o posicionamento das mesmas em uma perspectiva temporal. Ao se acrescentar a dimensão temporal às escolhas de uma pessoa, os custos e benefícios ocorrem ao longo do tempo e o processo decisório do indivíduo deve levar isso em consideração. É de se esperar que um indivíduo racional esteja preocupado em todos os instantes de tempo em maximizar sua utilidade tanto presente, quanto futura (SAMUELSON, 1937), ou seja, espera-se que esse seja um comportamento razoável. Esta é uma suposição primordial dos modelos que serão tratados à frente e que enquadra-se como um "axioma, ou mesmo uma definição, uma vez que não está sujeito a prova em um sentido empírico" (SAMUELSON, 1937, tradução do autor, p. 156).

Paul Samuelson foi um dos principais expoentes da matematização da economia e, mais especificamente, da escolha intertemporal. O teórico foi responsável pela apresentação do Modelo de Desconto Geométrico da Utilidade (MDG), cuja ideia central é que o tomador de decisão valoriza mais o consumo (ou *payoff*) presente do que o futuro e isso ocorre exatamente porque, segundo a teoria, o agente desconta o consumo futuro a uma certa taxa (THALER, 2016), que reflete a impaciência do indivíduo quanto ao futuro. Considerando o processo de decisão de quando receber uma dada cesta de consumo, espera-se que o indivíduo opte por receber essa cesta o quanto antes, ou seja, quanto mais distante é esse recebimento, menor é o valor atribuído pelo indivíduo à cesta (menor sua utilidade). Com estas considerações, segue-se como corolário do MDG, que o critério de decisão de um indivíduo frente a uma situação de escolha intertemporal é, em cada instante de tempo, maximizar a soma de todas as utilidades, tanto a presente, quanto as futuras, as quais são descontadas por meio de uma taxa constante (SAMUELSON, 1937).

Seguindo o MDG, Koopmans introduziu no modelo a metodologia mais moderna e rigorosa da Teoria da Decisão, que se trata da formalização axiomática, ou seja, a utilização de postulados aceitos como verdade para a elaboração da teoria. Ao propor axiomas para o comportamento humano, "estamos implicitamente afirmando que um comportamento razoável deveria apresentar tal propriedade" (CASTRO; FARO, 2005, p. 7). O estudo aqui apresentado utiliza a abordagem axiomática para tratar dos modelos de escolha intertemporal, partindo do trabalho de Koopmans (1960, 1972) para iniciar sua análise.

De acordo com Gilboa et al. (2019), a axiomatização é importante na ciência econômica, pois proporciona um entendimento mais profundo dos modelos, além de auxiliar o cientista a identificar quais são suas verdadeiras suposições. No contexto da teoria de escolha intertemporal e da Teoria da Decisão no geral, o uso de funções de utilidade, apesar de proporcionar tratamento analítico para as escolhas de um indivíduo, carece de conexão com questões observáveis e de refutabilidade. Os axiomas então, são capazes de tornar a teoria refutável, estando de acordo com esse princípio exigido para que um modelo seja, de fato, científico.

Em seu trabalho seminal, Samuelson (1937) questiona a capacidade descritiva de seu modelo ao relatar que a suposição de que indivíduos descontam utilidade futura de maneira simples, particularmente a utilização de uma taxa de desconto constante, necessita de suporte empírico. Como bem analisado por Thaler (2016), tendo como principal referência o trabalho de Samuelson, o desconto de utilidades futuras por meio de taxas que variam ao longo do tempo representa um comportamento temporalmente inconsistente e que nitidamente viola um dos pressupostos básicos do MDG introduzidos por Samuelson e presentes também na formulação de Koopmans.

Thaler (2016) indica que o tomador de decisão do MDG como proposto por Samuelson se trata de um *homo economicus*, conceito teórico usado para descrever um indivíduo abstrato que não possui vieses e limitações cognitivas, que toma decisões racionais a todo instante. Sob o contexto da escolha intertemporal, é esperado que o comportamento do *homo economicus* apresente consistência temporal, ou seja, a escolha feita hoje a respeito do consumo futuro é a mesma se feita neste período futuro. Com essa questão em mente, Strotz (1956) é pioneiro ao propor um modelo que aborda a inconsistência temporal, o qual se tornou o principal referencial teórico dos trabalhos empíricos que documentaram esse fenômeno.

Estudos como Thaler (1981), Coller e Williams (1999), Augenblick, Niederle e Sprenger (2015), entre outros, trouxeram dados que apontam a presença de inconsistência temporal nas escolhas dos indivíduos, levantando questões descritivas que contribuíram para a formulação de modelos mais gerais, com mais graus de liberdade. Os trabalhos com o objetivo mencionado utilizam diversas configurações de questionários para avaliar as decisões tomadas pelos seus voluntários, trazendo resultados que permitem a exploração de diversos aspectos econômicos e psicológicos envolvendo a inconsistência temporal. No entanto, discutir as formulações de cada pesquisa foge do escopo deste trabalho, o qual tem seu foco na apresentação dos mode-

los de escolha intertemporal e utiliza os problemas descritivos apresentados pela Economia Comportamental para incitar suas discussões.

De modo a tornar a abordagem deste estudo mais específica, o viés do presente é a causa de inconsistência temporal escolhida para se avançar a um modelo mais geral de escolha intertemporal. Tal aspecto do comportamento humano é representado simbólicamente pela figura de um telescópio defeituoso (THALER, 2016), sob o qual o indivíduo vê distâncias próximas desproporcionalmente maiores se comparadas a distâncias mais afastadas. Ou seja, em termos de escolha intertemporal, o viés do presente representa um comportamento de negligência desproporcional sobre futuro, em outras palavras, uma sobrevalorização do presente em comparação com o futuro. Nos modelos de escolha intertemporal, o viés do presente pode ser resumido pela presença de um desconto intertemporal que começa alto e em seguida diminui (THALER, 2016).

O modelo que aborda essa questão é chamado de Modelo de Desconto Quase-hiperbólico (MDQH) e teve sua primeira utilização no contexto de escolha individual desenvolvida em (LAIBSON, 1997). Esse é o segundo modelo tratado neste trabalho, que inicia pela apresentação geral do modelo, mostrando como ele parte da estrutura do Modelo de Desconto Geométrico e de que maneira é incluído o viés do presente. Em seguida, são expostos os axiomas formulados por Olea e Strzalecki (2014) para o MDQH, salientando quais os axiomas responsáveis por abordar o viés do presente.

Os modelos de escolha intertemporal estão presentes em diversas áreas da teoria econômica, uma vez que nestas é necessário supor uma estrutura de tomada de decisão para os agentes dos modelos teóricos. Muitos avanços recentes se deram pela incorporação de preferências hiperbólicas e quase-hiperbólicas, em áreas como jogos dinâmicos, escolha coletiva e equilíbrio geral, abordadas nos trabalhos de Judd (2004), Harris e Laibson (2001), Drugeon e Wigniolle (2020) e Nighswander (2018).

Os principais objetivos deste estudo são a apresentação e discussão da axiomatização da escolha intertemporal de Koopmans (1960, 1972), trazendo detalhamento e discussão específica da formulação dos axiomas da teoria, seguidas da exposição de suas implicações e de que forma a teoria pode ser aplicada. Então será realizada a mesma abordagem para a axiomatização do Modelo de Desconto Quase-hiperbólico de Olea e Strzalecki (2014), na qual será promovida uma comparação entre os dois modelos, destacando em que pontos eles diferem em suas estruturas gerais e seus respectivos axiomas.

O presente trabalho está estruturado seguindo a evolução dos modelos de escolha intertemporal do MDG ao MDQH, discutindo as questões relevantes tanto de cada modelo, quanto desse processo de evolução. Na revisão de literatura, inicialmente a axiomatização é discutida de maneira aprofundada, abordando seus aspectos epistemológicos e descrevendo como esta é feita. Nas próximas subseções, são discutidos respectivamente os ajustes feitos à axiomatização de Koopmans, os trabalhos empíricos de inconsistência dinâmica e viés do presente e, por último,

a introdução do MDQH. Então, na seção seguinte, são apresentados o MDG e o MDQH, de acordo com o formato e os objetivos acima expostos.

2 Revisão de Literatura

2.1 Modelos teóricos do processo de escolha e axiomas comportamentais

A teoria econômica é tradicionalmente desenvolvida utilizando-se a linguagem matemática e objetos matemáticos para formalizar ideias e intuições sobre fenômenos econômicos, permitindo maior capacidade de entendimento e previsão dos mesmos (DEKEL; LIPMAN, 2010). De acordo com Sydsaeter e Hammond (1994) e Boland e Grubel (1986), tal maneira de desenvolver teoria permite um tratamento analítico dos objetos de estudo, evitando ambiguidades e falta de clareza ao descrever a interação entre os elementos do modelo em questão. Ademais, as ferramentas analíticas proporcionadas pela matemática permitem que a teoria avance a exploração do fenômeno estudado (SYDSAETER; HAMMOND, 1994).

Em Teoria da Decisão, a formulação de objetos matemáticos para representar o processo de decisão permite uma abordagem analítica do fenômeno estudado. Como mencionado na introdução, a axiomatização é importante para a ciência econômica, pois promove um entendimento mais profundo da teoria, além possibilitar a refutabilidade do modelo (GILBOA et al., 2019). Portanto, mostra-se necessário explorar tanto a relevância da axiomatização para os modelos econômicos, quanto o processo de axiomatização de maneira geral, possibilitando maior compreensão sobre a maneira como ele é realizado e com que objetivos.

De acordo com Gilboa et al. (2019, tradução do autor, p. 3) “uma axiomatização é um teorema matemático que relaciona uma regra de escolha envolvendo conceitos teóricos à condições presumivelmente observáveis empiricamente”. Tal teorema matemático é, de acordo com os autores (GILBOA et al., 2019), um teorema de representação, o qual estabelece um resultado de equivalência entre os axiomas e a regra de escolha. No caso dos modelos de escolha intertemporal, temos uma regra de escolha que, a partir de fluxos de consumo que se dão ao longo do tempo, define um critério de decisão objetivo; em termos do modelo: a cesta de consumo que fornece maior valor da função de utilidade descontada será escolhida.

Seguindo a argumentação de Gilboa et al. (2019), o procedimento de elaborar axiomas para a escolha humana tem três aspectos que o tornam relavante para a ciência econômica. Primeiramente, cita-se o valor para a economia normativa, uma vez que torna mais fácil e direta a exposição do que deve ser feito, de acordo com o economista. Isso ocorre, pois evita-se a exposição desnecessária de relações e conceitos econômicos mais complexos. Segundamente, é tratada a questão da capacidade descritiva do modelo, que ao ser axiomatizado, "ajuda a delinear os limites de aplicabilidade de uma teoria e pode servir de guia para a execução de experimentos"(GILBOA et al., 2019, tradução do autor, p. 9). Este ponto referente a experimentos

nos leva à terceira justificativa: ao se desenvolver axiomas presumivelmente observáveis, busca-se explicitamente ter uma conexão empírica, uma forma de avaliar a capacidade descritiva do modelo e eventualmente falseá-lo, estando assim, de acordo com o princípio de falseabilidade, o qual é essencial para a formulação de uma teoria econômica que seja de fato científica. Ao tratar de funções de utilidade como nos modelos aqui abordados, estas não possuem conexão empírica e falseabilidade explícitas, sendo necessários os axiomas que garantem a representação das preferências pela função de utilidade para se obter essas características.

Por último, faz-se necessário delimitar que características um conjunto de axiomas deve ter para ser considerado adequado, baseado em Kreps (1988). Primeiramente, o conjunto de axiomas deve ser consistente, ou seja deve haver uma coleção de objetos que satisfaça os axiomas simultaneamente. Além disso, os axiomas devem ser independentes, isto é, "(...) não pode haver um subconjunto dos axiomas implicando nos outros" (KREPS, 1988, tradução do autor, p. 4). Essa propriedade salienta que os axiomas devem ser postulados básicos e intuitivos, em que se preza pela simplicidade para, a partir deles, desenvolver a teoria de interesse.

2.2 Evolução dos Modelos de Escolha Intertemporal - De Koopmans a Olea e Strzalecki

São tratadas aqui as questões que foram essenciais para a evolução teórica dos modelos de escolha intertemporal. Começando pelos ajustes da axiomatização de Koopmans, são apontadas as alterações sugeridas por Bleichrodt, Rohde e Wakker (2008) e explicadas as questões teóricas que motivaram-nas. Em seguida, são discutidos os principais trabalhos que trouxeram evidências de inconsistência temporal, os quais foram fundamentais para o avanço da teoria de escolha intertemporal. A apresentação dos modelos utilizados e as discussões de suas formulações são desenvolvidas posteriormente, na seção "Modelos de escolha intertemporal".

2.2.1 Ajustes da axiomatização de Koopmans - Bleichrodt, Rohde e Wakker

Koopmans (1960, 1972) traz a caracterização axiomática pioneira do Modelo de Desconto Geométrico, porém diversas imprecisões matemáticas e teóricas comprometem a análise rigorosa e geral da questão abordada e, portanto, devem ser devidamente tratadas. Bleichrodt, Rohde e Wakker (2008, tradução do autor) identificam e corrigem essas imprecisões, tornando o modelo mais completo e robusto. Inicialmente, os autores demonstram por um argumento topológico que, sob a estrutura desenvolvida por Koopmans, na qual não são especificados os programas de consumo, o conjunto dos programas que geram um valor infinito para a função de utilidade descontada é vazio. Ou seja, sob as suposições de Koopmans, a função de utilidade descontada é igual a um determinado valor finito, o que não havia sido notado pelo autor. A infinitude da

utilidade descontada é problemática em termos teóricos, uma vez que não permite uma avaliação entre dois programas de consumo diferentes, mas que possuem utilidade descontada infinita.

Apesar da estrutura de Koopmans implicar na avaliação de utilidades descontadas finitas, o que a princípio pode ser considerado positivo, Bleichrodt, Rohde e Wakker (2008) demonstram que a axiomatização de Koopmans implica que a função de utilidade instantânea (a utilidade avaliada em cada período de tempo) considerada deve ser limitada, representando assim uma limitação do modelo. Não é interessante para uma teoria abrangente limitar a aplicação do modelo a funções de utilidade limitadas, um exemplo dessa situação é a função de utilidade $u(x) = \sqrt{x}$, a qual não é limitada e é muito comum em teoria do consumidor e teoria da escolha no geral.

Almejando uma maior generalidade do modelo, os autores impõem "condições que implicam em uma utilidade descontada bem definida e finita para as preferências e programas considerados, mas que sejam enunciadas em termos de observáveis (preferências) (...)" (BLEICHRODT; ROHDE; WAKKER, 2008, p. 342, tradução do autor). Tais condições são os axiomas de equivalência constante e de robustez na cauda (ou continuidade na cauda), que serão discutidos na seção 3.1.2. O resultado que sumariza o trabalho dos autores é o seguinte:

Teorema 1. *(Bleichrodt, Rohde e Wakker) Um programa de consumo apresenta função de utilidade descontada bem definida e finita se, e somente se, satisfaz as condições de equivalência constante e robustez na cauda.*

2.2.2 Evidências empíricas de Inconsistência temporal

Em linha com os objetivos desta seção, primeiramente são apresentados dois exemplos inspirados diretamente em Thaler (1981, 2016), o primeiro é mais abstrato e segundo possui um formato mais experimental e que foi pensado também tendo como inspiração os mais importantes estudos empíricos do tema. De acordo com Sprenger (2015), tais exemplos fazem parte do tipo mais emblemático para representar de maneira objetiva o fenômeno de inconsistência temporal. Antes de iniciar a exposição, cabe destacar que parte da literatura utiliza o termo "inconsistência dinâmica" para se referir a esse fenômeno, porém ambos os termos indicam o mesmo conceito e podem ser usados de maneira intercambiável.

Exemplo 1. *Suponha dois indivíduos: Antônio e João. Para ambos, são atribuídos valores arbitrários que representam o quanto cada um valoriza o ato de ir assistir a um jogo da seleção brasileira. Para Antônio, assistir a seleção brasileira jogar no dia de hoje tem o valor de 100, enquanto assistir a seleção jogar daqui a um ano tem o valor de 90, 81 no ano seguinte e assim por diante. Por sua vez, João valoriza assistir a seleção jogar no dia de hoje em 100, 70 daqui a um ano e 63 para qualquer período posterior. Nota-se que Antônio desconta o futuro a uma taxa constante de 10%, enquanto João começa descontando 30% no primeiro ano, 10% no segundo e, em seguida, não desconta mais.*

Exemplo 2. *Suponha que um entrevistador faça as seguintes perguntas:*

(1) Você prefere receber (a) R$ 300 hoje ou (b) R$ 305 amanhã?

(2) Você prefere receber (a) R$ 300 daqui a um ano ou (b) R$ 305 daqui a um ano e um dia?

Enquanto Antônio prefere receber R$ 300 hoje e R$ 300 daqui a um ano e um dia, João prefere receber R$ 300 hoje e R$ 305 daqui a um ano e um dia.

No Exemplo 1, Antônio apresenta um comportamento temporalmente consistente, exatamente por apresentar taxas de desconto constantes, por outro lado, João apresenta taxas declinantes, mostrando que seu comportamento com relação ao futuro é bastante distinto se comparado com o presente. Este exemplo de João é nitidamente um caso de viés do presente, pois o indivíduo negligencia o futuro desproporcionalmente, uma vez que as taxas de desconto declinam para períodos futuros. Como indicado por Thaler (2016), um indivíduo como João é mais impaciente no começo e isso diminui com o passar do tempo. No Exemplo 2, independente das respostas específicas dos entrevistados, caso a resposta da pergunta (1) seja distinta da resposta da (2) (como no caso de João), o indíviduo apresenta inconsistência temporal. Isso se dá, pois como os valores são os mesmos e na pergunta (2) há também um dia de diferença entre cada opção, um tomador de decisão temporalmente consistente deve encarar as situações da mesma forma.

Partindo para os achados empíricos, Thaler (1981) elabora um questionário que expõe diferentes valores de um prêmio que o entrevistado supostamente ganhou em uma loteria e são dadas duas opções: retirar o prêmio agora ou esperar um período para fazer isso. A questão central que o estudo faz é qual o valor exigido pelo entrevistado para ele ser indiferente entre retirar o dinheiro hoje e retirar depois de diversos períodos de tempo. São exploradas questões referentes a forma como os indivíduos percebem ganhos e perdas, além de como percebem diferentes montantes de prêmio, no entanto, essas questões são menos importantes para a discussão central desta seção. Por meio dos valores obtidos na coleta de dados, Thaler calcula as taxas de desconto implícitas envolvidas no processo de decisão dos entrevistados e chega a conclusão de que em todas as formulações do experimento, os indivíduos apresentam inconsistência temporal, especialmente do tipo em que as taxas de desconto diminuem com o tempo.

Tendo em vista experimentos como o de Thaler (1981), Coller e Williams (1999) promovem uma pesquisa que lida com as principais críticas feitas com respeito à metodologia das pesquisas empíricas realizadas até então. As alterações realizadas pelos pesquisadores podem ser resumidas pela comunicação de informações relevantes para a tomada de decisão dos entrevistados, a comparação entre pagamentos reais e pagamentos hipotéticos e, por último, um tratamento estatístico que consiga tratar os diferentes incentivos presentes nas variações do experimento. Os resultados de tal estudo estão de acordo com os achados de Thaler (1981) e são uma indicação mais robusta do fenômeno estudado.

Os resultados apresentados mostram que o desconto geométrico não é observado na prática, uma vez que supondo ele, devem ser constantes as taxas marginais de substituição intertemporal, que medem o quanto o indivíduo está disposto a substituir o seu consumo em determinado período pelo consumo em outro período. Destaca-se então a tendência do ser humano de dar peso maior para o presente em suas decisões intertemporais, perdendo a correta dimensão do seu futuro e das escolhas feitas sobre esse consumo posterior.

2.2.3 Modelo de Desconto Quase-hiperbólico e o Viés do Presente

O MDQH, que trata do viés do presente, é uma generalização do MDG que, diferentemente de modelos hiperbólicos como o de Loewenstein e Prelec (1992), com estruturas mais gerais, delimita a abordagem de um fenômeno comportamental específico. A estrutura da função de utilidade descontada, abordada na seção 3.2.1, elucida essas questões, além de evidenciar em que medida o MDQH se difere do MDG.

Dada a representação do desconto quase-hiperbólico já feita por outros trabalhos, com destaque para Laibson (1997), a contribuição de Olea e Strzalecki (2014) se dá no processo de axiomatização do MDQH, o qual se distingue do proposto por Koopmans (1960, 1972) ao relaxar a suposição de estacionariedade, mas manter a suposição de separabilidade temporal. Essas suposições são exatamente as propriedades centrais da representação de Koopmans: a primeira refere-se a igualdade entre a taxa marginal de substituição entre quaisquer períodos de tempo consecutivos e a segunda refere-se à independência da taxa marginal de substituição entre dois períodos de tempo com relação ao consumo em outros períodos (OLEA; STRZALECKI, 2014). Em termos dos axiomas do modelo, os autores indicam que o viés do presente representa uma falha de estacionariedade, uma vez que a taxa marginal de substituição do presente é distinta da observada no futuro, sendo assim esse é o principal aspecto que deve ser tratado para que seja possível axiomatizar o modelo de desconto quase-hiperbólico.

Ao comparar a estrutura teórica e os axiomas dos modelos MDG e MDQH, nota-se que há muito em comum entre eles, ou seja, uma teoria aproveita bastante da outra. Além de diferenciar os dois modelos em sua formalização axiomática, tendo em vista o fenômeno comportamental abordado, é de suma importância destacar os pontos comuns dos modelos, de modo a expor sua essencialidade para a teoria de escolha intertemporal.

3 Modelos de Escolha intertemporal

3.1 Axiomatização do Modelo de Desconto Geométrico

3.1.1 Estrutura e definições essenciais

Nesta seção será apresentado primeiramente a axiomatização de Koopmans com as correções feitas por Bleichrodt et al (2008), partindo das definições essenciais para a formulação do arcabouço básico dos dois modelos discutidos neste trabalho. Em seguida, de acordo com os objetivos propostos, serão expostos os axiomas que culminam no teorema de representação do Modelo de Desconto Geométrico.

Na base da teoria situa-se o conjunto geral de todas as opções de cestas de consumo factíveis[1] em cada período de tempo com as quais o agente se depara ao tomar uma decisão.

Definição 1. *Denota-se por X o conjunto de cestas de consumo possíveis, em que $X \subseteq \mathbb{R}^n$ é um conjunto convexo.*

Considera-se um horizonte de tempo infinito, ou seja, um fluxo de consumo que se estende indefinidamente e que é tradicional ao abordar escolha intertemporal por ser bastante geral, além de possibilitar a utilização de um ferramental matemático específico. A caracterização axiomática de Koopmans trata os fluxos de consumo futuros como um processo determinístico, isto é, o tomador de decisão não enfrenta situações de risco ou incerteza com relação aos eventos analisados, o que define abordagem e metodologia específicas a serem utilizadas.

De modo a complementar a exposição feita aqui e dar referências de trabalhos importantes para a literatura, são citadas extensões do trabalho de Koopmans que abordam o problema da escolha intertemporal sob estruturas não-determinísticas. Primeiramente, Kochov (2015) foi responsável por axiomatizar o modelo intertemporal de utilidade esperada maxmin, cuja forma estástica (ou atemporal) foi formulada inicialmente por Gilboa e Schmeidler (1989) para lidar com situações de ambiguidade, ou seja, quando o indivíduo é incapaz de atribuir probabilidades aos eventos. Por sua vez, (BASTIANELLO; FARO, 2020) axiomatizaram o modelo de escolha intertemporal sob incerteza (à la Savage), sendo incerteza um conceito que descreve situações em que o tomador de decisão atribui probabilidades subjetivas aos eventos analisados e cuja principal referência é o trabalho de Savage (1972).

Então, determina-se o conjunto de fluxos de consumo possíveis $D := \{d = (d_0, d_1, \ldots) : d_t \in X, t \geq 0\}$, que nada mais é do que uma forma de denotar o conjunto X^∞ dos consumos de cada período de tempo desse horizonte infinito. Um elemento arbitrário $d = (d_0, d_1, d_2, \ldots) \in D$

[1] Aqui considera-se consumo, sob influência direta de uma tradição microeconômica, no entanto, pode ser interpretado também como payoff ou renda.

nos informa o consumo $d_t \in X$ em cada período $t \geq 0$. Devido a suposição de um arcabouço determinístico, o agente sabe com certeza que obterá o consumo informado por d em cada período t.

Uma vez que se trata de um modelo de desconto geométrico, o agente toma decisões com base na análise da soma de suas utilidades descontadas em cada instante de tempo, ou seja, dado um fluxo de consumo $d = (d_0, d_1, \ldots) \in D$, tem-se então uma função de utilidade descontada definida como:

Definição 2. *(Representação por desconto geométrico) Denota-se por $V : D \to \mathbb{R}$, a função que avalia o fluxo de consumo $d \in D$, que possui a seguinte representação:*

$$V(d_0, d_1, \ldots) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(d_t) \tag{3.1}$$

em que u é uma função de utilidade instantânea $u : X \to \mathbb{R}$ que avalia a utilidade obtida em cada instante de tempo e $\delta \in (0, 1)$ é o fator de desconto constante ao longo do tempo.

Desse modo, dados dois fluxos de consumo $d = (d_0, d_1, d_2, \ldots),\ d' = ({d_0}', {d_1}', {d_2}', \ldots) \in D$ pela regra de escolha descrita acima, um indivíduo prefere estritamente o fluxo d ao d' se e somente se:

$$V(d) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(d_t) > \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u({d_t}') = V(d')$$

Uma consideração importante do modelo é o que pode ser chamado de impaciência, fenômeno implicado pelo fator de desconto das utilidades futuras δ, o qual indica o comportamento do agente frente ao futuro. Em um exercício de estática comparativa, tomando δ_1 e δ_2 de modo que $\delta_1 > \delta_2$, tem-se que ${\delta_1}^n > {\delta_2}^n$, uma vez que $f(x) = x^n$ com $n \in \mathbb{N}$ é estritamente crescente. Então é possível concluir que $V_{\delta_1}(d) > V_{\delta_2}(d)$ para um mesmo fluxo d. Estendendo esse exercício para valores significativamente próximos de zero, os consumos futuros assumem valores cada vez menores, indicando uma valorização muito baixa dos consumos futuros pelo tomador de decisão e, consequentemente, um comportamento bastante impaciente.

Esse fenômeno de impaciência é bem demonstrado pelo seguinte exemplo de Mas-Colell, Whinston e Green (1995): dado um fluxo de consumo não nulo $d = (d_0, d_1, \ldots, d_t, \ldots)$, caso se analise o mesmo fluxo, porém com cada valor transferido um período à frente, $d' = (0, d_0, d_1, \ldots, d_{t-1}, \ldots)$, fica claro que pela presença do fator de desconto, caso a preferência do indivíduo seja representada pela função descrita acima, d será estritamente preferível a d', matematicamente:

$$(d_0, d_1, \ldots, d_t, \ldots) \succ (0, d_0, d_1, \ldots, d_{t-1}, \ldots).$$

Há uma discussão na literatura de que a imposição do fator de desconto $\delta \in (0,1)$ é apenas uma simplificação teórica para se obter uma utilidade descontada dado um fluxo de consumo limitado, que matematicamente equivale ao somatório (3.1) convergir (MAS-COLELL; WHINSTON; GREEN, 1995). Como os próprios autores levantam, tal crítica é pouco fundamentada, pois a atitude de descontar o futuro reflete exatamente o fenômeno de impaciência discutido anteriormente. Uma importante implicação é que quanto mais distante o período, menos relevância ele tem para o tomador de decisão, o que eventualmente culmina em períodos que têm relevância cada vez mais próxima de zero, a qual é uma suposição que encontra suporte empírico.

A impaciência também se demonstra essencial na teoria de equilíbrio geral, a qual carrega as noções e resultados principais de Teoria da Decisão com o intuito de determinar uma estrutura específica para o comportamento do(s) consumidor(es). Como demonstrado por Araujo (1985), a impaciência do tomador de decisão é uma condição necessária para a existência de equilíbrio em uma economia com N consumidores, infinitos bens e um horizonte infinito de tempo.

Antes de partir devidamente aos axiomas, é necessário definir a relação de preferência do agente. De fato, considere como a preferência do indivíduo no presente ($t = 0$), a relação binária $\succcurlyeq$ definida sobre $F \subseteq D$, ou seja $\succcurlyeq \subseteq F \times F$, em que F é o conjunto dos fluxos de consumo finalmente constantes, conceito que é explorado na seção seguinte. Em essência, F é o conjunto dos fluxos que apresentam utilidade descontada bem definida e finita, os quais são o foco do trabalho aqui apresentado.

3.1.2 Axiomas e Teorema de representação

Estabelecido esse arcabouço básico, tem-se a estrutura inicial, a partir da qual se formulam os axiomas necessários para obter o teorema de representação. O primeiro axioma é bastante tradicional em Teoria da Decisão:

Axioma 1. *(Ordem fraca) A relação de preferência $\succcurlyeq$ é completa e transitiva.*

A completude de uma relação de preferência indica que dados $d, d' \in F$ quaisquer, tem-se $d \succcurlyeq d'$ ou $d' \succcurlyeq d$. Por sua vez, a transitividade indica que dados $d,\ d',\ g \in F$, tem-se que $d \succcurlyeq d'$ e $d' \succcurlyeq g$ implicam que $d \succcurlyeq g$.

Dado $x \in X$ e $d = (d_0, d_1, \ldots) \in F$, denotamos por (x, d) o fluxo de consumo $(x, d_0, d_1, \ldots)$ (pode-se iterar esse procedimento: $(x, y, d) = (x, y, d_0, d_1, \ldots)$). Além disso, dada a relação de preferência definida anteriormente ($\succcurlyeq$), ao considerar dois consumos $x, y \in X$, mantêm-se os mesmos símbolos para denotar fluxos de consumo constantes ao longo do tempo, sobre os quais define-se:

$$x \succcurlyeq y \iff (x, x, \ldots) \succ (y, y, \ldots) \tag{3.2}$$

O próximo axioma é denominado *Sensibilidade fraca* para diferenciá-lo do axioma de sensibilidade do MDQH, que possui particularidades que são expostas em 3.2.1. O postulado em questão indica uma sensibilidade do agente com relação ao presente ($t = 0$), tratando-se de uma suposição bastante comum para a escolha intertemporal (OLEA; STRZALECKI, 2014). De fato, esse axioma indica um comportamento imediatista, ou impaciente do indivíduo com relação ao consumo futuro, que de acordo com as discussões anteriores é algo plausível. Além disso, Bleichrodt, Rohde e Wakker (2008) argumentam que essa condição é importante, pois evita trivialidade e casos em que a função de utilidade descontada é dominada pelo comportamento de um futuro devidamente distante.

Axioma 2. *(Sensibilidade fraca) Existem $x, y \in X$ e $d \in F$ tais que $(x,\ d) \succ (y,\ d)$.*

Ou seja, de acordo com o axioma podemos encontrar cestas de consumo distintas que alocadas no período $t = 0$, garantem que, apesar dos fluxos de consumo serem iguais para os demais períodos e terem sido movidos um período à frente, ao analisar os fluxos totais, um será estritamente preferível ao outro.

Axioma 3. *(Separabilidade temporal) Para todas as cestas de consumo $x, y, x', y' \in X$ e fluxos $d, d' \in F$, $(x,\ y,\ d) \succcurlyeq (x',\ y',\ d)$ se, e somente se, $(x,\ y,\ d') \succcurlyeq (x',\ y',\ d')$.*

No terceiro axioma, assume-se que a partir do período $t = 2$, se dois fluxos de consumo são iguais, então a preferência entre os fluxos totais independem do valor desses fluxos. Impõem-se separabilidade apenas para os períodos $t = 0$ e $t = 1$, mas o modelo como um todo apresenta separabilidade para qualquer período, questão que é tratada após enunciar o axioma de estacionariedade.

Como afirmado anteriormente, a separabilidade temporal como definida acima nos indica que a taxa marginal de substituição entre dois períodos de tempo é independente do consumo nos outros períodos, permitindo a exclusão de certos tipos de comportamentos, como por exemplo a formação de hábitos (OLEA; STRZALECKI, 2014). Como afirmam Olea e Strzalecki (2014, tradução do autor, p. 1455), "a separabilidade temporal é uma consequência necessária de qualquer representação aditiva de preferências (...)", em que representação aditiva significa que dada uma função $V : D \to \mathbb{R}$ representando as preferências do agente, esta pode ser representada por um somatório de cada coordenada de $d = (d_0,\ d_1,\ \ldots) \in D$ (WAKKER, 1989), que é exatamente o caso aqui abordado (vide a representação 3.1).

Axioma 4. *(Estacionariedade) Para todos $x \in X$ e $d,\ d' \in F$, $d \succcurlyeq d'$ se, e somente se, $(x,\ d) \succcurlyeq (x,\ d')$.*

Em termos diretos, o postulado informa que considerando consumo comum inicial entre dois fluxos, a relação de preferência se mantém ao remover esse consumo e considerar o restante do fluxo movido ao período inicial. De modo intuitivo, a estacionariedade indica que o indivíduo

deve ter um comportamento temporalmente consistente, ou seja, os *trade-offs* entre consumos que ocorrem em diferentes períodos de tempo se dão da mesma forma, sendo assim é a condição que sintetiza a teoria de desconto geométrico quanto a forma como o indivíduo encara o consumo futuro. Esse aspecto é facilmente evidenciado ao tomar cestas de consumo $x_1, \ldots, x_n \in X$ e fluxos $d, d' \in F$ e iterar o axioma de estacionariedade:

$$(x_1, \ldots, x_n, d) \succcurlyeq (x_1, \ldots, x_n, d') \iff (x_2, \ldots, x_n, d) \succcurlyeq (x_2, \ldots, x_n, d') \overset{\text{estac}}{\iff}$$

$$\overset{\text{estac}}{\iff} (x_3, \ldots, x_n, d) \succcurlyeq (x_3, \ldots, x_n, d') \overset{\text{estac}}{\iff} \ldots \overset{\text{estac}}{\iff} (x_n, d) \succcurlyeq (x_n, d') \overset{\text{estac}}{\iff} d \succcurlyeq d'$$

Independente do período n considerado, o comportamento do tomador de decisão frente ao consumo inicial comum é o mesmo, ou seja é consistente temporalmente. Enunciado o axioma de estacionariedade, chega-se ao seguinte resultado:

Lema 1. *Separabilidade temporal e estacionariedade (além dos axiomas 1 e 2) implicam em separabilidade para todos os períodos*[2].

Demonstração. Tome cestas $x, y, x', y' \in X$ e fluxos $d, d' \in F$ de modo que $(x, y, d) \succcurlyeq (x', y', d)$. Pelo axioma de separabilidade temporal, tem-se que $(x, y, d) \succcurlyeq (x', y', d) \iff (x, y, d') \succcurlyeq (x', y', d')$. Dado um $z \in X$ qualquer, aplicando o axioma de estacionariedade: $(x, y, d) \succcurlyeq (x', y', d) \iff (z, x, y, d) \succcurlyeq (z, x', y', d)$ e $(x, y, d') \succcurlyeq (x', y', d') \iff (z, x, y, d') \succcurlyeq (z, x', y', d')$. Então conclui-se que $(z, x, y, d) \succcurlyeq (z, x', y', d) \iff (z, x, y, d') \succcurlyeq (z, x', y', d')$. Desse modo, obtém-se separabilidade para os períodos $t = 1$ e $t = 2$, bastando iterar esse argumento para mostrar que há separabilidade em todo período $t \geq 0$. □

Os axiomas e conceitos seguintes foram introduzidos por Bleichrodt, Rohde e Wakker (2008) e possuem uma vantagem clara de simplificar a abordagem, evitando que seja necessário estabelecer suposições mais fortes de continuidade em dimensão infinita (OLEA; STRZALECKI, 2014), além de corrigirem as imprecisões da axiomatização de Koopmans, como foi discutido na seção 2.2.1.

Axioma 5. *(Equivalência constante) Para todo fluxo de consumo $d \in F$, $\exists\, x \in X$ tal que o seu fluxo constante é indiferente a d, ou seja $x = (x, x, x, \ldots) \sim d$.*

Este axioma informa que dado um fluxo de consumo, é possível encontrar um fluxo de consumo constante tal que o indivíduo seja indiferente entre os dois. Intuitivamente, dado um certo fluxo de consumo, imagine a seguinte pergunta: ao invés de obter esse consumo ao longo do tempo, qual a cesta que, se consumida em todos os períodos igualmente, irá te satisfazer da

[2] De modo análogo, pode-se demonstrar que, com estacionariedade, a sensibilidade (descrita no Axioma 2) é válida para todo período $t \geq 0$.

mesma forma?. A condição imposta indica que o indivíduo sempre tem uma resposta para esta pergunta.

Faz-se necessário introduzir duas definições que serão importantes em seguida. Primeiramente, $\forall\, T \geq 1$ e $d,\ d' \in D$ pode-se determinar um fluxo de consumo indexado da seguinte forma:

$$d_T d' := (d_0,\ d_1,\ \ldots,\ d_T,\ d'_{T+1},\ d'_{T+2},\ \ldots).$$

A próxima definição que se mostra necessária é do conceito de *fluxo de consumo finalmente constante*: d é finalmente constante se $d = d_T x = (d_0,\ d_1,\ \ldots,\ d_T,\ x,\ x,\ \ldots)$ para algum $T \geq 1$ e $x \in X$, ou seja, a partir de determinado período $t = T$, o fluxo é constante daí em diante. Então, para cada período T, define-se F_T como o conjunto de todos os fluxos finalmente constantes da forma $d_T x = (d_0,\ d_1,\ \ldots,\ d_T,\ x,\ x,\ \ldots)$, o qual pode ser identificado por $(d_0,\ d_1,\ \ldots,\ d_T,\ x)$. Desse modo, convenciona-se que F_T tem dimensão $T + 2$ e, portanto, é isomorfo a X^{T+2}.

Axioma 6. *(Continuidade finita) Para todo $T \geq 1$, a restrição de $\succcurlyeq$ a F_T satisfaz continuidade, ou seja, para todo fluxo de consumo $d \in F_T$, os conjuntos $\{d' \in F_T : d' \succcurlyeq d\}$ e $\{d' \in F_T : d \succcurlyeq d'\}$ são fechados.*

O último axioma indica que, dado um fluxo de consumo d preferível a um fluxo constante x, é possível limitar d, de modo a encontrar um fluxo finalmente constante $d_T x$ preferível ao fluxo constante.

Axioma 7. *(Continuidade na cauda) Para todo $x \in X$ e $d \in F$: se $d \succ x$, então $\exists\, t_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, T \geq t_0$, $d_T x \succ x$; se $x \succ d$, então $\exists\, t_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, T \geq t_0$, $x \succ d_T x$.*

É possível então, enunciar o teorema de representação desta seção:

Teorema 2. *(Teorema de Representação - Modelo de Desconto Geométrico) A preferência $\succcurlyeq$ em F satisfaz os Axiomas 1 a 7 se, e somente se, possui representação por uma função de desconto exponencial, ou seja, $\exists\, u : X \to \mathbb{R}$ não constante e contínua e $\delta \in (0, 1)$ tal que a preferência $\succcurlyeq$ é representada por uma função da forma 3.1.*

Demonstração. Aqui são expostos os principais argumentos utilizados e as ideias centrais envolvidas na demonstração do teorema, de modo a explorar os aspectos relevantes para as discussões deste trabalho. A estrutura dessa demonstração é baseada na apresentada por Olea e Strzalecki (2014) para o caso do modelo quase-hiperbólico.

Primeiramente é necessário demonstrar sensibilidade e separabilidade temporal para todo período. Isso já foi mencionado e demonstrado no Lema 1 para a separabilidade, sendo a prova para a sensibilidade análoga. Considerando essas propriedades e os axiomas de ordem

fraca e continuidade finita, além dos resultados demonstrados por Gorman (1968) e Vind (1971), é possível fixar $T \geq 1$ e uma cesta $x \in X$, de modo que a restrição de $\succcurlyeq$ a F_T seja representável por

$$(d_0,\ d_1,\ \ldots,\ d_T,\ x,\ x,\ \ldots) \mapsto \sum_{t=0}^{T} h_{t,T}(d_t) + H_T(x)$$

em que $h_{t,T}, H_T : X \to \mathbb{R}$ com $t \geq 1$ são funções não constantes e contínuas.

Em seguida, utilizando os resultados de unicidade de representações aditivas e de estacionariedade obtém-se que $\exists\, \delta \neq 1$ tal que $\succcurlyeq$ sobre F_T é representável por

$$(d_0,\ d_1,\ \ldots,\ d_T,\ x,\ x,\ \ldots) \mapsto V(d) = \sum_{t=0}^{T} \delta^t u(d_t) + \frac{\delta^{T+1}}{1-\delta} u(x)$$

Então, demonstra-se que $\delta \in (0,\ 1)$ por meio do axioma de continuidade na cauda, se aproximando então da representação exposta no Teorema 2. Pelo axioma de equivalência constante, tem-se que para dado $d \in F$, existe um $x_d \in X$ tal que $x_d \sim d$, utilizando esse postulado, além da continuidade na cauda, é possível demonstrar que:

$$\liminf_{T\to\infty} \sum_{t=0}^{T} \delta^t u(d_t) \geq V(x_d) \text{ e } \limsup_{T\to\infty} \sum_{t=0}^{T} \delta^t u(d_t) \leq V(x_d)$$

Temos então que $V(d) = V(x_d) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(d_t)$, sendo assim, essa série (e portanto a função) é convergente e bem-definida. $\square$

Por último, vale mencionar que existem axiomas alternativos aos 5, 6 e 7, que junto dos outros também representam as preferências por meio de uma função de desconto geométrico, cuja apresentação é omitida, pois pouco acrescenta ao trabalho, tendo em vista os objetivos do mesmo.

3.2 Axiomatização do Modelo de Desconto Quase-hiperbólico

O Modelo de Desconto Quase-hiperbólico, feitas as considerações das seções anteriores, possui formulação e axiomatização bastante similares ao MDG, que é, de fato, um caso especial do MDQH. São apresentados aqui apenas os axiomas que se diferem do MDG, além dos axiomas adicionais, utilizando-se das definições e estruturas básicas introduzidas na seção anterior. Uma vez que o foco é discutir os aspectos teóricos e garantir uma melhor compreensão do modelo, são deixados de lado o axioma ligado intimamente à estrutura experimental de Olea e Strzalecki (2014) e os que envolvem discussões que fogem da abordagem deste trabalho.

O foco da abordagem é nas preferências representáveis por função de desconto quase-hiperbólico com fluxo de consumo que tenha valor bem definido e finito de utilidade descontada. Analogamente ao modelo anterior, define-se representação de desconto quase-hiperbólico de preferência da seguinte forma:

Definição 3. *(Representação por desconto quase-hiperbólico) A preferência $\succcurlyeq$ em F possui representação por desconto quase-hiperbólico se, e somente se, $\exists\, u : X \to \mathbb{R}$ não constante e contínua, $\delta \in (0,1)$ e $\beta \in (0,1]$ tal que $\succcurlyeq$ é representada pela função de utilidade descontada:*

$$V(d_0, d_1, \ldots) = u(d_0) + \beta \sum_{t=1}^{\infty} \delta^t u(d_t). \tag{3.3}$$

Como apontado por Olea e Strzalecki (2014), β é a medida de viés do presente, a qual representa a distância subjetiva entre os períodos 0 e 1. Esta é uma interpretação intuitiva deste fenômeno comportamental, o qual pode ser diretamente visualizado nessa representação, uma vez que, comparado com a representação de desconto geométrico, se $\beta \in (0,1)$ o valor da utilidade do mesmo fluxo de consumo será estritamente menor para aqueles consumos em $t \geq 1$. Quanto mais próximo de zero é β, menores os valores das utilidades descontadas dos períodos $t \geq 1$, ou seja, mais desproporcional é a negligência com relação ao futuro. Nota-se que no caso em que $\beta = 1$, a representação se torna exatamente a de desconto geométrico. Por meio do seguinte exemplo, é possível observar de maneira objetiva uma preferência que apresente viés do presente, além de evidenciar o comportamento do parâmetro β.

Exemplo 3. *Assuma um indivíduo cujas preferências sejam representadas por uma função de desconto quase-hiperbólico como em 3.3. Dados $d = (1,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots)$ e $d' = (0,\ 2,\ 0,\ 0,\ \ldots)$, as preferência do indivíduo são:*

$$(1,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots) \succ (0,\ 2,\ 0,\ 0,\ \ldots)$$

$$(0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots) \prec (0,\ 0,\ 2,\ 0,\ 0,\ \ldots)$$

Na segunda preferência, os fluxos foram movidos um período a frente e o primeiro consumo é comum aos dois fluxos e igual a zero. Este é um caso trivial de viés do presente, apresentado por Olea e Strzalecki (2014), em que os mesmos fluxos movidos apenas um período para frente já invertem a preferência. Agora é demonstrado que nesse exemplo, $\beta < 1$, como havia sido indicado no caso de existência de viés do presente.

Considerando $V(d) = u(1)$, $V(d') = \beta\delta u(2)$, $V(0,\ d) = \beta\delta u(1)$ e $V(0,\ d') = \beta\delta^2 u(2)$. Pela suposição das preferências, sabe-se que $V(d) > V(d')$ e então, supondo sem perda de generalidade que $u(2) > 0$, $u(1) > \beta\delta u(2) \iff \beta\delta < \frac{u(1)}{u(2)}$. Também, $V(0,\ d) < V(0,\ d') \iff \beta\delta u(1) < \beta\delta^2 u(2) \iff u(1) < \delta u(2) \iff \delta > \frac{u(1)}{u(2)}$. Como $\beta > 0$, $\delta > \frac{u(1)}{u(2)} \iff \beta\delta > \beta\frac{u(1)}{u(2)}$ e, uma vez que $\beta\delta < \frac{u(1)}{u(2)}$, conclui-se que $\beta\frac{u(1)}{u(2)} < \frac{u(1)}{u(2)} \iff \beta < 1$.

Será seguida a apresentação do modelo feita por Olea e Strzalecki (2014), na qual primeiramente são enunciados os axiomas que promovem a representação da preferência pela função de utilidade descontada:

$$V(d_0, d_1, \ldots) = u(d_0) + \sum_{t=1}^{\infty} \delta^t v(d_t) \tag{3.4}$$

em que u e v são funções $X \to \mathbb{R}$ contínuas e não constantes e $\delta \in (0, 1)$. Diferentes funções de utilidade instantânea nesse caso indicam que o indivíduo observa o futuro ($t \geq 1$) de maneira diferente do presente ($t = 0$). Essa representação permite uma análise mais abrangente, podendo captar fenômenos comportamentais quanto à forma como o tomador de decisão age intertemporalmente.

Em seguida, o axioma central da teoria é responsável por estabelecer uma relação clara entre as funções $u(d)$ e $v(d)$: que $v(d) = \beta u(d)$ com $\beta \in (0, 1]$, ou seja $v(d)$ é uma transformação afim positiva de $u(d)$ com parâmetro β específico (OLEA; STRZALECKI, 2014). Assim, o modelo é delimitado de modo a representar o fenômeno do viés do presente, determinando então o tipo de comportamento específico do indivíduo quanto ao futuro.

3.2.1 Axiomas e Teorema de representação

Inicialmente, o Axioma 1 (Ordem fraca) do modelo de desconto geométrico é mantido, sendo a primeira diferença entre os modelos os axiomas de sensibilidade e separabilidade inicial. Ambos postulados devem ser reformulados uma vez que, na ausência da estacionariedade, é necessária uma adequação à quase-estacionariedade, de modo a garantir sensibilidade e separabilidade temporal para todo $t \geq 0$.

Axioma 8. *(Sensibilidade forte) Existem $x, y, y' \in X$ e $d \in F$ tal que $(y,\ d) \succ (y',\ d)$ e $(x,\ y,\ d) \succ (x,\ y',\ d)$.*

Para distinguir os conceitos, a sensibilidade do MDQH é chamada de "Sensibilidade forte", uma vez que além de impor sensibilidade para $t = 0$, impõe também para $t = 1$. Por sua vez, a separabilidade temporal é então chamada de "Separabilidade inicial", denominação que ressalta exatamente a imposição de separabilidade temporal para os períodos iniciais.

Axioma 9. *(Separabilidade inicial) Para todos $x, y, z, w, v, v' \in X$ e todos $d, d' \in F$ tem-se:*

(i) $(x,\ y,\ d) \succ (z,\ w,\ d)$ *se, e somente se,* $(x,\ y,\ d') \succ (z,\ w,\ d')$*;*

(ii) $(v,\ x,\ y,\ d) \succ (v,\ z,\ w,\ d)$ *se, e somente se,* $(v,\ x,\ y,\ d') \succ (v,\ z,\ w,\ d')$*;*

(iii) $(v,\ d) \succ (v,\ d')$ *se, e somente se,* $(v',\ d) \succ (v',\ d')$*.*

Em (i) tem-se a separabilidade como no Axioma 3, porém em (ii) se impõe separabilidade para um período à frente. Por último, (iii) expõe que trocando a cesta do período inicial, a relação de preferência se mantém, o que no MDG é uma implicação imediata do axioma de estacionariedade.

O postulado 9 juntamente ao axioma da quase-estacionariedade são os responsáveis por garantir a separabilidade temporal das preferências (OLEA; STRZALECKI, 2014), como foi discutido e demonstrado de maneira análoga na seção anterior.

Axioma 10. *(Quase-estacionariedade) Para todos* $x,\ y \in X$ *e todos* $d, d' \in F$, $(x,\ y,\ d) \succ (x,\ y,\ d')$ *se, e somente se,* $(x,\ d) \succ (x,\ d')$.

Quase-estacionariedade pode ser diretamente relacionada à estacionariedade como descrita no Axioma 4 por meio do seguinte resultado:

Proposição 1. *Estacionariedade implica quase-estacionariedade.*

Demonstração. [3] Tome fluxos $d,\ d' \in F$ e cestas $x,\ y \in X$ quaisquer, de modo que $(x,\ d) \succ (x,\ d')$. Pela estacionariedade, obtém-se que $(x,\ d) \succ (x, d') \iff d \succ d'$. Aplicando estacionariedade: $(x,\ d) \succ (x,\ d') \iff d \succ d' \iff (y,\ d) \succ (y,\ d') \iff (x,\ y,\ d) \succ (x,\ y,\ d)$. Esta última equivalência é exatamente a propriedade de quase-estacionariedade. □

Na revisão de literatura foi abordado que a estacionariedade é uma das hipóteses flexibilizadas no MDQH e isso se dá exatamente pelo viés do presente implicar em uma violação da estacionariedade.

Proposição 2. *Supondo preferências representáveis pela função de desconto quase-hiperbólico, a existência de viés do presente viola a estacionariedade como enunciado no Axioma 4.*

Demonstração. Tendo em vista as hipóteses propostas e o enunciado da estacionariedade basta encontrar $d, d' \in F$ tais que $d \succcurlyeq d'$ e $(x,\ d') \succcurlyeq (x,\ d)$.

Primeiramente, tomam-se $d, d' \in F$ de modo que $d \succcurlyeq d'$. Uma vez que se supõe que as preferências são representáveis pela função da forma 3.3, tem-se que:

$$V(d) > V(d') \iff u(d_0) + \beta \sum_{t=1}^{\infty} \delta^t u(d_t) > u({d_0}') + \beta \sum_{t=1}^{\infty} \delta^t u({d_t}') \iff$$

$$\iff u(d_0) + \beta\delta u(d_1) + \beta\delta^2 u(d_2) + \ldots > u({d_0}') + \beta\delta u({d_1}') + \beta\delta^2 u({d_2}') + \ldots$$

Uma vez que $d,\ d' \in F$, pela hipótese de representação das preferências, conclui-se que ambas as séries convergem. Denotando os termos da série $V(d)$ como a_t e da série

[3] O postulado de estacionariedade pode ser enunciado utilizando preferência estrita ($\succ$) no lugar da preferência fraca ($\succcurlyeq$) sem alterar os resultados expostos. Os próprios Olea e Strzalecki (2014) abordam o axioma utilizando preferência estrita.

$V(d')$ como b_t com $t \geq 0$, por propriedades aritméticas de séries convergentes, tem-se que $V(d) - V(d') = \sum_{t=0}^{\infty}(a_t - b_t) = \sum_{t=0}^{\infty} a_t - \sum_{t=0}^{\infty} b_t = A - B$. Ou seja:

$$V(d) - (d') = u(d_0) - u(d_0{}') + \beta\delta(u(d_1) - u(d_1{}')) + \beta\delta^2(u(d_2) - u(d_2{}')) + \ldots = A - B > 0$$

Dado que $\sum_{t=0}^{\infty}(a_t - b_t)$ é convergente, por propriedade de série, obtém-se então que: $\delta\sum_{t=0}^{\infty}(a_t - b_t) = \sum_{t=0}^{\infty}\delta(a_t - b_t) = \delta A > 0$, na notação do modelo:

$$\delta(V(d) - (d')) = \delta(u(d_0) - u(d_0{}')) + \beta\delta^2(u(d_1) - u(d_1{}')) + \beta\delta^3(u(d_2) - u(d_2{}')) + \ldots = \quad (3.5)$$
$$= \delta(A - B) > 0$$

Tomando $x \in X$, são analisadas as utilidades descontadas $V(x, d)$ e $V(x, d')$ por meio da subtração $V(x, d) - V(x, d')$. Como ambas séries convergem, tem-se pelas mesmas propriedades citadas anteriormente:

$$V(x,\ d) - V(x,\ d') = \beta\delta(u(d_0) - u(d_0{}')) + \beta\delta^2(u(d_1) - u(d_1{}')) + \beta\delta^3(u(d_2) - u(d_2{}')) + \ldots \quad (3.6)$$

Em seguida, adicionando um número finito de termos à série $V(x,\ d) - V(x, d')$ mantemos a convergência da mesma, além do resultado dessa série resultante ser trivial. O procedimento é:

$$\delta(u(d_0) - u(d_0{}')) - \delta(u(d_0) - u(d_0{}')) + V(x,\ d) - V(x,\ d') =$$
$$= \delta(u(d_0) - u(d_0{}')) + (-\delta(u(d_0) - u(d_0{}'))) + \beta\delta(u(d_0) - u(d_0{}')) +$$
$$+ \beta\delta^2(u(d_1) - u(d_1{}')) + \beta\delta^3(u(d_2) - u(d_2{}')) + \ldots$$

Agora é necessário provar que a série acima é absolutamente convergente. Uma vez que $d,\ d' \in F$, ambos são fluxos finalmente constantes, ou seja, existem T_1 e T_2 tais que $d = (d_0,\ \ldots,\ d_{T_1},\ y,\ y,\ \ldots)$ e $d' = (d_0{}',\ \ldots,\ d_{T_2}{}',\ z,\ z,\ \ldots)$. Para $t \geq \max\{T_1,\ T_2\}$ tem-se que o termo geral dessa série é dado por $\beta\delta^{t-2}w$ sendo $w = u(y) - u(z)$, ou seja, ao analisar dois termos consecutivos em módulo:

$$\frac{|\beta\delta^{(n+1)-2}w|}{|\beta\delta^{n-2}w|} = \frac{\beta\delta^{n-1}|w|}{\beta\delta^{n-2}|w|} = \frac{\delta^{n-1}}{\delta^{n-2}} = \delta$$

Uma vez que $\delta \in (0,\ 1)$, temos que a partir de certo t a razão de dois termos consecutivos em módulo é menor que 1, ou seja, pelo teste da razão é possível concluir que a série é absolutamente convergente. Uma vez que convergência absoluta implica em convergência comutativa, podemos rearranjar os termos da série em questão:

$$V(x,\ d) - V(x, d') = \beta\delta(u(d_0) - u(d_0{}')) - \delta(u(d_0) - u(d_0{}')) + \delta(u(d_0) - u(d_0{}')) +$$

$$+\beta\delta^2(u(d_1) - u(d_1{}')) + \beta\delta^3(u(d_2) - u(d_2{}')) + \dots \tag{3.7}$$

Com a expressão 3.5 e tendo em vista a expressão 3.7 obtém-se $V(x, d) - V(x, d') = (\beta - 1)\delta(u(d_0) - u(f_0)) + \delta(A - B)$. Com a suposição de viés do presente $\beta \in (0,\ 1)$ então $(\beta - 1) < 0$. Então, analisando a expressão $V(x,\ d) - V(x, d') = (\beta - 1)\delta(u(d_0) - u(d_0{}')) + \delta(A - B) < 0$, a qual implica que $(\beta - 1)\delta(u(d_0) - u(d_0{}')) < -\delta(A - B) < 0$. Uma vez que $\delta \in (0, 1)$, a expressão só pode ser verdadeira se $(u(d_0) - u(d_0{}')) > 0$ e ao considerar esse caso tem-se:

$$(\beta - 1)\delta(u(d_0) - u(d_0{}')) < -\delta(A - B) \iff u(d_0) - u(d_0{}') < -\frac{(A - B)}{(\beta - 1)}$$

O resultado encontrado, além de violar estacionariedade como almejado, evidencia uma condição para os consumos no período $t = 0$ de d e d' em função do parâmetro comportamental β e dos valores das utilidades descontadas A e B para garantir que não há estacionariedade (tendo em vista as suposições estipuladas). □

Os próximos três axiomas necessários para o modelo já foram apresentados na seção anterior e são mantidos aqui, sendo eles: Axioma de Equivalência constante (Axioma 5), Axioma de Continuidade finita (Axioma 6) e Axioma de Continuidade na cauda (Axioma 7). Todos os axiomas até aqui apresentados nos permitem uma representação da preferência por meio de uma função da forma 3.4:

Teorema 3. *A preferência $\succcurlyeq$ satisfaz os Axiomas 1, 5, 6, 7, 8, 9 e 10 se, e somente se, $\exists\ u,\ v : X \to \mathbb{R}$ contínuas e não constantes e $\delta \in (0,\ 1)$ tais que $\succcurlyeq$ é representada por uma função da forma 3.4.*

Demonstração. A prova aqui apresentada é baseada em Olea e Strzalecki (2014) e é bastante similar à do Teorema 2, seguindo praticamente os mesmos passos. Desse modo, cada passo será discutido de maneira sucinta, ressaltando as diferenças com a prova do Teorema 2.

Primeiramente, por meio dos axiomas de separabilidade inicial, sensibilidade forte e quase-estacionariedade, é demonstrado que há separabilidade temporal e sensibilidade para todos os períodos. Então, partindo disso e supondo ordem fraca e continuidade finita, dado $T \geq 1$ e $x,\ y \in X$, a restrição de $\succ$ a F_T é representável por (pelo mesmo resultado de Gorman (1968) e Vind (1971))

$$(d_0,\ d_1,\ \dots,\ d_T,\ x,\ x,\ \dots) \mapsto \sum_{t=0}^{T} v_{t,T}(d_t) + R_T(x)$$

em que $v_{t,T}, R_T : X \to \mathbb{R}$ com $t \geq 1$ são funções não constantes e contínuas.

Definindo $u := v_0$ e $v := \delta^{-1}v_1$, de maneira análoga à prova do Teorema 2, ao supor quase-estacionariedade e utilizar a unicidade de representações aditivas, conclui-se que a preferência $\succ$ é representável por

$$(d_0,\ d_1,\ \ldots,\ d_T,\ x,\ x,\ \ldots) \mapsto u(d_0) + \sum_{t=1}^{T} \delta^t v(d_t) + \frac{\delta^{T+1}}{1-\delta} v(x) \tag{3.8}$$

em que $\delta \neq 1$. Então, é demonstrado que $\delta \in (0,1)$ por meio do axioma de continuidade na cauda.

Por último, pelo axioma de equivalência constante, $\exists\ x_d$ tal que $x \sim x_d$ e assumindo continuidade na cauda é possível demonstrar que

$$u(d_0) + \liminf_{T\to\infty} \sum_{t=1}^{T} \delta^t v(d_t) \geq V(x_d) \text{ e } u(d_0) + \limsup_{T\to\infty} \sum_{t=0}^{T} \delta^t v(d_t) \leq V(x_d)$$

em que $V(d)$ é a função definida em 3.8. Conclui-se então que $V(d) = V(x_d) = u(d_0) + \sum_{t=1}^{\infty} \delta^t v(d_t)$, assim $V(d)$ é convergente e bem-definida.

□

Os próximos axiomas são responsáveis por restringir a função $v(x)$ para que $v(x) = \beta u(x)$ com $\beta \in (0,1]$, finalizando assim a estrutura necessária para se chegar no modelo quase-hiperbólico.

Axioma 11. *(Viés do presente) Para quaisquer $x,\ y,\ z,\ w,\ v \in X$, com $x \succ z$*

$$(v,\ x,\ y,\ v,\ \ldots) \sim (v,\ z,\ w,\ v,\ \ldots) \Rightarrow (x,\ y,\ v,\ \ldots) \succcurlyeq (z,\ w,\ v,\ \ldots).$$

Axioma 12. *(Consistência nos trade-offs) Para todos $x,\ y,\ z,\ w,\ v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4 \in X$,*

(i) Se $(y,\ v_2) \succcurlyeq (x,\ v_1)$, $(z,\ v_1) \succcurlyeq (w,\ v_2)$ e $(v_3,\ x) \sim (v_4,\ y)$, então $(v_3,\ z) \succcurlyeq (v_4,\ w)$; e

(ii) Se $(v_2,\ y) \succcurlyeq (v_1,\ x)$, $(v_1,\ z) \succcurlyeq (v_2,\ w)$ e $(x,\ v_3) \sim (y,\ v_4)$, então $(z,\ v_3) \succcurlyeq (w,\ v_4)$.

O enunciado do teorema de representação desta seção e sua demonstração mostram claramente em que parte da teoria entra cada axioma, além disso, a demonstração deste resultado elucida exatamente a necessidade e clareza dos axiomas:

Teorema 4. *A preferência $\succcurlyeq$ satisfaz os Axiomas 1, 5, 6, 7, 8, 9, 10 e 12 se, e somente se, $\exists\ u : X \to \mathbb{R}$ não constante e contínua, $\beta > 0$ e $\delta \in (0,1)$ tais que $\succcurlyeq$ é representada por uma função da forma 3.3.*

Além disso, $\succcurlyeq$ satisfaz o Axioma 10 se, e somente se, $\beta \leq 1$, ou seja, a preferência tem exatamente a representação por desconto quase-hiperbólico como apresentado anteriormente.

Demonstração. Esta demonstração também é apresentada por Olea e Strzalecki (2014) e é sumarizada aqui. Tomando determinadas cestas de consumo, é possível demonstrar por um argumento de contradição que a representação 3.3 satisfaz o axioma de consistência nos trade-offs, ou seja o Axioma 12 é condição necessária para 3.3.

Naturalmente, agora é necessário provar a suficiência. Primeiramente, define-se a relação $\succcurlyeq^*$ sobre X^2 da seguinte maneira:

$$(y,\ z) \succcurlyeq^* (x,\ w) \iff \exists\, e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4 \in X \text{ tal que}$$
$$(y, e_2) \succcurlyeq (x, e_1) \text{ e } (z, e_1) \succcurlyeq (w, e_2) \text{ e } (e_3, x) \sim (e_4, y).$$

Considerando $\succcurlyeq^*$ é possível provar que essa relação é representável pela expressão $(y,\ z) \succcurlyeq^* (x,\ w) \iff u(y) + u(z) \geq u(x) + u(w)$, que é uma representação aditiva. Por sua vez, $\succcurlyeq^*$ também pode ser representada em termos de $v(x)$ por meio da representação aditiva $(y,\ z) \succcurlyeq^* (x,\ w) \iff v(y) + v(z) \geq v(x) + v(w)$.

Uma vez que $\succcurlyeq^*$ possui duas diferentes representações aditivas conclui-se que $\exists\, \beta > 0$ tal que $\forall\, x \in X$, $v(x) = \beta u(x)$. Resta então demonstrar que $\beta \leq 1$. Tomando $x,\ z \in X$ tais que $u(x) > u(z)$ e $y,\ w \in X$ de modo que $u(x) + \delta u(y) = u(z) + \delta u(w)$, tem-se pelo axioma de viés do presente que $u(x) + \beta\delta u(y) \geq u(z) + \beta\delta u(w)$. Manipulando as expressões:

$$u(x) - u(z) = \delta(u(w) - u(y)) > 0 \tag{3.9}$$

$$u(x) - u(z) \geq \beta\delta(u(w) - u(y)) \tag{3.10}$$

Então, substituindo 3.9 em 3.10 é imediato concluir que $\beta \leq 1$. □

Apesar de o Teorema 3 proporcionar um modelo mais geral, o mesmo não permite uma abordagem direta e objetiva do viés do presente e é por isso que é realizada a delimitação que leva até o Teorema 4. Com esse teorema, completa-se de maneira satisfatória a modelagem do viés do presente por meio do modelo de desconto quase-hiperbólico.

4 Conclusão

As decisões humanas são o elemento de estudo central da ciência econômica, porém alguns aspectos comportamentais e psicológicos presentes nas decisões das pessoas assumiram um papel de maior importância apenas com a formação e consolidação da Economia Comportamental (THALER, 2016). Diversas teorias que tomaram conta do *mainstream* supunham agentes como o *homo economicus*, figura que se demonstrou essencial para a formulação de modelos do comportamento humano e de fenômenos de mercado, uma vez que sob diversos contextos simplificava a modelagem. No entanto, foram se tornando aparentes as limitações destes modelos em sua capacidade descritiva e preditiva, questões que foram amplamente documentadas por trabalhos empíricos cujo foco era a análise das suposições consideradas na modelagem. Foram ganhando espaço os trabalhos e modelos que incorporavam os viéses e fenômenos psicológicos que invalidavam as suposições dos modelos de tomada de decisão vigentes até então.

Seguindo essa dinâmica de evolução dos modelos, o presente trabalho apresenta uma discussão da modelagem da escolha intertemporal, começando pela teoria de desconto geométrico e seguindo para a teoria de desconto quase-hiperbólico. O foco é, além de explorar as formas funcionais apresentadas e sua relação com o comportamento do tomador de decisão, descrever e discutir os axiomas que levam ao respectivos teoremas de representação. Desse modo, é possível explorar aspectos importantes de modelagem e de comportamento humano, seguindo o processo de axiomatização, que assume um papel essencial para a Teoria da Decisão.

Por meio de uma análise metodológica da axiomatização, são expostos os pontos que justificam o seu sucesso na ciência econômica (GILBOA et al., 2019), com destaque para a conexão com questões presumivelmente observáveis e para falseabilidade do modelo, a qual está diretamente ligada com o cientificismo que se preza em uma teoria.

O viés do presente assume papel central neste trabalho ao ser um fenômeno que viola as suposições do modelo de desconto geométrico, sendo muito presente nas decisões humanas e possuindo incontestáveis evidências empíricas. Esta falha de consistência temporal é descrita em termos práticos e em seguida modelada dentro do escopo da teoria de escolha intertemporal, por meio do MDQH. Tal modelo, ao ser uma generalização do MDG, compartilha de diversos elementos comuns com este, mas a diferenciação de ambos é o que permite notar as nuances relacionadas com o viés do presente e com inconsistência temporal.

O desenvolvimento de teorias de escolha intertemporal mais gerais, capazes de abordar viéses e outras questões comportamentais, além de possuir relevância prática, é importante para a economia como ciência. A teoria de desconto quase-hiperbólico proporciona um melhor entendimento do processo de escolha humano e como o viés do presente o afeta, podendo assim formular previsões baseadas em premissas que estejam mais de acordo com questões observáveis.

Além disso, a escolha intertemporal é usada em diversas subáreas da macroeconomia e da microeconomia, como por exemplo os modelos de equilíbrio geral. Nestes, é necessário supor uma estrutura de tomada de decisão para os agentes, desse modo ao considerar agentes que descontam o futuro de maneira quase-hiperbólica, é possível obter modelos com suposições mais próximas das questões observáveis com suporte empírico.

É importante destacar as questões e aspectos que permitem o avanço da teoria em estudos futuros, tanto em Teoria da Decisão, quanto em outras áreas. Primeiramente, importantes progressos foram realizados no sentido de incorporar incerteza de modo geral nos modelos de escolha intertemporal, como os trabalhos de Bastianello e Faro (2020) e Kochov (2015). Mais avanços podem ser feitos no sentido de incorporar viéses e outros problemas descritivos documentados pela Economia Comportamental nestes modelos de incerteza, trazendo mais generalidade para as abordagens e utilizando o processo de axiomatização para balizar a formação da teoria, como realizado em Pennesi (2015).

Por último, nas áreas cujos modelos possuem agentes que tomam decisões intertemporais, como equilíbrio geral, jogos dinâmicos e escolha coletiva, houve um considerável avanço no sentido de abordar preferências hiperbólicas e quase-hiperbólicas, inclusive em *frameworks* com elementos estocásticos. Em Nighswander (2018), são analisadas as implicações da presença de viéses comportamentais em modelos de equilíbrio geral sobre a desigualdade de renda e a formação de capital humano. Nessa linha, futuros trabalhos podem trazer contribuições importantes ao abordar diferentes contextos em que escolha intertemporal com desconto quase-hiperbólico pode ser utilizada e suas respectivas implicações.

Referências

ARAUJO, A. Lack of pareto optimal allocations in economies with infinitely many commodities: The need for impatience. **Econometrica**, v. 53, n. 2, p. 455–61, 1985.

AUGENBLICK, N.; NIEDERLE, M.; SPRENGER, C. Working over time: Dynamic inconsistency in real effort tasks. **The Quarterly Journal of Economics**, v. 130, n. 3, p. 1067–1115, 2015.

BASTIANELLO, L.; FARO, J. H. Time discounting under uncertainty. 2020.

BLEICHRODT, H.; ROHDE, K. I. M.; WAKKER, P. P. Koopmans constant discounting for intertemporal choice: A simplification and a generalization. **Journal of Mathematical Psychology**, v. 52, p. 341–347, 2008.

BOLAND, L.; GRUBEL, H. On the efficient use of mathematics in economics: Some theory, facts and results of an opinion survey. **Kyklos**, v. 39, p. 419–42, 1986.

CASTRO, L. de; FARO, J. H. **Introdução à teoria da escolha**. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

COLLER, M.; WILLIAMS, M. B. Eliciting individual discount rates. **Experimental Economics**, v. 2, p. 107–127, 1999.

DEKEL, E.; LIPMAN, B. L. How (not) to do decision theory. **Annual Review of Economics**, v. 2, p. 257–282, 2010.

DRUGEON, J.-P.; WIGNIOLLE, B. On markovian collective choice with heterogeneous quasi-hyperbolic discounting. **Economic Theory, Research article**, 2020.

GILBOA, I. et al. What are axiomatizations good for? **Theory and Decision**, v. 86 (3-4), p. 339–359, 2019.

GILBOA, I.; SCHMEIDLER, D. Maxmin expected utility with non-unique prior. **Journal of Mathematical Economics**, v. 18, n. 2, p. 141–153, 1989.

GORMAN, W. M. The structure of utility functions. **Review of Economic Studies**, v. 35, n. 4, p. 367–390, 1968.

HARRIS, C.; LAIBSON, D. Dynamic choices of hyperbolic consumers. **Econometrica**, v. 69, n. 4, p. 935–957, 2001.

JUDD, K. L. Existence, uniqueness, and computational theory for time consistent equilibria: A hyperbolic discounting example. **Hoover Institution, Stanford**, 2004.

KOCHOV, A. Time and no lotteries: An axiomatization of maxmin expected utility. **Econometrica**, v. 83, p. 239–262, 2015.

KOOPMANS, T. C. Stationary ordinal utility and impatience. **Econometrica**, v. 28, p. 287–309, 1960.

KOOPMANS, T. C. Representation of preference orderings over time. In: MCGUIRE, C. B.; RADNER, R. (Org.). **Decision and Organization**. Amsterdam: North-Holland, 1972.

KREPS, D. M. **Notes On The Theory Of Choice**. [S.l.]: Westview Press, 1988. 224 p.

LAIBSON, D. Golden eggs and hyperbolic discounting. **The Quarterly Journal of Economics**, v. 112 (2), p. 443–477, 1997.

LOEWENSTEIN, G.; PRELEC, D. Anomalies in intertemporal choice: Evidence and an interpretation. **The Quarterly Journal of Economics**, v. 107, n. 2, p. 573–597, 1992.

MAS-COLELL, A.; WHINSTON, M. D.; GREEN, J. R. **Microeconomic Theory**. New York: Oxford University Press, 1995. 1008 p.

NIGHSWANDER, T. **Behavioral Biases in General Equilibrium: Implications for Wealth Inequality and Human Capital Formation**. 146 p. Tese (PhD in Economics) — Department of Economics - Graduate School of the University of Oregon, Oregon, 2018.

OLEA, J. L. M.; STRZALECKI, T. Axiomatization and measurement of quasi-hyperbolic discounting. **The Quarterly Journal of Economics**, v. 129 (3), p. 1449–1499, 2014.

PENNESI, D. Uncertain discount and hyperbolic preferences. **THEMA (THéorie Economique, Modélisation et Applications), Université de Cergy-Pontoise - Working papers**, n. 2, 2015.

SAMUELSON, P. A. A note on measurement of utility. **Review of Economic Studies**, v. 4, p. 155–161, 1937.

SAVAGE, L. J. **Microeconomic Theory**. 2. ed. New York: Dover Publications, 1972. 310 p.

SPRENGER, C. Judging experimental evidence on dynamic inconsistency. **American Economic Review**, v. 105(5), p. 280–285, 2015.

STROTZ, R. Myopia and inconsistency in dynamic utility maximization. **Review of Economic Studies**, v. 23, p. 165–180, 1956.

SYDSAETER, K.; HAMMOND, P. **Mathematics for economic analysis**. 1. ed. New York: Pearson, 1994. 1000 p.

THALER, R. Some empirical evidence on dynamic inconsistency. **Economics Letters**, v. 8, p. 201–207, 1981.

THALER, R. **Misbehaving**: The making of behavioral economics. 1. ed. New York: W. W. Norton & Company, 2016. 432 p.

VIND, K. Note on "the structure of utility functions". **Review of Economic Studies**, v. 38, n. 1, p. 113–113, 1971.

WAKKER, P. P. **Additive Representations of Preferences**: A new foundation of decision analysis. 1. ed. [S.l.]: Springer Netherlands, 1989. 194 p. (Theory and Decision Library C 4).