INSPER – INSTITUTO DE ENSINO E PESQUISA

MESTRADO EM ECONOMIA

RAFAEL VOIVODIC RIBEIRO LEITE

A OTIMIZAÇÃO DA COMPOSIÇÃO DA DÍVIDA PÚBLICA EM TERMOS DO BEM ESTAR DA SOCIEDADE

SÃO PAULO

2020

RAFAEL VOIVODIC RIBEIRO LEITE

A OTIMIZAÇÃO DA COMPOSIÇÃO DA DÍVIDA PÚBLICA EM TERMOS DO BEM ESTAR DA SOCIEDADE

Exame de qualificação do Mestrado Profissional em Economia do Insper – Instituto de Ensino e Pesquisa; área de concentração: Macroeconomia

Orientadora: Prof. Dra. Juliana Inhasz

SÃO PAULO

2020

Leite, Rafael Voivodic Ribeiro;

A otimização da composição da dívida pública em termos do bem estar da sociedade – São Paulo, 2020

Exame de Qualificação do Mestrado Profissional em Economia do Insper – Instituto de Ensino e Pesquisa. Orientador: Prof. Dra. Juliana Inhasz

Palavras chaves: 1. Dívida Pública 2. Composição 3. Macroeconomia

Rafael Voivodic Ribeiro Leite

A OTIMIZAÇÃO DA COMPOSIÇÃO DA DÍVIDA PÚBLICA EM TERMOS DO BEM ESTAR DA SOCIEDADE

Exame de qualificação do Mestrado Profissional em Economia do Insper – Instituto de Ensino e Pesquisa; área de concentração: Macroeconomia

Orientadora: Prof. Dra. Juliana Inhasz

DATA DE APROVAÇÃO: 02/02/2021

BANCA EXAMNADORA

_____

Prof. Dra. Juliana Inhasz (Orientadora)

Instituição: Insper Instituto de Ensino e Pesquisa

_____

Prof. Dr. Paulo Sérgio Oliveira Ribeiro

Instituição: Insper Instituto de Ensino e Pesquisa

_____

Prof. Dr. Márcio Garcia

Instituição: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

AGRADECIMENTOS

Antes de tudo, gostaria de agradecer a minha orientadora Juliana Inhasz pela oportunidade e o prazer de ter sido seu orientando nesses últimos dois anos do mestrado em economia do Insper. Juliana, além de ser uma das referências nacionais no assunto aqui abordado, e foi grande responsável por toda a motivação da escolha desse tema. Agradeço também ao Professor Paulo Sérgio Oliveira Ribeiro pelos ensinamentos.

Agradeço também a minha família, que por todo esse tempo me auxiliou e me apoiou nos momentos mais difíceis, em especial meus pais Maria e Ricardo. Agradeço também pelo todo apoio de Beatriz, Danilo, Carolina, Felipe, Juliana e Marcelo.

Gostaria de agradecer as pessoas que fizeram parte de toda essa trajetória de 7 anos dentro do Insper, do período de graduação e do mestrado, ambos em economia. Hoje, posso dizer que mais uma etapa da vida acadêmica está se encerrando, e muito contente, por ter escolhido novamente o Insper para a realização dessa etapa. Agradeço também a todos da Atlética Insper, por sempre estar presente em todos esses anos.

Por último, gostaria de agradecer todo o apoio dos colegas de classe, Leandro Omena, Bruno de Castro, Diego Velloso, Paulo Cardoso, e especialmente, Guilherme Godoy por todo apoio e parceria nesse período do mestrado no Insper. Além disso, gostaria de agradecer por todo apoio dos amigos Daniela, Ana, Florent, Leonardo, Gustavo, Marina, Breno, Nicolas, João, Daniel, Gabriel, Mario, Thomas, Viccent, Giulio, André, Jorge, Luisa, Fernanda e Julio.

RESUMO

O endividamento do setor público pode ser considerado um mecanismo essencial para a distribuição intertemporal ótima das políticas públicas. Neste trabalho foi realizado uma análise da otimização da dívida pública federal em termos de sua composição ótima, sendo possível estudar composição ótima em relação aos termos de custos financeiros e os custos em termos do bem estar social. Sendo assim, este trabalho busca estudar se existe ou não uma convergência, através da composição ótima de instrumentos da dívida, relacionado a minimização dos custos financeiros e a maximização do bem estar da sociedade em termos do endividamento público. O modelo trabalhado neste trabalho tem como ponto de partida o modelo de suavização da tributação, exposto anteriormente por Ilan Goldfajn (1998), Cysne (2007) e Juliana Inhasz (2013). Nos resultados obtidos, pode-se observar que existe, através do modelo de suavização da tributação, uma predominância e preferência para a parcela de instrumentos da dívida pós fixada. Por último, os resultados estudados corroboram com os trade-off da dívida pública observados pelo gestor da dívida pública.

Palavras chaves: Dívida Pública, otimização, inflação e taxa de câmbio

ABSTRACT

Public sector indebtedness can be considered an essential mechanism for the optimal intertemporal distribution of public policies. In this work, an analysis of the optimization of the federal public debt in terms of its optimal composition was carried out, being possible to study an optimal composition in terms of financial costs and costs in terms of social welfare. Therefore, this work seeks to study whether or not there is a convergence, through the optimal composition of debt instruments, related to the minimization of financial costs and the maximization of society's well-being in terms of public indebtedness. The model worked on in this work is based on the tax smoothing model, previously exposed by Ilan Goldfajn (1998), Cysne (2007) and Juliana Inhasz (2013). In the results obtained, it can be seen that, through the tax smoothing model, there is a predominance and preference for the portion of post-fixed debt instruments. Finally, the results studied corroborate the public debt trade-off observed by the public debt manager.

Key words: Public debt, optimization, inflation and exchange rate

SUMÁRIO

Lista de Tabelas e Gráficos.....10

1. Introdução e Motivação 11

1.1 Composição atual da Dívida.....13

2. Revisão de literatura.....16

2.1 História e trajetória da dívida pública do Brasil.....16

2.2 Conceito de sustentabilidade da dívida.....20

2.3 *Benchmark* para a dívida pública.....22

2.4 Suavização da tributação como modelo da dívida.....24

3. Metodologia.....28

3.1 Resultados esperados.....38

4. Dados.....40

5. Metodologia Empírica.....42

5.1 Metodologia GARCH.....45

6. Resultados.....50

7. Conclusão.....57

8. Referências de literatura.....60

ANEXOS.....62

TABELAS E GRÁFICOS

Gráfico 1 - Histórico da composição do endividamento público por instrumento da dívida nacional.....14

Tabela 1 – Composição ótima da dívida nacional – Modelo Tesouro Nacional.....15

Gráfico 2 – Aumento da parcela de Letras Financeiras do Tesouro na DPF.....15

Gráfico 3 – Variação Dívida Interna e externa Bruta (1980 a 2019).....18

Gráfico 4 – Endividamento Bruto (Dívida bruta/PIB) – 2001 a 2020.....19

Gráfico 5 – Histórico de prazos de vencimentos da dívida nacional.....34

Tabela 2 – Modelos de otimização da composição da dívida visando maximização do bem estar social.....35

Tabela 3 – Resultados esperados das variâncias e covariâncias do modelo.....38

Tabela 4 – Resultados Testes para estacionariedade.....44

Tabela 5 – VAR *lag order Selection Criteria*.....45

Gráfico 6 – Otimização da dívida pública com três instrumentos.....51

Gráfico 7 – Otimização da DPF com três instrumentos – Parcela nominal.....52

Gráfico 8 – Otimização da DPF com três instrumentos – Parcela Cambial.....53

Gráfico 9 – Otimização da DPF com três instrumentos – Parcela Pós Fixada.....54

Tabela 6 – Sinais esperados dos *trade-off* da dívida pública nacional.....55

Tabela 7 – Modelo de suavização da tributação. Regressão OLS.....58

1. Introdução e Motivação

O conceito de dívida, de uma forma genérica, é o total de obrigações de uma entidade, seja essa pública ou privada, criada pela diferença entre despesas e receitas. Desta forma, existem duas perspectivas principais para análise de uma dívida, a bruta ou a líquida, na qual a primeira é representada apenas pelos passivos da entidade, enquanto a segunda possui o desconto dos ativos. O propósito final desse trabalho é analisar algumas questões da composição da dívida pública do governo brasileiro, um tema que ganha cada vez mais importância no cenário econômico atual.

O endividamento do setor público pode ser considerado um mecanismo essencial para a distribuição intertemporal ótima das políticas públicas. Ou seja, o endividamento público permite que a provisão de investimentos, gastos obrigatórios e despesas, possam ser temporariamente dissociadas da arrecadação de recursos, sendo essa na maior parte das vezes vinculada a tributação de pessoas físicas e jurídicas.

Quando o assunto do endividamento é tratado pelos economistas, o que se busca em relação a esse tema é a sustentabilidade, nos âmbitos de curto, médio e longo prazo. Portanto, é esperado que o emissor, nesse caso o governo brasileiro, adote políticas aceitáveis com a finalidade de cumprir os pagamentos das obrigatoriedades honradas. Em outras palavras, evitar um colapso da dívida nacional, assumindo a condição de não-pagador para investidores e outros países.

Dentro dessa ideia de sustentabilidade, é possível estudar o endividamento público em relação aos custos financeiros e os custos em termos do bem estar social, dada a composição atual da dívida pública nacional. Sendo assim, este trabalho busca estudar se existe ou não uma convergência, através da composição ótima de instrumentos da dívida, relacionado a minimização dos custos financeiros e a maximização do bem estar da sociedade em termos do endividamento público.

O principal objetivo da gestão da dívida pública é garantir que as necessidades de financiamento do governo e as suas obrigações de pagamento sejam satisfeitas com o menor custo possível no curto, médio e longo prazo, consistente com um grau de risco prudente. A gestão de risco prudente para evitar estruturas e estratégias de

dívida perigosas, incluindo financiamento monetário da dívida do governo, é crucial, dadas as graves consequências macroeconômicas do default da dívida soberana e a magnitude das perdas de produção decorrentes. Esses custos incluem insolvências comerciais e bancárias, bem como a redução da credibilidade de longo prazo e da capacidade do governo de mobilizar poupança interna e externa. Assim, os governos devem tentar minimizar os custos esperados do serviço da dívida e o custo de manutenção de ativos líquidos, sujeitos a um nível de risco aceitável, em um horizonte de médio a longo prazo.

Desta maneira, serão utilizados dois trabalhos principais para a estruturação da análise deste *trade-off* entre custos financeiros e bem estar social. O primeiro, o qual é o modelo atual utilizado pelo Tesouro Nacional (2011) para definição da composição da dívida, tem um enfoque de minimizar os custos financeiros do endividamento público, O modelo de *benchmark* é baseado na aplicação de métodos de simulações estocásticas, com o propósito de se derivar uma fronteira eficiente de composições da dívida, que expresse potenciais *trade-offs* entre custos e riscos.

Em outra perspectiva, Goldfajn (1998,2000) e Cysne (2007) estudam a composição ótima do endividamento público em termos da suavização da tributação, usado por Barro (1987) e Bohn (1990). Este trabalho, analisa essa composição em um formato que minimize os custos do bem estar da sociedade, dada a composição e a variação dos impostos postulados a sociedade. A literatura sobre taxação ótima sugere que o governo devesse estruturar sua dívida de modo a estabilizar os impostos ao longo do tempo e sob diferentes estados da natureza.

É de extrema relevância pontuar que a base teórica para o estudo do gerenciamento da Dívida Pública está amparada na Equivalência Ricardiana. Dentro desse princípio econômico, sob certas condições, o gerenciamento ativo da Dívida Pública seria irrelevante. Ou seja, se a Equivalência Ricardiana é válida, o papel desempenhado pela Dívida Pública, bem como sua composição ótima, passa a ser irrelevantes. A discussão sobre a importância do gerenciamento ativo da Dívida Pública, bem como a forma como ele deve ser realizado baseia-se no relaxamento das hipóteses que dão sustentabilidade à Equivalência Ricardiana. Relaxadas tais hipóteses, constata-se que a composição da dívida pública é importante não só pelas razões de minimização do custo esperado do serviço da dívida, mas também por

razões de custos sociais, vinculados a tributação da população, de credibilidade e sinalização, de minimização da volatilidade orçamentária e aumento da liquidez ou da informação disponível no mercado.

Portanto, este trabalho estuda a composição ótima do endividamento público. O modelo base a ser usado aqui terá como ponto de partida o modelo clássico de suavização da tributação, usado por Barro (1997) e Goldfajn (1998). Desta maneira, o objetivo final deste trabalho será verificar se a composição ótima da dívida pública brasileira se assemelha com o modelo de *benchmark* utilizado pelo Tesouro Nacional brasileiro, na estipulação dos parâmetros desta composição. Além disso, por necessidade da construção do modelo, também será analisado a contribuição dos indicadores macroeconômicos e suas correlações e covariâncias, como forma de justificativa para a alteração das proporções de endividamento público.

O trabalho seguirá a seguinte estrutura, sendo na primeira seção foi realizada a introdução, seguida pela subseção da composição atual da dívida pública federal brasileira, comparada ao modelo de longo prazo da Secretaria do Tesouro Nacional (STN) atualmente[1]. Na segunda seção será realizada uma revisão de literatura referente ao tema e uma análise da trajetória histórica da dívida nacional. Na seção 3, 4 e 5 uma explicação referente a metodologia usada junto a análise dos dados a serem usados neste modelo. Na seção 6 será realizada a análise empírica dos resultados e a construção e explicação do modelo de suavização da tributação. E por último, na seção 7, será feita a conclusão do trabalho.

1.1 Composição atual da dívida

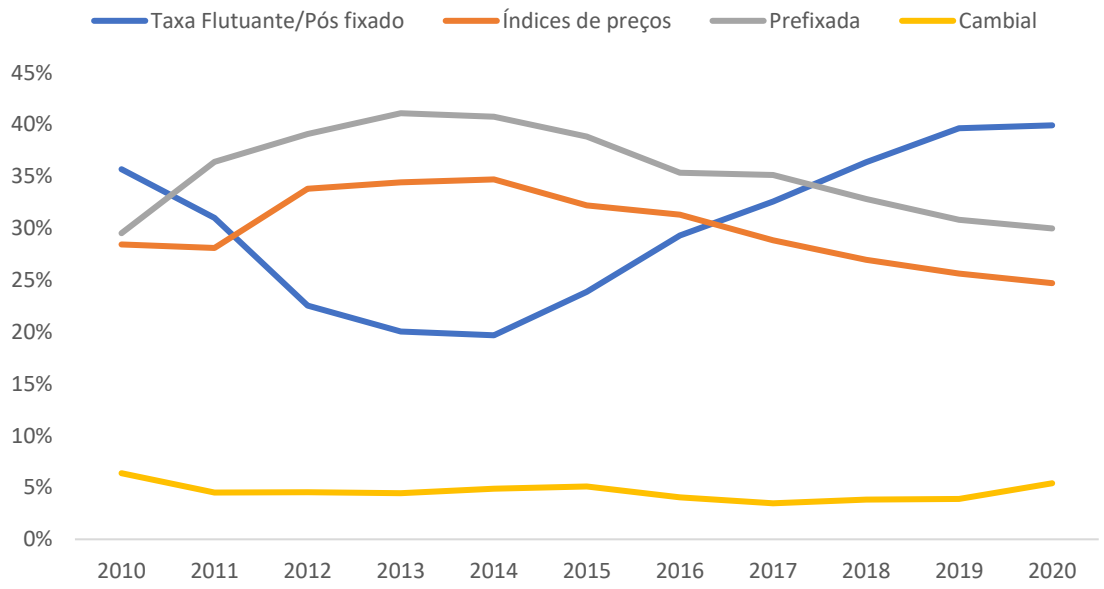
Dentro da concepção do planejamento da composição da dívida pública, são considerados uma série de cenários macroeconômicos, afim de realizar um estudo da composição ótima desta. Dado isso, a composição da dívida varia de acordo com alterações das variáveis macroeconômicas relevantes, como por exemplo, inflação, taxa de juros básica, câmbio, percentual atual da dívida. Ainda, o próprio Tesouro Nacional (2011) corrobora a importância da sustentação dos pilares das políticas

[1] A composição do modelo atual da dívida pública é adquirida anualmente no Plano de Financiamento Anual do governo Federal, sendo realizado pela Secretaria do Tesouro Nacional. Esse especificamente foi retirado do PAF de 2020. Fonte: https://sisweb.tesouro.gov.br/apex/f?p=2501:9:::::9:P9_ID_PUBLICACAO:31541

econômicos iniciadas no final do século, como regimes de meta de inflação e câmbio flutuante.

No gráfico 1, é possível analisar o histórico, de 2010 a set/2020, a composição da dívida nacional, divido por quatro tipos de instrumentos da dívida: flutuante e Pós fixados, Índices de preços, prefixados e cambial[2]. O que se pode analisar é que a composição da dívida por instrumentos de taxa flutuante/pós fixado é de aproximadamente 40,0% da Dívida Pública Federal (DPF), 30% por instrumentos de taxa prefixado, 25% de instrumentos de taxa ligados a índices de preços e 5% de instrumentos de taxas cambiais.

Gráfico 1 – Histórico da composição do endividamento público por instrumento da dívida nacional



Fonte: Bacen – Elaboração do próprio autor

Além disso, com o auxílio do quadro 1, é possível analisar que a dívida atual não está correspondente a composição ótima pressuposta pelo modelo de *benchmark*. É provável que o descasamento de questões primárias, entre custos e receitas, de 2014 em 2020 ocasionou esse descolamento da composição da dívida e do modelo do Tesouro Nacional. No entanto, no período de 2012 a 2014, é observável que o modelo e composição tinham percentuais por indicadores muito próximos.

[2] No decorrer do texto, todos os instrumentos serão explicados com mais detalhes na forma de cálculo de rendimentos e exemplos de títulos no mercado atual da dívida nacional.

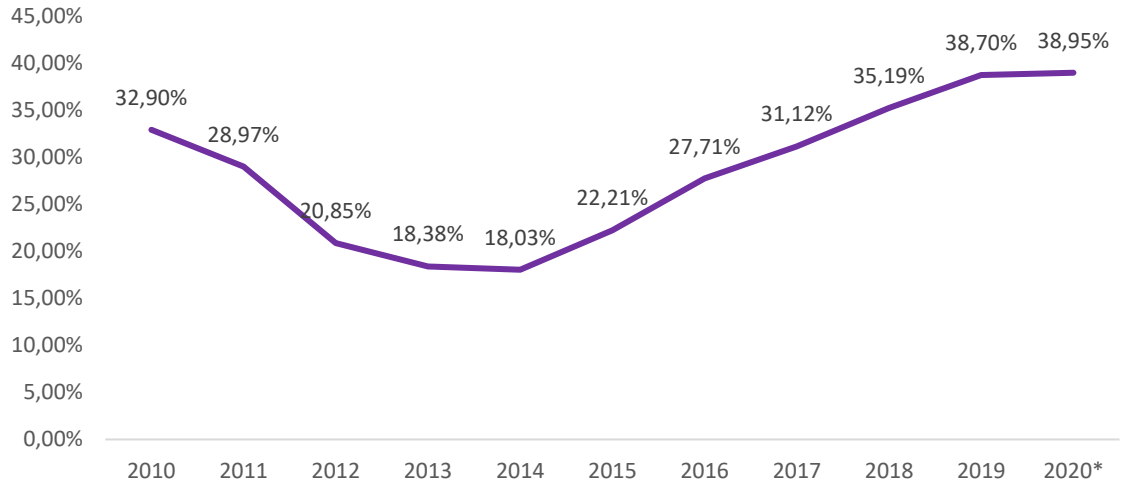
Tabela 1 – Composição ótima da dívida nacional – Modelo Tesouro Nacional

Indicadores	Limites de Longo Prazo	
Composição	**Referência (%)**	**Intervalo/Limites**
Prefixados	40,0	+/- 2,0
Índices de preços	35,0	+/- 2,0
Flutuantes	20,0	+/- 2,0
Câmbio	5,0	+/- 2,0
Estrutura de vencimentos		
% vencimento em menos de 12 meses	20,0	+/- 2,0
Prazo Médio[3]	5,5	+/- 0,5

Fonte: Plano Anual de Financiamento do governo nacional

O que se coloca em atenção nesse aspecto, é a importância da administração da dívida pública, de forma coerente e sustentável no longo prazo. Por exemplo, dos dados mais recentes disponíveis da composição atual da dívida, a composição total da Letras Financeiras do Tesouro em agosto de 2020 chega próximo a 38,95% do total da dívida, um aumento de 116% de dezembro de 2014 até agora. O fato dessa saturação de títulos de Letras Financeiras do Tesouro (LFT) no mercado, por exemplo, foi um dos *triggers* para o aumento dos spreads desejados pelos investidores da dívida, para em momento conturbado economicamente, financiarem o país a taxas mais longas.

Gráfico 2 – Aumento da parcela de Letras Financeiras do Tesouro na DPF



Fonte: Tesouro Nacional. Elaboração do próprio autor

[3] Prazo médio: O cálculo do prazo médio é uma média ponderada dos prazos pelos valores.

Ao analisar a situação da dívida bruta e da composição da dívida nacional, um importante tema a ser mencionado é a questão das operações compromissadas. A carteira das compromissadas do Banco Central soma quase 30% da dívida interna. Estas operações são transações de compra ou venda de um título, com compromisso de realizar a operação contrária no vencimento. O objetivo desse instrumento é ajustar a liquidez da economia com o intuito de fixar a taxa de juros (SELIC) na meta. Além disso, as operações compromissadas entram no cálculo da dívida pública, o que muitas vezes não é observado em outros países.

Por exemplo, em um ano com a dificuldades enfrentadas pela pandemia da COVID-19, e a necessidade de gastos emergenciais ligados ao combate do vírus, aumentaram a base de operações compromissadas, chegando a valores próximos de R$ 1.600 Bilhões de reais em agosto de 2020, sendo que este aumento chegou perto da casa dos 70% no ano.

2. Revisão de Literatura

2.1 – História e trajetória da dívida pública do Brasil

Pode-se dizer que o início de um mercado eficiente de títulos públicos, no Brasil, foi estabelecido em 1965 no governo de Humberto de Alencar Castelo Branco, através do programa Plano de Ação Econômica do Governo (PAEG). Interessante observar que uma das finalidades desse programa econômico era a obtenção de recursos adicionais para a cobertura dos déficits da União e a criação de um mercado voluntário para os títulos públicos (Pedras, 2009). Dentro desse plano, ainda houve a criação dos títulos indexados à variação de preços nominais, o qual seria o início das possibilidades de investimento afim de manter o poder de aquisitivo dos detentores desses títulos, frente os desafios inflacionários. Esses títulos ficaram conhecidos como Obrigação Reajustável do Tesouro Nacional (ORTN).

Além disso, foi o PAEG que abriu novas portas pro endividamento externo do Brasil. Este, até então, era uma atividade utilizada pela União, porém ainda de uma forma pouco estruturada. O Programa de Ação Econômica do Governo serviu, desta forma, também como um método de reestruturação de crédito do país no exterior.

Anos depois, em 1970, foi criado outro título pelo Tesouro Nacional, agora não mais fixado a variação do nível de preços, e sim atrelada a política monetária do Banco Central Brasileiro, as Letras do Tesouro Nacional (LTN). Iniciou-se então, emissões de títulos prefixados. Nos primeiros anos de sua existência, a composição da dívida brasileira ganhou maior relevância na parcela atrelada aos títulos prefixados, dado que o período de 1970 a 1974 foram anos de forte crescimento da economia local e de inflação baixas.

Os choques dos preços do petróleo de 1974 a 1979, e com uma economia extremamente dependente dessa matéria prima, os indicadores inflacionários nos anos seguintes a 1974, e por quase toda década de 1980, voltaram a explodir, e a busca dos investidores por títulos indexados à variação de preços também voltou. As ORTNs, voltaram a ter maior relevância, e consequentemente, no cenário da dívida local ganhou-se valores mais expressivos. Por exemplo, em 1983, as ORTNs voltam a representar aproximadamente 96% da dívida local (Pedras, 1996).

Um fato importante, relacionado ao tema, foi que durante a década de 1980, o governo brasileiro percebeu a necessidade do encurtamento da maturidade dos títulos da dívida do governo. Nesse momento, o governo iniciou uma estrutura de dívida mais robusta, dado a necessidade de financiamento de curto prazo existente no período. E assim, as ORTNs com prazos menores, passaram a representar a real variação dos preços.

O final da década de 1980 e boa parte da de 1990 foram marcados por um período de forte deterioração fiscal e tentativas de planos de estabilização da economia brasileira. Diante disso, foi decretado em 1987 que a elevação da dívida pública apenas poderia ocorrer para assegurar o Orçamento Geral da União (OGU), com a necessidade de uma aprovação do âmbito legislativo. O intuito, portanto, seria dificultar alguns gastos exorbitantes do governo, e controlar a dívida do país até então.

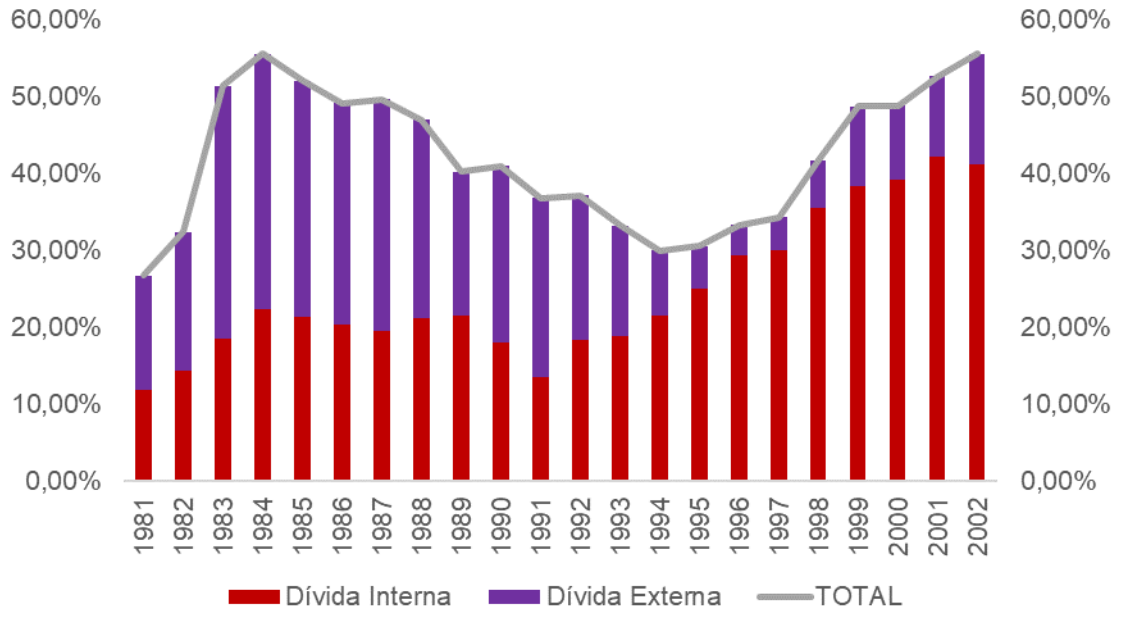
Com uma variação dos preços nominais batendo níveis históricos, e o Brasil vivendo um período de hiperinflação, com crescimentos negativos do produto, as tentativas de controle do ambiente econômico e da questão do endividamento público foram dos mais diversos. Em 1994, com o lançamento de mais um plano econômico, o Plano Real, pretendia-se reestabelecer a questão inflacionário brasileira a um novo equilíbrio. Com o sucesso do plano, e a estabilização de uma maior previsibilidade de fundamentos macroeconômicos, os investidores e agentes voltaram a analisar o aspecto da dívida e das possibilidades de compra de títulos públicos de uma forma mais racional.

Em relação as escolhas do Tesouro Nacional, no objetivo desse período destacou-se ao alongamento da maturidade dos títulos da dívida e a alteração da composição da dívida nacional. Sobre essa segunda característica da dívida, de 1994 a 1996, a parcela prefixada da dívida passou de 1% a 26% (ANDIMA, 2003).

Do Gráfico 3, o que se pode observar é que a relação dívida/PIB líquida local ganhou patamares muito mais elevados na década de 1980, ganhando cada vez mais relevância, dado o início do momento econômico conturbado vivido pelo Brasil. É no início dos anos de 1990, que essa diferença de razão entre o endividamento interno e externo começa a diminuir; no entanto, é possível ainda analisar que após o período no Plano Real, voltou a existir uma aceleração do patamar das dívidas da União, Estados e Municípios. Algo que se agravaria ainda mais, no período seguinte, tendo

o foco econômico do país uma política fiscal expansionista, visando recuperação do produto local.

Gráfico 3 – Variação Dívida Interna e externa Bruta (1980 a 2019)



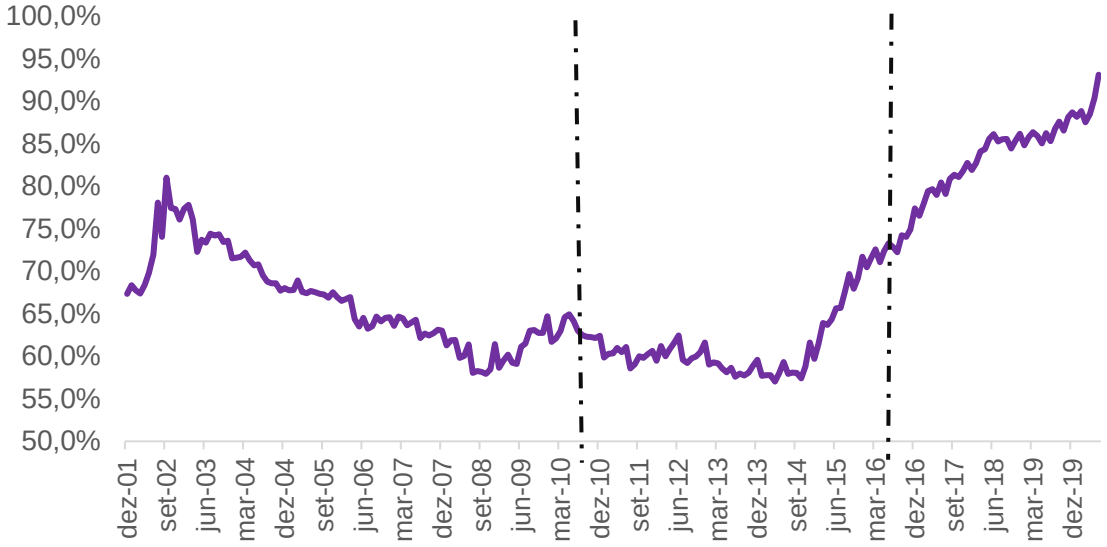
Fonte: BACEN – Elaboração do próprio autor

A partir de novembro de 1999, o Tesouro Nacional retomou a adoção de medidas voltadas para o alongamento do prazo da dívida pública federal e para melhorar a composição da dívida. O objetivo era de se evitar que esta entrasse em uma rota explosiva e, também, de aumentar a credibilidade na condução da política econômica. Desde a adoção do regime de metas para inflação, em 1999, a autoridade fiscal tenta manter a dívida pública baixa e sustentável e, assim, melhorar o desempenho da economia no médio e longo prazo.

Os gastos públicos nacionais tomaram um padrão elevados no período de 2002 a 2016. Nos primeiros anos, o aumento da carga tributária exercida pela União e as políticas expansionistas do âmbito fiscal (Giambiagi, 2006), ajudaram, muito por conta de um bom resultado do produto interno do país, uma diminuição do endividamento em termos de produto. Tal crescimento é bastante explicado pelo aumento da demanda externa por commodities, pela melhoria da balança comercial brasileira, e

pelo aumento da demanda doméstica desse período, sendo este explicado pelos contínuos aumentos dos salários reais, expansão do crédito público e transferência de renda somado aos investimentos públicos na economia.

Gráfico 4 – Endividamento Bruto (Dívida bruta/PIB) – 2001 a 2020



Fonte: BACEN – Elaboração do próprio autor

No gráfico 4, no período destacado entre linhas tracejadas, pode-se observar o início da trajetória insustentável do endividamento público, no período de 2010 a 2016. Fica nítido aqui a insustentabilidade dos gastos frente a continuação de programas sociais e auxílios de renda para a população, com superávits cada vez menores ou até mesmo déficits nas contas públicas do governo.

Além disso, o que mais preocupa os economistas na situação atual da dívida, seria a trajetória explosiva que essa apresenta desde 2014 até 2020. Em termos de investimentos isso torna, cada vez mais, um fator negativo ao tentar o governo brasileiro atrair novos investidores internacionais para o Brasil, pois o risco de *default* (não-pagamento parcial ou integral dos vencimentos correntes da dívida) aumenta e passa a ser um cenário mais conturbado para novas emissões de dívida, dado que mesmo com juros em níveis baixos historicamente em 2020, a curva de juros futura já precificava aumentos substanciais nas taxas de juros básicas locais. Por exemplo, a reforma da previdência, lei instituída em novembro de 2019, é um dos exemplos de

tentativas de amenizar a grave situação gerada pelos gastos excessivos e obrigatoriedades de pagamentos.

Após analisar a trajetória do endividamento público local, é possível enxergar um pouco da complexidade sobre o tema. Além do fator de tamanho, existem mais dois fatores de extrema relevância para a dívida de um país. O primeiro está associado à sua composição, e será o foco desse trabalho. O segundo fator está relacionado a maturidade (ou *Duration*) dos títulos da dívida. Os títulos com vencimentos mais longos, são aqueles que devem possuir um risco maior para seus investidores, mas também devem garantir um prêmio mais atraente, dado que o governo está conseguindo se financiar a taxas muito distantes do período econômico atual. E, apesar da maturidade da dívida brasileira ser considerada ainda baixa (Necchio, 2008), ao compararmos com outras economias desenvolvidas ou em desenvolvimento, esta vem crescendo, sendo um dos principais focos de seus antigos e atuais gestores, desde o início do século XX.

2.2 Conceito de sustentabilidade da dívida

Antes de entrar no tópico da composição da dívida, um conceito bastante abordado em estudos referentes ao endividamento públicos dos países está ligado a sustentabilidade da dívida. Inúmeros estudos recentes mostram que um existe uma relação negativa entre o crescimento do Produto e um nível de dívida. Ou seja, existiria um percentual da dívida que atrapalharia, principalmente os países emergentes, a ter um bom resultado de crescimento. Reinhart e Rogoff (2010) apontam que esse valor poderia estar próximo aos 90% da relação Dívida/PIB. Outros autores, como Checherita-Westphal e Rother (2012), analisam ainda que após um endividamento de 70% do PIB pode influenciar a ponta longa de juros, de modo a interferir no rendimento macroeconômico de um país. Assim, é possível analisar que existe uma necessidade de estudar a sustentabilidade da dívida, a ponto que essa não influencie negativamente indicadores macro dos países.

Dentro dessa questão de sustentabilidade, podem ser analisadas inúmeras questões, como as de rolagem, tamanho, prazos, estrutura de vencimento e grau de indexação. Giavazzi e Pagano (1990) pode ser considerado um dos trabalhos mais

completos do tema, e um dos mais inovadores. O estudo central do modelo dos autores é dado pelo quesito de rolagem da dívida, sendo que alguns fatores como, tamanho, prazos médios e vencimentos dos títulos da dívida podem ser fundamentais para determinar a possibilidade de um default. As principais conclusões dos autores, visando uma dívida sustentável, é que não exista uma concentração de instrumentos de dívida ou de vencimentos de títulos, algo que aumentariam os riscos de não pagamento.

Atualmente, no cenário local, as reformas estruturais dos gastos e arrecadações públicos são fundamentais para gerar a trajetória sustentável do endividamento público. Exemplos claros de reformas, são a reforma da previdência social brasileira, realizada em 2019, e as reformas, ainda em curso e discussão, tributária e administrativa. Essas medidas contribuem para a consolidação fiscal e a estabilidade monetária, com a geração de uma trajetória econômica e social positiva e sustentável. Ou seja, superar os desafios da realização dessas reformas passa a ser, nesse aspecto de estudo da DPF, fundamental para a manutenção do endividamento em patamares sustentáveis e para o crescimento do país.

Além disso, as questões relacionadas aos recorrentes déficits primários também devem ser olhados com maior atenção. Os recorrentes déficits, somado com as despesas de juros, levaram, como já observado nos gráficos anteriores, a necessidade de financiamento do setor público de uma forma jamais vista no Brasil. Uma das alternativas discutidas dentro desse tema de sustentabilidade, passa através da tese da necessidade de reverter os déficits primários em superávits primários.

Portanto, unindo essas perspectivas de superávits primários, crescimento do país e reforma, seria possível, novamente, analisar uma tendência de queda da relação de dívida sobre o PIB, e enxergar uma relação mais sustentável da dívida pública federal.

2.3 *Benchmark* para a dívida pública

Antes de entrar mais a fundo em alguns pontos de partida do tratamento da dívida no Brasil é necessário observar que existe um planejamento estratégico da dívida pública federal (DPF) que engloba três principais fases, de longo, médio e curto prazo. Na análise de longo prazo, existe a definição da estrutura do *Benchmark* da composição ótima da dívida, um dos focos da análise desse trabalho. No médio, estuda-se o foco nas estratégias de transição, na qual é montada o planejamento de alcance das metas de longo prazo. E por último, no curto prazo, é realizado o Plano Anual de Financiamento, no qual existem inúmeras definições e conceitos importantes a serem abordados.

Dentro desses conceitos está a concepção do significado de dívida para o governo brasileiro. Conforme detalhado anualmente nos Plano Anual de Financiamento (PAFs), desde 2001, a dívida local refere-se a "suprir de forma eficiente as necessidades de financiamento do governo federal, ao menor custo no longo prazo, respeitando-se a manutenção de níveis prudentes de risco" (PAF, 2020). Assim, tendo em vista este e os objetivos restantes do PAF, juntamente com as estimativas de necessidade de financiamento de todas as instâncias governamentais, e do cenário macro local e internacional, o Tesouro Nacional estimará os valores esperados para os indicadores da DPF, como estoque, composição por indexador, prazo médio e percentual a vencer em 12 meses.

Posteriormente a essas escolhas, a etapa de médio prazo se caracteriza como um momento de transição. O Tesouro Nacional busca as melhores trajetórias, e também em qual momento deverá ser realizada a implementação, para se alcançar a composição de longo prazo desejada. Neste ponto, o alcance da composição de longo prazo passar por inúmeros desafios e restrições de curto prazo existentes, especialmente próximos a períodos de choques relevantes na economia, que exigem o distanciamento da dívida ótima.

Assim, no longo prazo chega-se ao modelo de *Benchmark*, o qual é usado como modelo base do tesouro Nacional, segundo uma metodologia próxima a do próprio Fundo Monetário Internacional (Guidelines, 2001). Este é considerado uma ferramenta gerencial para a estrutura de dívida ótima do governo, baseada em suas

preferências do *trade-off* de risco e retorno. Portanto, o *Benchmark* da dívida funcionará como o *forward guidance* para o gestor atual desta, principalmente nas decisões relacionadas a novas emissões, rolagens, prazos e escolha dos instrumentos da dívida.

Outros países, entre desenvolvidos e em desenvolvimento, utilizam metodologias iguais ou semelhantes para a determinação de uma estrutura ótima do endividamento público. Portugal foi um dos primeiros países a formular e usar um *benchmark*** (Granger, 1999). O IGCP (Agência de Gestão da Tesouraria e da Dívida Pública de Portugal) determina um *benchmark* de *steady-state*, que institucionalmente é aprovado pelo Ministro das Finanças, baseado em um modelo de simulação de fluxos de caixa. Finalmente, o tomador de decisão determina o trade-off entre custo e risco com o qual ele está disposto a conviver e a estratégia eficiente associada. O *benchmark* é, então, a estrutura de dívida que resulta da contínua aplicação desse programa de financiamento. Além de Portugal, outros países que seguem uma metodologia parecida com a que temos no Brasil são Suécia, Irlanda, Dinamarca, Inglaterra e Canadá.

Saindo do escopo internacional, e retornando as atenções para o caso brasileiro, e assumindo a hipótese de que as necessidades de financiamento do governo central, o modelo de *Benchmark* avaliará algumas carteiras de dívida, em termos de instrumentos de dívida e prazos. O custo é mensurado em termos nominais e relativos, ou seja, em percentuais do PIB, sempre tendo como base os fluxos de caixa da União. Nesse modelo, os riscos e desafios de implementação são divididos por duas vertentes. Primeiro, os riscos do cenário macroeconômico, sendo que está associado aos possíveis diferentes resultados sob diferentes valores dos indicadores macro (inflação, Produto, Câmbio, Juros e Preços) ao final do período de análise. O segundo está relacionado com os riscos de séries de tempos, ou seja, na análise da trajetória dessas variáveis no curto, médio e longo prazo, sendo às vezes necessário, alguns tipos de tratamento ao longo da série eliminando trajetórias indesejáveis.

Mais à frente, na seção de metodologia e análise, esse modelo será explicado de uma forma mais profunda. No entanto, é necessário nesse momento trazer a discussão que, em toda análise e comparação das composições do modelo de *Benchmark* e do modelo de Suavização da Tributação, assumisse que a composição

atual da dívida brasileira é a composição ótima em termos financeiros. Em outras palavras, uma das suposições deste trabalho é que a composição atual do endividamento nacional minimiza os custos financeiros postulados a dívida pública atual.

2.4 Suavização da tributação como modelo da dívida

Em relação ao modelo clássico da suavização da tributação, no qual o trabalho base no Brasil é o de Goldfajn (1998,2000), possui explicitamente um modelo teórico, que defende que variações excessivas na estrutura tributária teriam o efeito de impor uma significtava perda de bem estar aos agentes economicos, na medida que expõe a economia a um maior grau de incerteza, forçando os agentes a refazerem frequentemente suas escolhas ótimas de consumo, poupança e investimento. Nesse sentido, caso o objetivo precípuo da gestão da dívida pública seja minimzar tal desconforto, esta deverá internalizar o fato de que eventos inesperados poderão alterar a trajetória dos gastos públicos, traduzindo-se em mudanças nos tributos.

O trabalho de Barro (1979) pode ser considerado um dos primeiros trabalhos que expõem a importância do estudo de modelos de composição da dívida pública nacional. O autor propõe que o objetivo assumido do governo seria perseguir uma política de minimização de custos envolvendo a economia da arrecadação de tributos por parte da União. Dessa maneira, uma das conclusões do trabalho é que quanto maior a variabilidade das trajetórias da taxação governamental sobre a população, o bem estar da sociedade será menor, o que faria com que os indivíduos alterassem suas escolhas ótimas, em relação a alocação de recursos, com uma maior frequência.

Sendo assim, Barro afirma que em situações de incertezas relacionadas aos montantes gastos pelo governo e de taxas de crescimento do PIB, um cenário próprio para o ambiente brasileiro, os governos deveriam buscar a suavização das cargas tributárias no longo prazo através de uma estrutura de composição ótima da dívida. Dessa maneira, a dívida deveria ser estruturada de uma forma na qual esta seria composta por títulos que fossem capazes de minimizar, ou neutralizar, os riscos que afetem o orçamento e a capacidade de bom pagador da União.

Bohn (1990), baseado no modelo determinístico proposto por Barro (1979), testa a configuração ótima de impostos do governo em um cenário estocástico, adicionando títulos de captação de dívida e questões cambiais ao modelo original. Com objetivo claro de maximização do bem estar social, Bohn utiliza uma metodologia de Vetores Autorregressivos (Var) com objetivo de entender os vínculos derivados das covariâncias e correlações entre variáveis macroeconômicas, com foco no Produto e na Inflação. Com base nos achados deste artigo e no modelo teórico desenvolvido pelo autor, por exemplo, em uma economia com uma correlação negativa entre o produto e inflação, seria desejado um peso maior nas dividas ligadas diretamente a moedas estrangeiras.

No trabalho de Goldfajn (1998), o autor busca modelar uma estratégia de administração da dívida pública, através de um modelo de dois períodos, no qual é possível extrair a composição ótima da dívida em títulos de dívida nominais, indexados à variação dos preços ou títulos denominados em dívidas internacionais. O modelo capta essa composição sobre os fatores da variância da inflação local e da taxa de câmbio real e das correlações cruzadas da inflação e da taxa real de câmbio com o crescimento do produto e do nível de gastos do governo.

Desta forma, o trabalho de Goldfajn (1998) analisa, também, um trade-off importante sobre a administração da dívida pública. Por um lado, ao emitir títulos indexados, o governo de certa forma minimiza as flutuações do valor real da sua dívida sobre a variação dos preços locais, e evita a tentação de curto e médio prazo de desindexar a sua dívida. Por outro lado, caso os choques econômicos sobre os gastos do governo forem positivamente correlacionados com processos inflacionários, então títulos nominais, por sua vez, serviriam como um contingente a dívida, reduzindo-a quando fosse mais necessário. Por último, o trabalho ainda traz uma investigação de momentos que se torna mais favorável, ou não, as emissões de dívidas internacionais, fechando essa parte do trade-off da dívida.

Cysne (2007), relata que um modelo de previsão baseado nas covariâncias de um período a frente dos gastos do governo e inflação, ou da taxa real de câmbio, pode vir a não capturar importante informações relacionadas a estrutura dinâmica da dívida pública de uma economia. O principal ponto dentro dessa questão é que um modelo dinâmico, que fosse composto por infinitos períodos, este poderia ser algo mais rico e

mais próximo a realidade. Na estrutura do modelo de Ilan, como forma de combate de desvios de pagamentos da dívida, é esperando que exista uma maior variabilidade dos impostos, e que na realidade de um país governado democraticamente, torna-se algo muito difícil de ser alterado ano após ano. Cysne, ainda aponta, que em um modelo de infinitos períodos, seria possível analisar os pagamentos de dívidas em um cenário de longo prazo, e assim, não seria necessário também, alterações frequentes na composição da dívida, como forma de tentativa de amenizar pagamentos e dívidas de prazos mais ou menos extensos.

Seguindo esse arcabouço econômico de modelos de suavização de tributação em horizontes infinitos, Missale (1997) é um dos primeiros a explorar essa questão para as economias inglesas e italianas. O autor encontra que a composição ótima do endividamento dos dois países europeus, aonde a covariância entre os choques inflacionários, gastos públicos, Produto e taxa de câmbio real, são essenciais para responder esse trabalho.

No trabalho de Inhasz (2013), afim de ter uma maior precisão em seus resultados, a autora utiliza uma metodologia com modelos de heterocedasticidade condicional (GARCH) multivariados, mais indicado para obtenção de variâncias e covariâncias de dados macroeconômicos. Um dos maiores diferenciais deste trabalho, é que a autora realiza uma comparação entre as quatro possibilidades existem de cálculo do modelo: o modelo tradicional, com dois períodos e três tipos de dívida, o modelo tradicional em infinitos períodos, modelo para a dívida flutuante em dois períodos e em infinitos períodos.

Por último, um trabalho mais atual sobre o tema, foi realizado por Moraes e Divino (2019), o qual analisa por meio da modelagem *Dynamic Stochastic General Equilibrium* (DSGE)[4], “os efeitos da composição da dívida pública sobre a dinâmica da economia brasileira e sua interação com a condução da política monetária”. O trabalho é interessante pelo fato de abordar uma modelagem distinta da que será

[4]Dynamic Stochastic General Equilibrium (DSGE) são modelos que usam ferramentas afim de fornecer uma estrutura coerente para a discussão e análise de políticas fiscais e monetárias. Esses modelos podem ajudar a identificar as fontes de flutuações, encontrar os questionamentos sobre as mudanças estruturais das variáveis estudadas. Além disso, é possível através de um DSGE, prever o efeito das mudanças nas políticas e realizar experiências contra factuais e, por último, também permitem encontrar uma relação entre as características estruturais da economia e os parâmetros estudados de forma reduzidos, o que nem sempre era possível com os modelos macroeconômicos de grande escala.

usada nesse trabalho, ou na maioria dos estudos relacionado ao tema da composição da dívida.

3. Metodologia

Como já explicado anteriormente no capítulo de introdução, o trabalho de Goldfajn (1998) busca modelar uma estratégia de administração da dívida pública, através de um modelo de dois períodos, no qual é possível extrair a composição da dívida em títulos nominais, indexados à variação dos preços ou títulos denominados em dívidas internacionais. No entanto, antes de entrar a fundo no modelo e suas características principais, é necessário pontuar algumas premissas econômicas relacionadas a questão da dívida pública. Importante notar que, em casos de um estudo que não presumisse o relaxamento das três hipóteses abaixo, a gestão da dívida se tornaria algo irrelevante, e é através desses afrouxamentos que se origina valor do estudo da composição ótima da dívida pública como instrumento de bem estar social.

A primeira premissa é o relaxamento da equivalência ricardiana na economia. Segundo Barro (1974), sob condições ideais macroeconômicas, não haveria diferença, no quesito do bem estar social, na escolha do uso do endividamento da União e do uso do tributo para financiar os gastos do Governo. Isso é explicado, pelo fato que, sob a condição da equivalência ricardiana, caso o governo escolha emitir novas dívidas, o bem estar da sociedade irá reduzir da mesma forma se fosse aumentado a alíquota de impostos, dado que o indivíduo já espera ser taxado mais à frente. Além disso, a composição da dívida seria neutra, não impactando nas escolhas ótimas dos indivíduos.

A segunda premissa está relacionada com a necessidade de deixarmos de lado a questão das distorções tributárias. Ou seja, é desconsiderada desse modelo a questão do peso morto, portanto, algo que não produz mais utilidade e continua a ser um incomodo a sociedade, gerada, por exemplo, pelos impostos ao bem estar dos indivíduos.

Por último, a terceira premissa é a necessidade da existência de mercados completos e informações simétricas em torno de todos os agentes da economia. O ponto principal por trás dessa suposição é que caso exista um ambiento econômico no qual os mercados não são completos e exista incertezas, a composição ótima da dívida pode ser um importante instrumento para a provisão de mecanismos de partilha

de risco, para a suavização da carga tributária necessária para financiamento da dívida e para a construção de credibilidade por parte do governo.

Passando por essas premissas, é importante frisar quais são as decisões tomadas pelo governo em cada um dos períodos do modelo estipulado. No primeiro período, o governo poderá escolher a composição desejada da sua dívida, entre os três fatores já mencionados. Além disso, como forma de simplificação, é pressuposto que não existem choques ou qualquer outra decisão relacionada a essa decisão primária. No segundo período, o governo tem que tomar a decisão da escolha ótima do aumento da oferta monetária, caso necessário da alteração tributária, sendo estes usados para o balanceamento do orçamento público. Em relação ao modelo clássico da suavização da tributação de Barros (1997), defende-se que variações excessivas na estrutura tributária teriam o efeito de impor uma significativa perda de bem estar aos agentes econômicos, a medida que expõe a economia a um maior grau de incerteza, forçando os agentes a refazerem frequentemente suas escolhas ótimas de consumo, poupança e investimento. Nesse sentido, caso o objetivo principal do gestor da dívida pública seja minimizar tal desconforto, este deverá internalizar o fato de que eventos inesperados poderão alterar a trajetória dos gastos públicos, traduzindo-se em mudanças no total dos tributos.

Ainda, cabe-se ressaltar que a autoridade pública detém 3 tipos diferentes de instrumentos[5], cada um com diferentes tipos de títulos e características específicas em termos de prazo e forma de pagamento. O primeiro, conhecido como títulos nominais, atrelados a uma taxa de retorno i e retorno denominado da forma de $\frac{(1+i)}{(1+\pi)}$ [6], e são conhecidos como títulos que possuem sua rentabilidade definida no momento de sua comercialização. Os exemplos que temos desse instrumento de dívida são as Letras do Tesouro Nacional (LTN)[6] e as Notas do Tesouro Nacional – Série F (NTN-F)[7].

[5] Instrumentos nesse caso são os títulos da dívida pública disponível para a compra de agentes institucionais e privados afim de financiar os governos em todas as unidades federais.

[6] i representa a taxa de juros básica da economia; por sua vez, π representa a taxa de inflação do período analisado

[7] Importante notar que nos anexos desse trabalho, consta uma nota detalhada do cálculo da variação de preços de cada um desses títulos mencionados (LTN, NTN-F, NTN-B, LFT, NTN-C) para melhor compreensão do leitor.

De uma maneira oposta, os títulos pós fixados são aqueles que possuem seu valor corrigido por um indexador. Ou seja, sua variação está correlacionada ao desempenho desse indexador ao longo do tempo e da taxa do momento de compra do título, seja no mercado primário ou secundário. Dentro desse grupo de títulos pós fixados, temos diferentes títulos que se diferenciam pela forma de correção de seu valor ao longo do tempo. O primeiro caso, os títulos de dívida indexada em juros, é um dos títulos mais comuns e básicos da estrutura da dívida brasileira, e é conhecido como a Letra Financeira do Tesouro (LFT)[6]. O segundo caso, os títulos indexados a dívida cambial, que pagam um valor de (1+i*) * (1+e)[8], e são colocados a mercado através dos títulos globais, mais conhecidos como *Global Bonds* e *Euro Bonds,* negociados em dólares e euros, respectivamente. Por último, importante mencionar a não participação de Swaps cambiais na composição da dívida pública.

Por último, temos os títulos da dívida indexados à inflação, cuja taxa nominal é definida por (1 + r)[9] * (1 + π). Esses títulos, no mercado atual, são representados pelas Notas do Tesouro Nacional – Série B (NTN-B) [6], indexado à variação do Índice de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA), e Notas d Tesouro Nacional – Série C (NTN-C)[6], indexadas pela variação do Índice Geral de Preços de Mercado (IGP-M). Ainda, vale notar que neste trabalho, será assumido que os agentes são considerados consumidores neutros ao risco. Ou seja, que estes demandem um retorno nominal dos juros que seja equivalente a taxa de juros real mais a inflação esperada do período (π^e)

Assim, a finalidade do Tesouro Nacional neste modelo é minimizar a expectativa das distorções tributárias e inflacionárias, dada pela equação abaixo:

$$min_{\theta,\theta^*} E_{t-1}\left[A\ \frac{\tau_t^2}{2} + \frac{\pi_t^2}{2}\right] \tag{1}$$

Aonde os termos da equação acima são:

[8] I* representa a taxa de juros internacional; por sua vez, e representa a taxa de câmbio do período analisado.
[9] r representa a taxa de juros reais da economia

- τ_t - Mede a quantidade total de imposto, em moeda local, pelo governo no período t;
- π_t - Taxa de inflação corrente em t;
- A - Comprometimento do governo junto às políticas monetárias e fiscais. Ou seja, mede o quanto o governo se empenha em cumprir com as medidas e os planos econômicos;
- θ - Proporções de dívida prefixada existentes na economia;
- θ^* - Proporções de dívida cambial existentes na economia;

Ainda, antes de chegar na restrição orçamentária do governo, Goldfajn (1998) ainda realiza duas suposições necessárias para tornar o modelo da composição ótima adequado aos parâmetros econômicos. A primeira é a existência da paridade descoberta de juros[10]. Além disso, a segunda hipótese levantada é que a inflação corrente é diretamente dependente do crescimento da oferta monetária (m) mais um choque de velocidade fora do controle das autoridades governamentais. No entanto, como uma forma de simplificação do modelo, será considerado que esse choque de velocidade é considerado um ruído branco[11], e por consequência, $\pi^e = E\{\pi\} = m$, lembrando que os investidores e consumidores são considerados racionais.

Dessa maneira, utilizando as premissas e hipóteses levantadas até aqui, a equação da taxa de retorno exigida pelos agentes econômicos e linearizando a restrição orçamentária do governo, chega-se que:

$$\tilde{\tau} = (1 + g_t)G_{t-1} + (1 + r_t)(1 - \theta_t - \theta_t^*)B_{t-1} + \left(\frac{1 + i_t}{1 + \pi_t}\right)\theta_t B_{t-1} + \left[\frac{(1 + i_t^*)(1 + e_t)}{1 + \pi_t}\right]\theta_t^* B_{t-1} \qquad (2)$$

aonde tem-se que

- B_{t-1} - Nível total da dívida pública do país relacionada ao período de t – 1 medido em moeda nacional;
- g_t - Taxa de crescimento média dos níveis de gastos do Governo;
- G_{t-1} - Nível total dos gastos do governo relacionada ao período de t – 1 medido em moeda nacional;

[10] Paridade descoberta de juros refere-se ao diferencial de juros pago por ativos em dois países, que deverá refletir a expectativa de valorização (ou desvalorização) entre a moeda desses dois países. Ou seja, matematicamente falando, tem-se que $1 + i = (1 + e^e)(1 + i^*)$.

[11] Ruído Branco → Uma sequência {εt } é um ruído branco se cada valor nela tiver média zero, variância constante e não for correlacionado a qualquer realização da própria série (ou seja, autocorrelação igual a zero).

- i_t e i_t^* - Taxa de juros nominal doméstica determinada no período t interna e externa, respectivamente;
- r_t - Taxa de Juros reais doméstica determinada no período t;
- $\tilde{q} = \tilde{\pi} - \tilde{e}$

Dessa forma, Goldfajn (1998) encontra como forma de solução para a divisão da dívida nominal em estrangeiras definidos por:

$$\theta = \beta \left\{ \frac{\sigma_{g\pi,t}\, \sigma_{q,t}^2 - \sigma_{gq,t}\, \sigma_{q\pi,t}}{(1 + r_{t-1})\left[\sigma_{q,t}^2 \sigma_{\pi,t}^2 + (\sigma_{gq,t})^2\right]} \right\} \tag{3.1}$$

$$\theta_t^* = \beta \left\{ \frac{\sigma_{gq,t}\, \sigma_{\pi,t}^2 - \sigma_{g\pi,t}\, \sigma_{q\pi,t}}{(1 + r_{t-1})\left[\sigma_{q,t}^2 \sigma_{\pi,t}^2 + (\sigma_{\pi q,t})^2\right]} \right\} \tag{3.2}$$

Aonde:

- $\sigma_{g\pi,t}$ - Covariância condicional entre a taxa de crescimento dos gastos públicos e o nível de inflação, no período t;
- $\sigma_{gq,t}$ - Covariância condicional entre a taxa de crescimento dos gastos públicos e a apreciação cambial, no período t;
- $\sigma_{q\pi,t}$ - Covariância condicional entre a apreciação cambial e o nível de inflação, no período t;
- $\sigma_{q,t}^2$ - Variância condicional da taxa de apreciação cambial do período t;
- $\sigma_{\pi,t}^2$ - Variância condicional da taxa de inflação do período t;
- $\beta = {G_{t-1}}/{B_{t-1}}$

Da parte de identificação da estratégia do trabalho do Goldfajn (1998), é possível observar que existe alguns pontos dentro dos métodos estipulados que não foram abordados ou deveriam ter sido discorridos em formato alternativo.

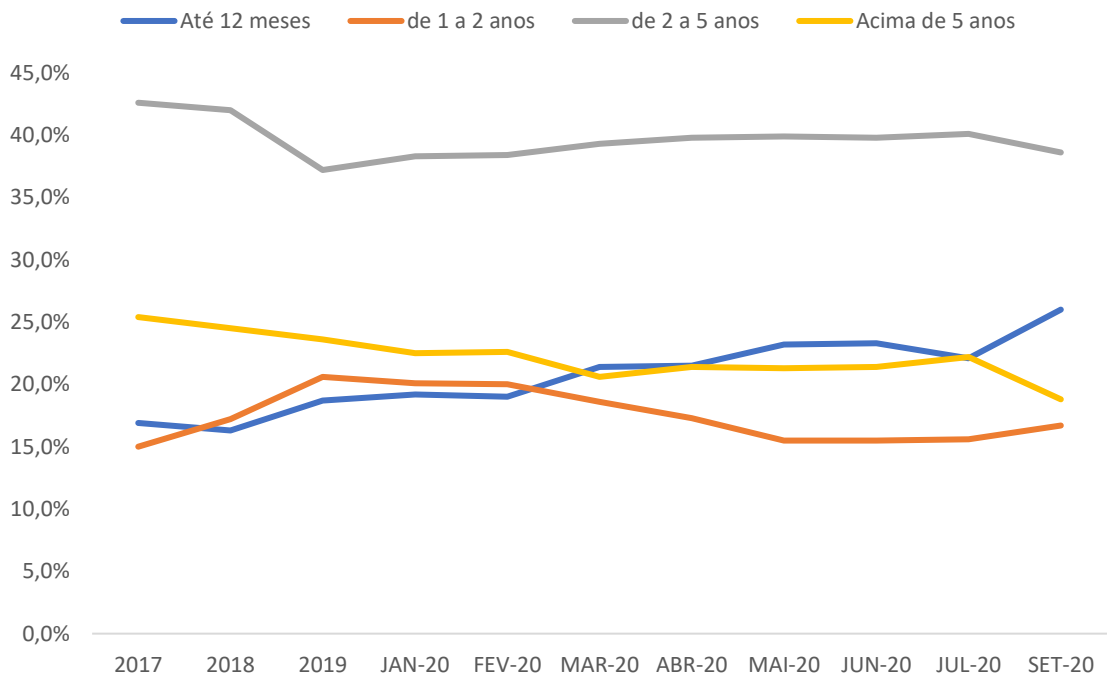
A principal crítica a estruturação dessa metodologia é referente a construção de um modelo da dívida em dois períodos. Cysne (2007), relata que um modelo de previsão baseado nas covariâncias de um período a frente dos gastos do governo e inflação, ou da taxa real de câmbio, pode vir a não capturar importante informações

relacionadas a estrutura dinâmica da dívida pública de uma economia. O principal ponto dentro dessa questão é que um modelo dinâmico, que fosse composto por infinitos períodos, este poderia ser algo mais rico e mais próximo a realidade. Na estrutura do modelo de Ilan, como forma de combate de desvios de pagamentos da dívida, é esperando que exista uma maior variabilidade dos impostos, e que na realidade de um país governado democraticamente, torna-se algo muito difícil de ser alterado ano após ano. Cysne, ainda aponta, que em um modelo de infinitos períodos, seria possível analisar os pagamentos de dívidas em um cenário de longo prazo, e assim, não seria necessário também, alterações frequentes na composição da dívida, como forma de tentativa de amenizar pagamentos e dívidas de prazos mais ou menos extensos.

Cysne (2007), além disso mostra ainda que, o modelo de Goldfajn (1998), além dos pontos já levantados, não inclui questões dos custos existentes nas emissões de dividas pelo Estado. Somando isso, aos outros pontos mencionados, é possível observar que possa existir, dada a alta variância das taxas incidentes de impostos previstas pelo modelo, uma redução do bem estar social total da população. No entanto, olhando para outro aspecto, ao limitar alguns choques estruturais e macroeconômicos em seu modelo através da restrição orçamentária, também pode-se considerar que o trabalho de Goldfajn pode aumentar o bem estar da sociedade.

Neste ponto, foi necessário a escolha de qual modelo, dos destacados na tabela 2, seria utilizado para calcular a composição ótima da dívida pública que visa maximizar o bem estar da sociedade. Pelas razões já levantadas anteriormente, ambos os modelos de 2 períodos foram descartados por não se aproximar da realidade da administração da dívida dos países, uma vez que a rolagem e o longo prazo são questões fundamentais dessa administração.

Gráfico 5 – Histórico de prazos de vencimentos da dívida nacional



Fonte: Tesouro Nacional – Relatório mensal da DPF / Elaboração: Próprio autor

O Gráfico 5 traz a necessidade de rolagem no curto (até 12 meses), médio (de 1 a 2 anos), longo (de 2 a 5 anos) e longuíssimo (acima de 5 anos) prazo da dívida nacional. O que é possível analisar, nesse caso, é que pela necessidade de financiamento da dívida de curto prazo, muito explicado pela necessidade de recursos para a pandemia do novo COVID-19 (SARS-CoV-2). Os pacotes emergenciais e de auxílio a população obrigou o governo adquirir de forma urgente dívida com mercado local, e a forma menos custosa foram as dívidas de curto e médio prazo.

Tabela 2 – Modelos de otimização da dívida visando maximização do bem estar

Períodos/Instrumentos	**Três Instrumentos (Prefixado, Cambial e Pós-fixada)**	**Quatro Instrumentos (Prefixado, Cambial, Pós-fixada e flutuante)**
2 Períodos	Ilan (1998)	Inhasz (2013)
Infinitos Períodos	Cysne (2007)	Inhasz (2013)

No modelo de infinitos períodos com quatro instrumentos de dívida (inclusão da dívida flutuante[12]), em Inhasz (2013), pode-se observar que esse modelo convergiu ao longo do tempo com a política de gestão da dívida pública coordenada pelo Tesouro Nacional. Porém, esse modelo gerou uma grande variabilidade das proporções ótimas e distancias relevantes, em alguns períodos, dos valores observados em modelos de dois períodos.

Por essas razões, esse trabalho focará seu modelo no trabalho de Cysne (2007), porém, sempre focando na importância metodológica que Ilan Goldfajn teve em seu projeto inicial de composição da dívida no cenário Brasileiro. Assim, considerando o modelo de suavização de tributação modelado para infinitos períodos, o objetivo dos gestores continua sendo a minimização da perda esperada de bem estar dos agentes econômicos condicionada a variabilidade do arcabouço tributário no período atual. Importante mencionar, que todas as considerações feitas acima, continuam valendo para o modelo de horizonte infinito. Assim, essa função de bem estar, no entanto, passa a ser medida por:

$$min_{\theta,\theta^*} E_{t-1} \sum_{j=t+1}^{\infty} \alpha^{j-1} \left[A \, \frac{(\tau_j - \tilde{\tau}_j)^2}{2} + \frac{\pi_j^2}{2} \right] \tag{4}$$

Aonde os termos da equação acima são:

- τ_j - Mede a quantidade total de imposto arrecadado, em moeda local, pelo governo no período j;
- $\tilde{\tau}_j$ - Mede a quantidade total de imposto anunciado que seria arrecadado, em moeda local, pelo governo no período j;
- α - Fator de desconto ($0 < \alpha < 1$)
- π_j - Taxa de inflação corrente em j;
- E - Operador de Valor Esperado;
- A - Comprometimento do governo junto às políticas monetárias e fiscais. Ou seja, mede o quanto o governo se empenha em cumprir com as medidas e os planos econômicos;

[12] Dívida flutuante, ou também conhecida como dívida indexada a juros, possui o retorno de $\frac{(1+\mathrm{i}) * (1+\mathrm{d})}{(1+\pi)}$ sendo i a taxa nominal de juros interna, π a taxa de inflação do período e d o prêmio de risco que o agente demanda para aceitar um título pós fixado frente à opção de compra de um título nominal.

- θ - Proporções de dívida prefixada existentes na economia;
- θ^* - Proporções de dívida cambial existentes na economia;

De uma maneira geral, a equação (4) mostra que o modelo estipulado busca minimizar, através das escolhas ótimas da composição da dívida de instrumentos prefixados e cambiais, assumindo um período infinito de tempo, os desvios de impostos arrecadados e de quanto foi anunciado que seria arrecado em cada período j (j = t + 1) em moeda local, somado com a taxa de inflação corrente no país. Ou seja, essa somatória é o equivalente a quanto o governo necessita arrecadar ao longo de toda sua trajetória através da dívida pública, para manutenção de uma sustentabilidade governamental.

Por fim, e tendo como base a formulação do problema em horizonte infinito modelado por Inhasz (2013), é posto em consideração que o governo pode ter um planejamento de médio e longo prazo da estruturação da dívida. A grande vantagem disso, é que como o governo não necessita mais organizar as questões das receitas e gastos sempre no intervalo de dois períodos. Em outras palavras, no Modelo de Goldfajn, era necessário que o Governo revisitasse as taxas de tributação dos agentes econômicos. E desta forma, estipula-se que o problema intertemporal vinculado ao governo será: (5)

$$\tilde{\tau} = (1+g_t)G_{t-1} + (1+r_t)(1-\theta_t-\theta_t^*)B_{t-1} + \left(\frac{1+\ i_t}{1+\ \pi_t}\right)\theta_t B_{t-1} + \left[\frac{(1+i_t^*)(1+\ e_t)}{1+\ \pi_t}\right]\theta_t^* B_{t-1} -\ b_t$$

A principal diferença entre as equações (2) e (5) é a variável b_t, que será considerada, por modo de uma simplificação ao modelo, como a variação do nível total da dívida pública no período t e no período t – 1. Desta forma, é factível estabelecer dentro da restrição orçamentária governamental a ideia que no período inicial (t_0), será possível sentenciar, além da composição ótima da dívida que será vendida, o montante e a quantidade de endividamento que permanecerá nas mãos dos agentes. Por tanto, a restrição orçamentária do governo passa a ser estabelecida por:

$$\tilde{\tau} = (1+g_t)G_{t-1} + (1+r_t)B_{t-1} + [1-\theta_t(\pi_t-\ \pi_t^e) -\ \theta_t^*(q_t-\ q_t^e)] -\ b_t \qquad (6)$$

Da mesma forma feita anteriormente por Goldfajn, Inhasz (2013) determina as composições da dívida nominal e dívida cambial, com o objetivo de minimizar a equação (4), dado a restrição orçamentária explicada acima na equação (6). Portanto, é estabelecido que[13]:

$$\theta = \beta \left\{ \frac{\sigma_{g\pi,t}\, \sigma_{q,t}^2 - \sigma_{b\pi,t}\, \sigma_{q,t}^2 - \sigma_{gq,t}\, \sigma_{q\pi,t} + \sigma_{bq,t}\, \sigma_{q\pi,t}}{(1 + r_{t-1})\left[\sigma_{q,t}^2 \sigma_{\pi,t}^2 + (\sigma_{gq,t})^2\right]} \right\} \tag{7.1}$$

$$\theta_t^* = \beta \left\{ \frac{\sigma_{gq,t}\, \sigma_{\pi,t}^2 - \sigma_{bq,t}\, \sigma_{\pi,t}^2 - \sigma_{g\pi,t}\, \sigma_{q\pi,t} + \sigma_{b\pi,t}\, \sigma_{q\pi,t}}{(1 + r_{t-1})\left[\sigma_{q,t}^2 \sigma_{\pi,t}^2 + (\sigma_{\pi q,t})^2\right]} \right\} \tag{7.2}$$

Aonde:

- $\sigma_{b\pi,t}$ - é interpretado como a covariância condicional entre a variação da dívida pública e a taxa de inflação corrente no país, no período t.
- $\sigma_{bq,t}$ - é interpretado como a covariância condicional entre a variação da dívida pública e a variação da taxa de câmbio no Brasil, no período t.

3.1 Resultados esperados

No quadro acima é possível analisarmos alguns dos resultados esperados, nos quais as covariâncias e variâncias dos indicadores levariam ao aumento e/ou diminuição das prefixada, pós-fixada e cambial.

Tabela 3 – Resultados esperados das variâncias e covariâncias do modelo

Instrumentos	Inflação	Taxa de Cambio real
Gastos do governo	+ (aumento dívda nominal e diminução da parcela indexada a inflação)	Quanto maior a covariância da taxa de cambio real com o gastos públicos, maior deveria ser a parcela cambial da dívida
Inflação	Quanto maior a variancia da taxa de inflação, menor será a parcela de dívida nominal e cambial.	Aumento da covariância da taxa de câmbio real e a taxa de inflaçã, leva a uma diminução esperada da parcela cambial da dívida.
Taxa de Cambio real	Quão maior a covariancia da taxa de cambio real e a taxa de inflação, menor deveriam ser os pesos da composição das parcelas nominais e cambial. Aumento da parcela de IPCA	Quanto maior a variancia da taxa de cambio real, menor será a parcela de dívida nominal e cambial.
Taxa de crescimento da dívida	Quanto maior a covariância da taxa de crescimento da dívida e a inflação, maior deverá ser o peso na parcela atrelada ao IPCA e menor a parecla nominal. Cenários de elevada inflação, as taxas de juros aumentam para controle da variação dos preços, o que aumentaria os custos dos títulos nominais.	Quanto maior a covariância da taxa de cambio real e a taxa de crescimento da dívida, menor deverá ser a parcela cambial da dívida pública

[13] Para mais detalhes do encontro das equações (7.1) e (7.2), vide anexo 3.

É importante analisar os primeiros possíveis resultados existentes dentro das equações das proporções ótimas dos instrumentos das dívidas mencionados acima. Logo, observa-se que a proporção ótima da dívida nominal é crescente frente a covariância entre gastos públicos e inflação. Sendo assim, é plausível imaginar que a dívida nominal é interessante em momentos que exista um aumento de gastos públicos acompanhado de um aumento da variação de preços. Em contrapartida, o governo, nesse caso, deveria ainda reduzir a parcela da dívida atrelada ao IPCA.

Outro ponto relevante a ser mencionado é que quão maior elevado for a variância da taxa de câmbio e da taxa de inflação, menor será a proporção ótima da dívida nominal e cambial. É factível imaginar que em períodos de alta variação do real, frente ao dólar, por exemplo, no qual a economia local é muito dependente dado a questões de importações e exportações, ou até mesmo em um cenário de alta instabilidade econômica e elevados índices de inflação, que os agentes econômicos busquem se defender contra a perda real de valor dos títulos públicos. A conclusão desse cenária, seria que o Tesouro Nacional seria forçado, a buscar uma maior quantidade de títulos de dívida indexada para balancear a composição ótima da dívida.

As duas conclusões acima mencionadas são válidas tanto no modelo de Goldfajn (1998) quanto no modelo de Cysne (2007). Especificamente, quando analisado o modelo em um horizonte infinito, a grande vantagem observada para a determinação da composição da dívida ótima é que se torna possível a inclusão das covariâncias condicionais da totalidade da dívida pública frente a inflação e a taxa de apreciação cambial. Assim, ao analisar a questão da covariância da dívida pública em relação a inflação, é esperado que uma covariância positiva entre as duas variáveis aumente a parcela da composição prefixada do endividamento público. O raciocínio por trás disso, está na ideia de que com o aumento da dívida, o governo é atraído a aumentar a emissão de moeda existente. Conforme em nossas premissas, o aumento da emissão de moeda circulante leva a um aumento da expectativa de inflação, e consequentemente, a um aumento da inflação. Sendo assim, se torna mais atraente pro governo o aumento da parcela prefixada da dívida, pois desta maneira, este está conseguindo de uma maneira eficiente, diminuir o valor real da dívida no período corrente.

Agora, o que pode analisar em relação a covariância da dívida total frente a taxa de apreciação cambial do real, a parcela da composição ótima da dívida cambial, deverá ser reduzida. A questão por trás disso, está relacionada com a expectativa de incertezas da economia. Dado que a volatilidade do câmbio, seja do Real frente ao Dólar ou do Real frente ao Euro, é extremamente elevada, a parcela cambial da dívida se tornaria também muito volátil, causando aumentos e diminuições significativas em horizontes de curto prazo do valor real da dívida total. Sendo assim, afim de evitar essa incerteza da análise do valor total da dívida, caso a covariância dessas variáveis seja positiva e diferente de zero, é esperado uma diminuição da parcela da dívida cambial.

4. DADOS[14]

Antes de entrar propriamente no modelo base deste trabalho, explicado no capítulo acima em metodologia, se faz necessário esclarecer as fontes e as variáveis que serão utilizadas daqui pra frente. Serão empregados dados mensais e dessazonalizados, sendo o início da base de dados de janeiro de 2004 a outubro de 2020. Os dados foram encontrados na base de dados do Tesouro Nacional e na base de dados do Banco Central e no Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada[15].

Vale salientar que a escolha do período de dados foi relacionada a implementação do plano de metas de inflação, dentro do Plano Real estabelecido pelo governo em 1999. No entanto, apenas é possível observar que a trajetória inflacionária foi reestabelecida no final de 2003 e início de 2004, explicando, assim, a razão da escolha do período da análise desse trabalho.

Além disso, encontra-se necessário uma breve explicação das variáveis a serem utilizadas, afim de limitar possíveis discussões do uso dessas variáveis na metodologia explicada:

1) Gastos do Governo**:** Foi utilizado a taxa de crescimentos dos gastos totais do governo, desconsiderando os pagamentos de juros emitidos pela dívida. Aqui foi utilizado uma base acumulada em 12 meses afim de controle da sazonalidade da série. Despesa total refere-se ao valor da despesa não financeira do Governo Federal, no âmbito da administração direta e indireta, assim considerada os fundos, autarquias, fundações públicas, empresas públicas e sociedades de economia mista constantes dos orçamentos fiscal e da seguridade social.
2) Taxa de Câmbio comercial: Periodicidade mensal, porem as variações são calculadas anualmente afim de reduzir a volatilidade cambial de alguns períodos como 2008, 2014, 2016 e 2020. Além disso, é importante mencionar que será utilizada a taxa spot de venda, termos de reais por dólar.
3) Taxa de inflação: medida com base das variações mensais do índice de Preços ao consumidor, índice vinculado a Fundação Getúlio Vargas (FGV), em uma

[14] É interessante notar aqui, que todos os dados utilizados nesse estudo, se fazem de sua forma integral disponível em sites públicos do governo federal ou do Banco Central.
[15] Os links das pesquisas estarão disponíveis no apêndice do trabalho.

forma acumulada em um período de defasagem igual a 12 meses com a finalidade de controlar a sazonalidade da série.

4) Dívida do setor público: Existe atualmente uma discussão sobre qual indicador de endividamento seria melhor para análises de questões sobre sustentabilidade e composição, devido a existência de questões metodológicas e conceituais entre a dívida bruta e a dívida líquida. Neste trabalho, afim de minimizar as essas questões de diferentes tipos de metodologias, e afim de usar um conceito de dívida mais abrangente no momento de comparações internacionais, foi escolhido trabalharmos com a Dívida Bruta do Governo Geral (DBGG). Aqui, o termo Governo Geral inclui apenas os governos federal, estadual e municipal, sem considerar Banco Central e estatais, dado a metodologia criada em 2008 para o cálculo da dívida nacional. Em poucas palavras, a diferença da DBGG e a Dívida Líquida do Setor Público (DLSP) é que o segundo inclui as empresas estatais e o BACEN e o créditos representados por títulos públicos que se encontram em poder de seus órgãos da administração direta e indireta, de fundos públicos federais e dos estados e dos municípios.

5. Metodologia empírica

O primeiro passo para a obtenção da composição ótima do endividamento público pelo modelo de suavização da tributação passa pela necessidade dos cálculos de variâncias e covariâncias dos instrumentos da dívida, conforme explicado na seção anterior. Nessa primeira etapa metodológica foi escolhida para o cálculo das medidas estatísticas necessárias o uso do Vetor Auto Regressivo (VAR), como também foi utilizado nos trabalhos de Goldfajn (1998) e Maia e Garcia (2012). Esse modelo é bastante indicado para obter a dinâmica do comportamento de séries temporais, através de ferramentas que possibilitam a análise empíricas dos resultados, e realizar previsões em termos de alterações dos comportamentos das variáveis macroeconômicas aqui estudadas.

Os vetores autorregressivos (VAR) permitem que se expressem modelos econômicos completos e se estimem os parâmetros desses modelos. O objetivo do VAR é desenvolver técnicas para evitar ou contornar o problema do *feedback*[16], e encontrar a trajetória da variável de interesse ante um choque nesses erros, podendo ser considerado esse choque algo estrutural nas variáveis em estudo.

De modo geral, podemos escrever um modelo autorregressivo de ordem p por um vetor com n variáveis endógenas, X_t, conectadas entre si por meio de uma matriz A, da seguinte forma:

$$AX_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i X_{t-i} + \beta \varepsilon_t$$

Em Enders (2004), o autor defende que as séries temporais para a utilização de um modelo de Vetor Autorregressivo devem ser estacionárias, afim de evitar que existam as regressões espúrias[17]. Essas regressões fornecem resultados estatísticos altamente significantes para estimações de séries que não apresentam nenhuma relação econômica ou teórica. Dessa forma, as condições de fraca estacionariedade para estimação confiável de um modelo VAR passa-se por:

[16] Problema do feedback é encontrado quando duas variáveis dependem uma da outra para serem explicadas ao longo de suas trajetórias. Sendo assim, essas variáveis não poderiam ser parte de um modelo multivariado pois as variáveis estariam altamente correlacionadas com os seus erros.

[17] Regressões espúrias são variáveis não correlacionadas que podem ter uma alta correlação causada por uma terceira variável.

- $E(X_t) = E(X_{t-s}) = \mu$;
- Erros das variáveis devem ser ruídos brancos;
- Covariâncias entre os resíduos igual a zero.

Segundo os trabalhos de Goldfajn (1998) e Garcia e Maia (2012), a metodologia mais indicada para esse estudo de covariância e variâncias das variáveis macroeconômicas no caso do estudo da otimização dos instrumentos da dívida pública é a partir dos resíduos de um VAR com duas defasagens. No entanto, por motivos já explicados anteriormente, esse estudo estenderá a análise para um período de infinitos períodos.

O uso do resíduo do VAR ou de outra metodologia como fonte dos dados para o cálculo das correlações, se justifica por configurar uma medida de dependência preferível à correlação simples, já que é capaz de quantificar inovações não esperadas pelos agentes envolvidos de uma maneira mais refinada. Com esse tipo de metodologia, excluem-se os efeitos atribuídos às realizações passadas das variáveis em questão.

Após adquirir as variâncias e covariâncias das variáveis macroeconômicas, torna-se possível, através das equações (7.1) e (7.2), encontrar as dimensões teóricas ótimas e compará-las com as encontradas com o modelo de *benchmark* do Tesouro Nacional e com as proporções atuais da dívida nacional, conforme exploradas no gráfico 1.

E por último, serão usadas as proporções teóricas ótimas e as covariâncias e variâncias, para estudar a evolução histórica das proporções ótimas da dívida. Conforme descrito por Inhasz (2013), essa etapa serve para verificar a validade dos *trade-off* que, por um lado, ao emitir títulos indexados, o governo de certa forma minimiza as flutuações do valor real da sua dívida da variação dos preços locais e evita a tentação de curto e médio prazo de desinflacionar, ou desindexar, a sua dívida. Por outro lado, caso os choques econômicos sobre os gastos do governo forem positivamente correlacionados com choques inflacionários, então títulos nominais serviriam como um contingente a dívida, reduzindo-a quando fosse mais necessário.

Se fez necessário o estudo das questões relacionadas a estacionariedade das variáveis endógenas, inflação, taxa de crescimento dos gastos do governo, taxa de

câmbio real e taxa de crescimento da dívida pública, através do teste *Augmented Dickey-Fuller (ADF)*. Este, testa pela hipótese nula da presença de uma raiz unitária nas séries temporais estudadas, sendo realizado um teste para cada uma das variáveis acima. A hipótese alternativa, portanto, caso seja rejeitado a hipótese nula, pode assumir, dado um intervalo de confiança, que as séries são estacionárias.

O teste de *Dickey-Fuller* considera que todos os erros estabelecidos são ruídos brancos[18], que por sua vez um processo estacionário não necessariamente possui. Como esse problema distorce o poder dos testes, os autores criaram uma metodologia que através de um modelo que estima com as variáveis autorregressivas para corrigir o desvio do valor correto da estatística. Portanto, primeiro torna-se os resíduos de cada uma das séries estudados em um ruído branco, e depois atesta-se a estacionariedade da série. Sendo assim, na tabela abaixo, é realizado um resumo dos principais testes para estacionariedade das variáveis estudadas para a montagem de um modelo VAR.

TABELA 4 – Resultados Testes para estacionariedade

TESTE	Valores de Referência		Resultados	Inflação	Gastos Governo	Dívida Pública	Cambio real
DF	1% level	-2,57537	Test Statistic	-3,0011601*	-2,533851**	-3,019854**	-2,745008*
	5% level	-1,94226					
	10% level	-1,61575					
ADF	1% level	-3,45963	Test Statistic	-3,016848**	-2,834849***	-3,131475**	-2,630255***
	5% level	-2,87432					
	10% level	-2,57366	(p-valor)	0,0348	0,055	0,0257	0,0883

Software utilizado: EVIEWS – Elaboração do próprio autor

Com o auxílio da tabela acima, pode-se concluir que as variáveis podem ser utilizadas em nível e não em alguma diferença por se mostrarem estacionárias ao nível de significância de 10%. Aqui vale ressaltar que as variáveis podem ser consideradas na diferença pela própria metodologia da composição de cada variável, e por isso que o resultado acima era esperado e foi provado pelos testes *Dickey-Fuller* e *Dickey Fuller aumentado*.

[18] Um processo estocástico de variáveis aleatórias não correlacionadas com média zero e variância infinita e constante. Tal processo é denotado como $\varepsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$

Posteriormente a isso, foi realizado o teste do número de defasagens que se mostra indicado pelos testes *Schwarz Information Criterion (SC)* e *Hannan-Quinn Information criterion* (HQ). Os resultados dos testes acima mostram, em ambos, que a melhor defasagem a ser escolhida seria um modelo VAR com 2 (duas) defasagens para cada uma das variáveis explicativas pelos métodos de *Schwarz Information Criterion (SC)* e *Hannan-Quinn Information criterion* (HQ).

Tabela 5 – VAR *lag order Selection Criteria*

Lag	LogL	SC	HQ
0	1211.025	-1.043.607	-1.047.175
1	2230.870	-1.892.600	-1.910.436
2	2308.458	-19.22237*	-19.54343*
3	2334.094	-1.906.699	-1.953.074
4	2353.198	-1.885.481	-1.946.126
5	2362.546	-1.855.780	-1.930.694
6	2392.350	-1.843.866	-1.933.050
7	2415.075	-1.825.797	-1.929.250
8	2422.970	-1.794.832	-1.912.554

No entanto, o próximo passo a ser efetuado para o prosseguimento do trabalho, foi a análise dos resíduos gerados pelo modelo VAR de duas defasagens das variáveis endógenas aqui estudadas. O que pode ser encontrado nesse estudo dos resíduos é que o modelo gerado possui autocorrelação e não apresentou normalidade conforme esperado.

A alternativa encontrada para suavizar essas questões de autocorrelações foi a possibilidade do uso de um modelo Vetor de Correção de Erros (VEC) de longo prazo. No entanto, os problemas residuais persistiram, e a escolha a partir de então foi a utilização de um modelo que toma em consideração a heterocedasticidade condicional dos resíduos, através da metodologia GARCH (*Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models)*.

5.1 Metodologia GARCH

Pesquisadores que se dedicam a prever séries temporais, tais como preços de ações, taxas de inflação, taxas de câmbio, entre outros, costumam observar que a capacidade dos modelos em prever tais variáveis oscilam consideravelmente de um

período para outro. Por exemplo, para alguns períodos, os erros de previsão são relativamente pequenos, já para outros, tais erros são relativamente grandes, e então são outra vez pequenos para um outro período.

Segundo De-Losso (2011), a principal razão por trás desses modelos é a possibilidade de controlar as dependências temporais de ordem superior ao primeiro momento condicional. Essas dependências expressam a existência de aglomerações em séries temporais, e a alternância de resultados de períodos de diferentes volatilidades nos dados estudados.

Além disso, a colaboração fundamental desses modelos é a diferenciação de uso entre momentos de segunda ordem condicional e não condicionais. Ou seja, as matrizes de covariâncias condicionais dependerão de estados passados da natureza, atribuindo um controle maior na parcela de estimação de coeficientes robustos e resíduos controlados do modelo aqui estudado.

A metodologia ARCH foi apresentada primeiramente por Engle (1982) no qual, um modelo com média e variância de uma série temporal são modeladas simultaneamente, sendo a variância condicionada a choques passados. É desta forma que a modelagem ARCH varie ao longo do tempo, sendo capaz de capturar os agrupamentos de volatilidades das variáveis estudadas.

Um modelo ARCH(q), ou seja, de ordem q, é representada por:

$$y_t = c + \sum_{i=1}^{r} \theta_i y_{t-i+} + \sum_{j=1}^{m} \emptyset_i \varepsilon_{t-j+} + \varepsilon_t \ ,$$

que representa a média condicional da série de retornos da variável y_t, sendo representado por um modelo ARMA (r,m).

$$\sigma_t^2 = \vartheta + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 \ ,$$

que representa a variância condicional dependente de ordem q momentos do passado.

Onde:

$\varepsilon_t = \sigma_t * z_t \,;\; z_t \sim i.i.d(0,1)$

$q, \vartheta, \alpha_i > 0$

$$\sum_{i=1}^{q} a_i < 0$$

No entanto, algo alarmante nos modelos ARCH é que estes acabam apresentando uma ordem q elevada, que pode ser causa de problemas na estimação de alguma variável estudada. A solução para tanto, foi encontrada por Bolleslev (1986), implementando termos passados da variância na modelagem de cada variável, o modelo consegue ser construído com uma ordem menor, e conseguindo diminuir a quantidade de parâmetros a serem estimados. Assim o GARCH (*Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models*) estabelece em uma ordem GARCH (p, q) com a inclusão da variância passada pode ser representado por:

$y_t = c + \sum_{i=1}^{r} \theta_i y_{t-i+} + \sum_{j=1}^{m} \emptyset_i \varepsilon_{t-j+} + \varepsilon_t$,

que representa a média condicional da série de retornos da variável y_t, sendo representado por um modelo ARMA (r,m).

$\sigma_t^2 = \vartheta + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \, \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \, \sigma_{t-j}^2$,

que representa a variância condicional dependente de ordem q momentos do passado.

Onde:

$\varepsilon_t = \sigma_t * z_t \,;\; z_t \sim i.i.d(0,1)$

$q, \vartheta, \alpha_i, p, \beta_j > 0$

$$\sum_{i=1}^{q} a_i + \sum_{i=1}^{q} \beta_j < 0$$

Portanto, é fácil observar o motivo do qual o modelo GARCH é estabelecido como uma generalização dos modelos da classe ARCH.

Ainda, segundo De-Losso (2012), em termos de modelos multivariados da linhagem GARCH, existem dois principais vertentes, cada um com a sua especificação. Bollerslev, Engle e Wooldirdge (1998) estabelecem o modelo MGARCH-M, usando o operador VECH. Outro modelo multivariado é o BEKK, construído por Babam Engle, Krafta e Kroner (1995).

O próprio De-Losso (2012), estabelece que o modelo Bekk é capaz de garantir que a matriz de covariância seja positiva definida em cada momento do tempo e tenta reduzir os números de parâmetros estimados. No entanto, a escolha da ordem de defasagens das variáveis escolhida foi realizada através de um estudo da FAC e FACP[19]. Portanto, o modelo estimado é estabelecido como:

$$\pi = c_1 + c_2\pi_{t-1} + c_3\pi_{t-2} + \varepsilon_{\pi,t} \tag{8.1}$$

$$q = c_4 + c_5 q_{t-1} + c_6 Crise2008 + \varepsilon_{q,t} \tag{9.1}$$

$$g = c_7 + c_8 Crise2016 + c_9 Covid * g_{t-1} + \varepsilon_{g,t} \tag{10.1}$$

$$b = c_{11} + c_{12} b_{t-1} + \varepsilon_{b,t} \tag{11.1}$$

Onde:

- π_t é a taxa de inflação correspondente ao período t, conforme já especificado anteriormente.
- q_t representa a taxa de crescimento do câmbio real versus Dólar no período t, conforme já especificado anteriormente.
- g_t é a taxa de crescimento do das despesas primárias do governo geral no período t, conforme já especificado anteriormente.
- b_t caracteriza a taxa de crescimento da dívida pública bruta, conforme já especificado anteriormente.

[19] Função de autocorrelação e Função de Autocorrelação Parcial

- Crise2008 é uma variável do tipo dummy de controle referente ao período da crise global dos mercados financeiros.
- Crise2016 representa outra variável tipo dummy de controle referente a crise política que foi vivida no Brasil no período de 2015 a 2016.
- Covid é uma variável tipo dummy de controle referente a crise econômica vivida no Brasil causada pelo surgimento no SARS-Cov-2, novo Coronavírus.

Vale ressaltar que se fez necessário, para variações abruptas em algumas das variáveis estimadas, a criação de algumas Dummies de controle. A Dummy Crise2008, faz referência a crise dos mercados financeiros que vivemos em âmbito global, que impactou principalmente a taxa de câmbio de real do Brasil versus a moeda americana. Por outro lado, a Dummy Crise2016, serve para controle dos aumentos de gastos públicos referentes ao período de Impeachment e crise política que foi observado no âmbito brasileiro. Por último, e mais recente, a Dummy Covid ganha um importante contexto econômico para o período atual, principalmente para os dados analisados em 2020. Os auxílios emergências, ajuda a companhias, e o aumento dos gastos públicos recentes para controle da pandemia influenciar bastante os resultados sem o uso desse componente no modelo.

6. Resultados

Após ter especificado toda a parte metodológica, e toda a parte matemática por traz do cálculo para a otimização da composição da dívida pública, os resultados dos coeficientes estimados para as equações[20] (8.1), (9.1), (10.1) e (11.1) foram:

$$\pi_t = \underset{(0,001)}{0,00239^{**}} + \underset{(0,048)}{1,15706^{***}}\ \pi_{t-1} - \underset{(0,041)}{0,20019^{***}}\ \pi_{t-2} + \widehat{\varepsilon_{\pi,t}} \tag{8.1}$$

$$q_t = \underset{(0,002)}{0,02995^{**}} + \underset{(0,029)}{0,81523^{***}}\ q_{t-1} + \underset{(0,043)}{0,08631^{*}}\ \text{Crise2008} + \widehat{\varepsilon_{q,t}} \tag{9.1}$$

$$g_t = \underset{(0,000)}{0,05884^{***}} + \underset{(0,023)}{0,02331^{*}}(\text{Crise2016}) + \underset{(0,019)}{0,634385^{***}}(\text{Covid}^{*}\ g_{t-1}) + \widehat{\varepsilon_{g,t}} \tag{10.1}$$

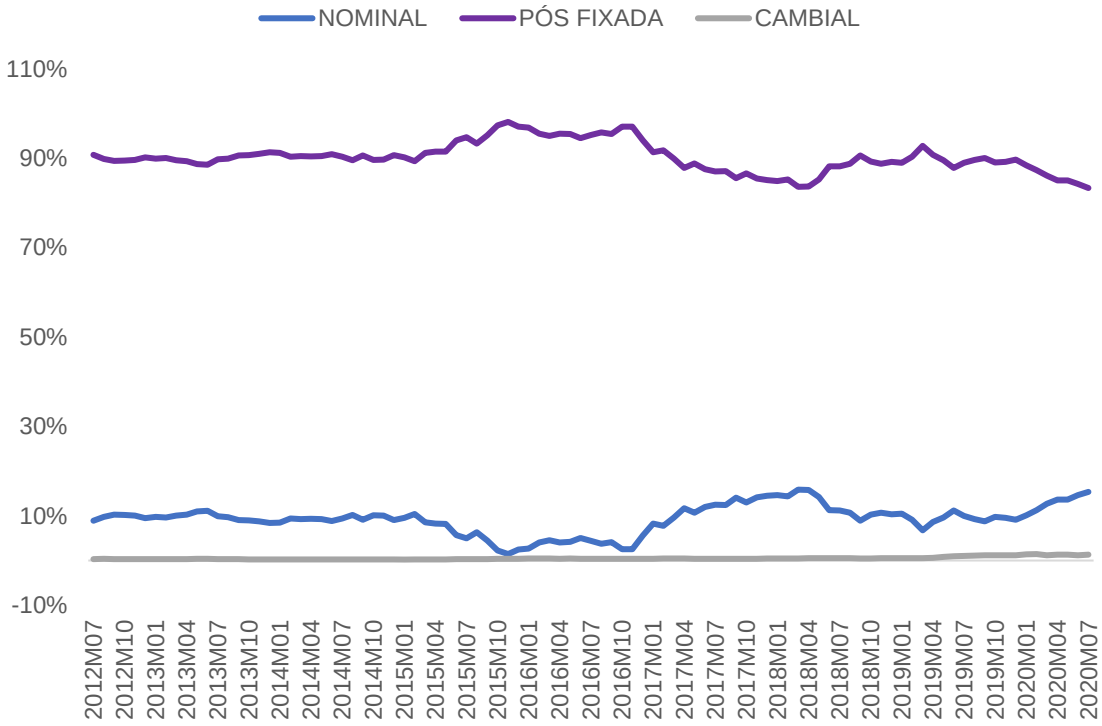
$$b_t = \underset{(0,000)}{0,05596^{***}} + \underset{(0,082)}{0,32724^{***}}\ b_{t-1} + \widehat{\varepsilon_{b,t}} \tag{11.1}$$

Interessante notar que os resultados encontrados são todos estatisticamente significativos, em sua grande maioria a 5% e 1% de confiança. Ainda, a variável do crescimento da dívida pública (b_t), mostrou-se, conforme esperado, sinal positivo, dado seu crescimento no período analisado e significativo a 1% de confiança, corroborando para a significância do modelo de infinitos períodos e carregamento da dívida. Além disso, os testes realizados em relação aos resíduos de cada uma das variáveis concluíram-se como satisfeitos.

Após a realização do modelo GARCH afim de encontrar os estimadores desejados, e dado que os resíduos se mostram condizentes, o próximo passo foi calcular, através das equações (7.1) e (7.2) as composições ótimas da parcela da dívida pública em termos dos instrumentos de dívida prefixados e cambiais, suavizados em um horizonte de 12 meses. Aqui, é importante ressaltar que foi utilizado uma janela de 100 dados para os cálculos das variâncias e covariâncias necessárias para o encontro da otimização dos instrumentos da dívida nacional.

[20] Valores em parêntese representam o desvio padrão de cada variável. (*) significância estatística variável a 10%, (**) significância estatística variável a 5% e (***) significância estatística variável a 1%.

Gráfico 6 – Otimização da dívida pública com três instrumentos

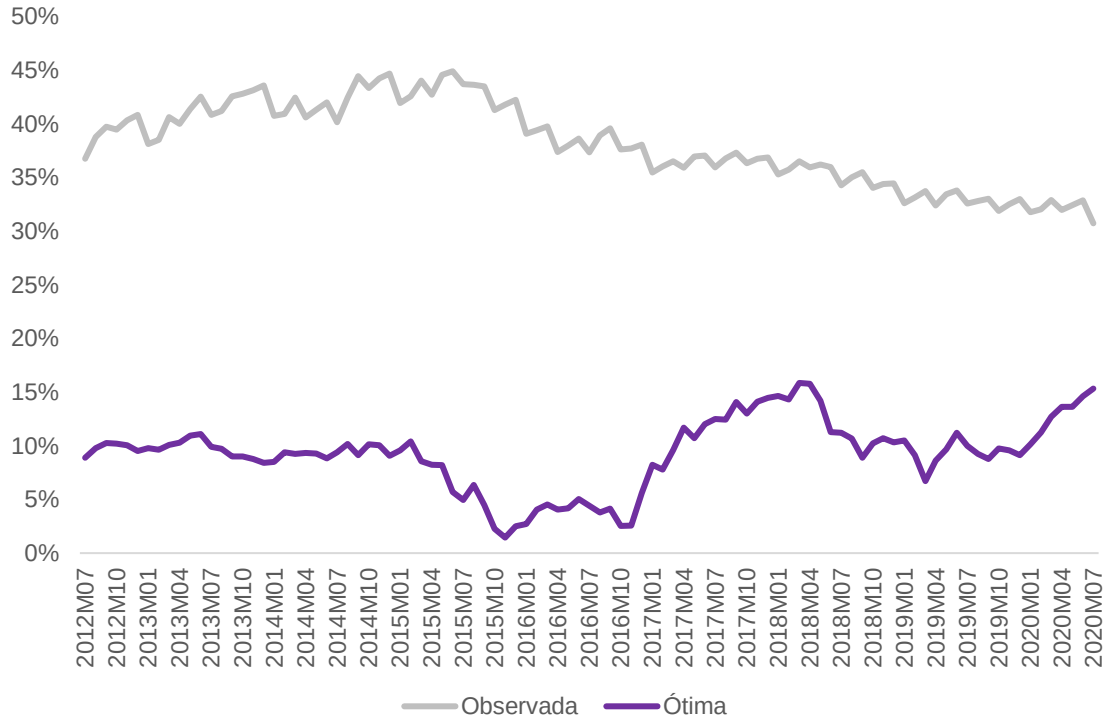


Elaboração: Próprio autor

No gráfico 6, observar-se que existe uma predominância da parcela de dívida pós fixada, em relação a parcela cambial e nominal. Isso é muito explicado pelo aumento das covariâncias entre gastos do governo e o crescimento da taxa de câmbio real e da taxa de crescimento da dívida com a inflação, além dos aumentos significativos das variâncias da taxa de inflação e da taxa de crescimento do câmbio no período analisado. Isso corrobora com a ideia de a dívida deveria ser mais atrelada as LFTs e NTN-B, algo que vem sendo praticado pela equipe do Tesouro Nacional a alguns anos.

Nos gráficos abaixo, serão demonstradas as trajetórias ótimas dos instrumentos separadamente com a respectiva parcela atual. novas emissões de dívida.

Gráfico 7 – Otimização da composição da dívida pública – Parcela nominal



Elaboração: Próprio autor

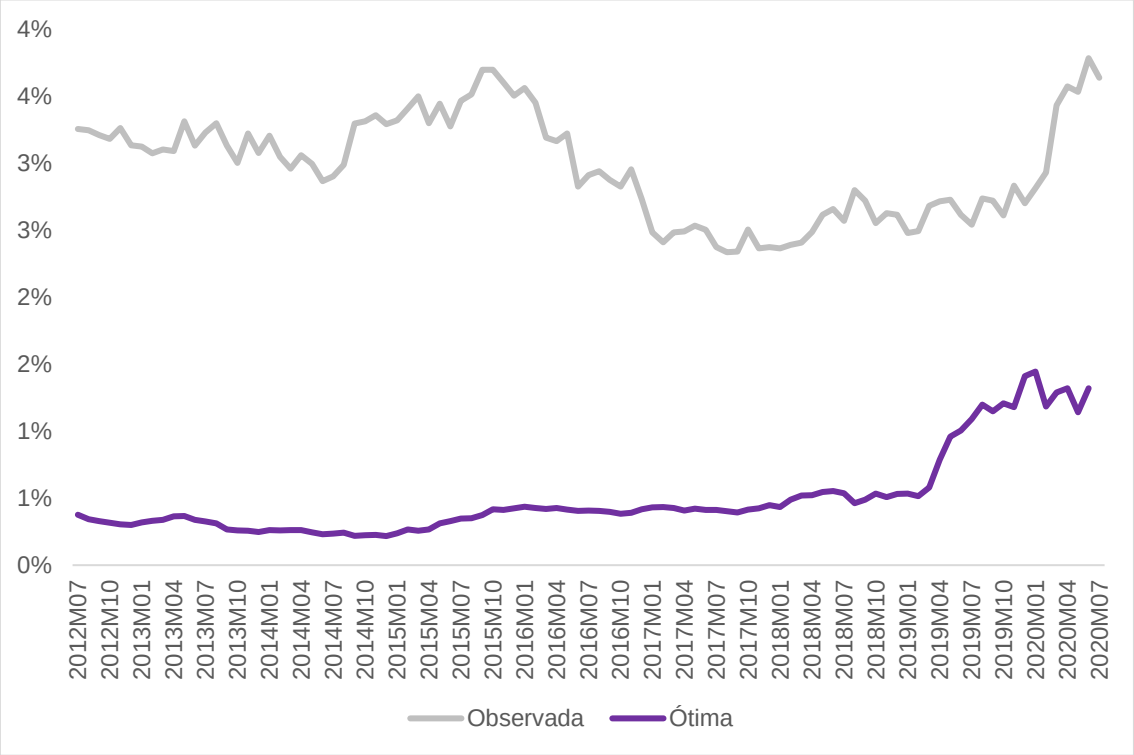
Conforme é possível observar no gráfico 7, a trajetória da parcela nominal da dívida deveria ter sido reduzida do período de 2007 a 2020. Essa diminuição é muito explicada pelo aumento da variância da inflação no período estudado, além do aumento das covariâncias dos gastos do governo e do crescimento da taxa de câmbio real e dos gastos do governo com a variação dos preços da economia local. Importante notar que os títulos atrelados a essa parcela da dívida são bastante voláteis no mercado secundário, o que seria indicado ainda nos dias de hoje, o Tesouro Nacional não priorizar esse tipo de emissão, visando a suavização da tributação nacional. Além disso, conforme descrito por Goldfajn (1998), o aumento da variação da inflação, como é observado nos dados aqui estudados, pode explicar a tendencia da redução da procura desses títulos aos investidores, uma vez que a incerteza inflacionária tende a reduzir as maturidades desses títulos. Ainda, pode-se observar que após um período inflacionário mais controlado, como é o de 2016 a frente, é visível o aumento da parcela nominal da dívida.

Agora, em termos da dívida cambial, é possível verificar que esta é reduzida desde o início do século atual. No início dos anos 2000, a parcela de dívida não-local,

atrelada à variação do câmbio era próxima aos 55% do total da dívida. De lá pra, o governo vem reduzindo drasticamente esse percentual da dívida, chegando hoje em um nível próximos aos 3% do total da dívida. É interessante notar como essas reduções foram de extrema importância para o controle do endividamento nacional frente ao PIB nos últimos anos, tanto em relação a minimizações dos custos e a suavização da tributação, pois o câmbio nesse período sofreu momentos de grande volatilidade, como o mais recente em 2016 e 2020.

Além disso, no gráfico abaixo, observa-se que a parcela da dívida cambial ótima estipulada pelo modelo proposto neste trabalho é próxima a zero em todos os anos estudados, ratificando aqui a importância das políticas realizadas pelo Tesouro Nacional através dessa parcela da dívida nos últimos anos.

Gráfico 8 – Otimização da composição da dívida pública – Parcela cambial



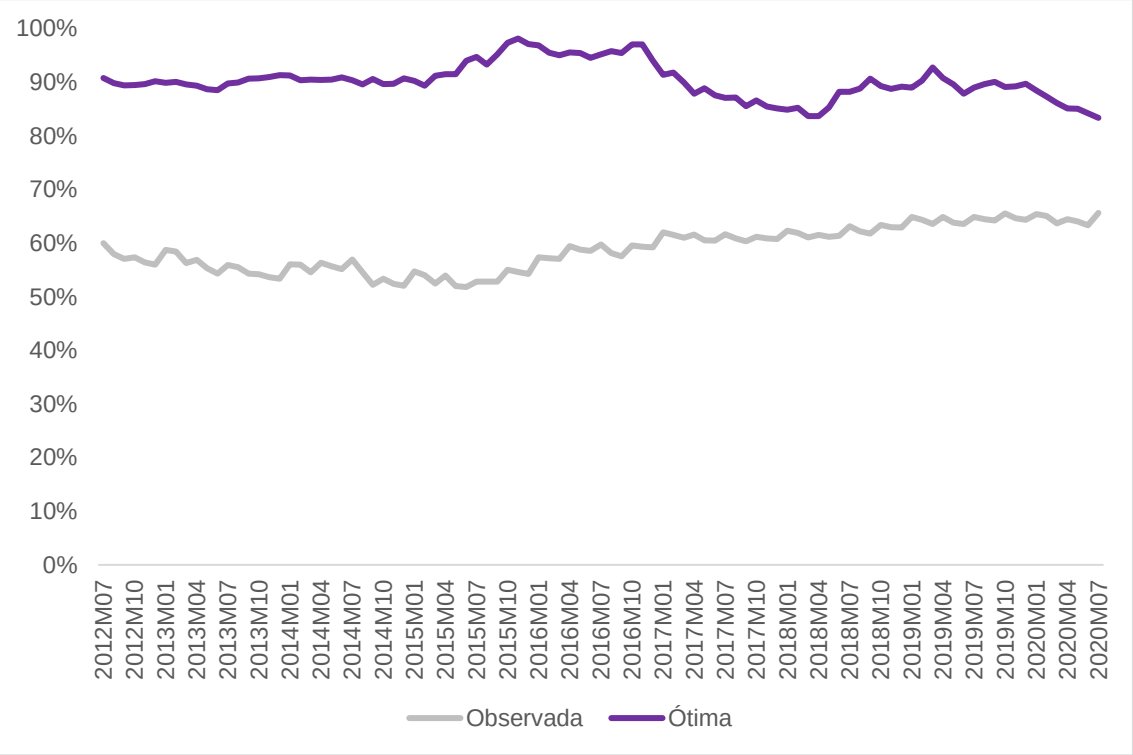
Elaboração: Próprio autor

Por último, a dívida pós fixada completa a estrutura de instrumentos desse modelo. De certo modo, era esperado que essa parcela da dívida ganhasse maior relevância em períodos em que a covariância entre os gastos do governo e a inflação tivessem uma trajetória decadente, sendo exatamente isso possível analisar na trajetória dessa relação. Além do mais, com o aumento da variância do crescimento

da taxa de câmbio real e da variância da inflação analisada no período, era se esperado também o aumento da parcela da dívida pós fixada.

Levando em consideração a estrutura de minimização de custos, o aumento da parcela da dívida pós fixada também é um fator bastante considerável. O Brasil vive atualmente um patamar de juros básicos e inflação em níveis baixos, o que corroboram para de emissões em maiores níveis de tais instrumentos, visando a minimização dos custos financeiros da dívida nacional.

Gráfico 9 – Otimização da composição da dívida pública – Parcela Pós Fixada



Elaboração: Próprio autor

Por último, na forma de complemento da análise das trajetórias das dívidas nominal e cambial, e seguindo os passos do que foi realizado em Goldfajn (1998) e Inhasz (2013), foi realizada um estudo da questão do trade-off da administração da dívida pública. Por um lado, ao emitir títulos indexados, o governo busca de certa forma minimiza as flutuações do valor real da sua dívida da variação dos preços locais e evita a tentação de curto e médio prazo de desinflacionar, ou desindexar, a sua dívida. No entanto, por outro lado, caso os choques econômicos sobre os gastos do

governo, por exemplo, forem positivamente correlacionados com choques inflacionários, então títulos nominais, por sua vez, serviriam como um contingente a dívida, reduzindo-a quando fosse mais necessário.

Para isso, foram estipuladas duas regressões OLS, tendo como variáveis respostas os percentuais ótimos encontrados através do modelo aqui proposto, de dívida nominal e cambial. Dentro dessas regressões foram utilizadas como variáveis explicativas as covariâncias e variâncias encontradas através dos resíduos do modelo GARCH aqui estipulado. Abaixo, regressões a serem utilizadas e um quadro de sinais esperados para cada uma das variáveis explicativas.

$$\theta = C_0 + C_1 * t + C_2 * \sigma_\pi^2 + C_3 * \sigma_{\pi,g} + C_4 * \sigma_{\pi,b} + C_5 * \frac{D}{Y} \quad (12)$$

$$\theta^* = C_6 + C_7 * t + C_8 * \sigma_q^2 + C_9 * \sigma_{q,g} + C_{10} * \sigma_{q,b} + C_{11} * \sigma_{q,\pi} + C_{12} * \frac{D}{Y} \quad (13)$$

Tabela 6 – Sinais esperados dos *trade-off* da dívida pública nacional

Equação	**Variáveis/Sinais Esperados**				
Theta	σ_π^2	$\sigma_{\pi,g}$	$\sigma_{\pi,b}$	$\frac{D}{Y}$	
	-	**+**	**-**	**+**	
Theta*	σ_q^2	$\sigma_{q,g}$	$\sigma_{q,b}$	$\sigma_{q,\pi}$	$\frac{D}{Y}$
	-	**+**	**-**	**-**	**+**

Os sinais dos coeficientes esperados deram sinais alinhados com os trabalhos de Inhasz (2013) e Goldfajn (1998), com exceção ao sinal da correlação entre a taxa de crescimento dos gastos do governo e a taxa de variação do câmbio real. Todos os testes foram estatisticamente relevantes na equação (12), porém na equação (13), as variáveis D/Y e a correlação da taxa de câmbio real e a taxa de crescimento da dívida pública apresentaram valor-p superior a 10%.

A variação da inflação apresentou um sinal negativo, conforme esperado, e comprova a ideia que os aumentos inflacionários vividos no Brasil devem corresponder a diminuição da demanda de instrumentos nominais da dívida pública. As principais razões disso se dão pela aversão ao risco do investidor, que em períodos de alta taxa de variação dos preços da economia local, estes se protegem a variações dos preços através de títulos indexados a preços. E, além disso, em períodos de alta inflação, os títulos nominais perdem valor, pois apresentam taxa e retornos pré-fixados, sendo ruim para os investidores em geral.

Por outro lado, a correlação entre as variáveis de gastos públicos e inflação são positivas, sendo assim, é esperado que das possíveis ações por parte da autoridade monetária é a emissão de moeda (Inhasz, 2013). Dessa forma, através desses choques inflacionários, que o Tesouro Nacional consegue aumentar o endividamento nacional de forma nominal, fazendo arrecadações necessária no curto prazo, porém conseguindo reduzir a parcela total real da dívida local. Ou seja, a correlação positiva entre essas duas variáveis, quando positiva, tende a levar a economia a um processo que as despesas centrais sejam acompanhadas por maior inflação e, portanto, o gestor da dívida tende emitir mais títulos de prefixados, por exemplo, através de LTN e NTN-F.

Tabela 7 – Modelo de suavização da tributação. Regressão OLS

Equação	**Resultados**					
Theta (12)	σ_{π}^{2}*10-3	$\sigma_{\pi,g}$*10-3	$\sigma_{\pi,b}$*10-3	D/Y		R^2
	-6,558	**19,345**	**-3,361**	**-0,832**	-	**0,84**
	(0,543)	(3,453)	(0,457)	(0,378)	-	
Theta* (13)	σ_{q}^{2}	$\sigma_{q,g}$*10-3	$\sigma_{q,b}$	$\sigma_{q,\pi}$*10-3	D/Y	R^2
	-0,442	**-3,129**	**-0,362**	**8,542**	**0,057**	**0,45**
	(0,118)	(1,993)	(0,263)	(2,641)	(0,004)	

Ainda dentro da equação (12), a correlação da taxa de inflação e taxa de crescimento da dívida pública, talvez essa seja o indicador que traga maior controversa. De um lado, tem-se que o aumento da inflação reduz a procura por títulos nominais (demanda), conforme já explicado. No entanto, quanto maior o choque

inflacionário, menor será o valor esperado da dívida total real. Concluindo, ambos os sinais poderiam ser aqui compreendidos, porém, uma das premissas levantadas neste trabalho é da aversão ao risco dos investidores e gestores da dívida. Dessa forma, por se tratarem de investidores racionais, que era esperado um sinal negativo para essa variável, que foi possível ser observados nos resultados aqui gerados.

Agora, em relação as variáveis da equação (13), sobre a variância da taxa de câmbio real, eram esperadas que quanto maior essa variação, menor fosse a parcela cambial ótima estipulada pelo modelo de suavização da tributação, ou seja um sinal negativo. Isso ocorre pelo fato que a variância cambial promove elevadas diferenciações no valor total da parcela cambial e no valor total da dívida nacional, sendo prejudicial em períodos de piora dos fatores macroeconômicos, como por exemplo o período de 2015 a 2016 vivido no Brasil. O sinal encontrado na equação foi correspondente ao esperado, e estatisticamente significativo.

Em relação a correlação dos gastos do governo e taxa de câmbio real, era se esperado um sinal positivo. O racional por trás disso, é que o governo deveria gerar uma proteção, como formato de hedge cambial, no caso de alguma variação de abrupta da moeda local versus a moeda estrangeira. No entanto, assim como em trabalhos passados, o resultado da regressão (13) foi de um coeficiente negativo para a variável estudado contrariando a ideia inicial. E, por tanto, quanto maior a correlação desses dois indicadores, menor será a parcela cambial ótima da dívida nacional.

Sobre a correlação da taxa de crescimento da dívida pública e a taxa de câmbio real, era esperado um coeficiente negativo. O racional por trás disso, é devido que aumentos significativos da dívida tendem a levar a depreciação da moeda local, devido ao aumento de risco dos investidores estrangeiros em investirem em títulos de dívida local. Portanto, a proporção da dívida cambial deveria ser reduzida, afim de evitar novos aumentos reais da dívida total.

7. Conclusão

O exercício proposto de continuação do trabalho do Goldfajn (1998), do modelo tradicional de suavização da tributação em dois períodos, estendendo o período analisado para infinitos períodos, conforme explicitado anteriormente por Cysne (2007) e Inhasz (2013). No entanto, diferente dos trabalhos anteriores, foi se necessário aqui a utilização de um modelo multivariado de variância condicional ao tempo, com o uso de instrumentos robustos, afim de minimizar a variância dos erros, e tornar a série não auto correlacionada ao longo do tempo analisado. Além disso, foram propostos variáveis de controle no modelo, afim de minimizar ainda mais as variâncias dos períodos de choques econômicos, em esferas globais ou locais.

Se for analisada o histórico da composição da dívida nacional, é possível observar que vem sido utilizado esses instrumentos com maior frequência para a realização de novas emissões. O gráfico (2), que mostra a fração de Letras financeiras do Tesouro sobre a dívida pública total comprova isso, que passou de 18% para 38% (aumento de 111%) de dezembro de 2014 a setembro de 2020. Dessa forma, é factível concluir que mesmo a dívida nacional não sendo composta por 100% da parcela de pós fixada, algo que na realidade poderia ser contra produtivo para o gestor da dívida, que existe sim uma aproximação de ambos os modelos de minimização de custos financeiros da dívida e o modelo de maximização do bem estar social, através da suavização da tributação ao longo do tempo.

Corroborando com essa aproximação, no início do século atual, próximo aos anos 2000, a parcela cambial da dívida local era aproximadamente 50% da dívida pública nacional. O que se pode observar, através dos dados observados de cada instrumento da dívida, e conforme Goldfajn (1998), essa parcela de instrumentos cambais diminui ao longo do tempo, sendo hoje, aproximadamente, apenas 4% da dívida pública federal total.

Agora, entrando na análise do trade-off da composição da dívida, o que se pode observar é que os sinais esperados foram todos encontrados na regressão proposta, com todos os coeficientes se mostrando estatisticamente significantes para a amostra estudada. No entanto, a parte relacionada ao estudo do trade-off da parcela cambial mostrou alguns sinais contrários ao esperado, e alguns dos coeficientes

estatisticamente não significativos, por causa do período de alta volatilidade cambial vivida nos últimos anos, de 2004 em diante.

8. Bibliografia

BARRO, Robert. *On the determination of the public debt.* Journal of Political Economy. 1979.

BOHN, Henning. *Tax Smoothing with Financial Instruments*. The American Economic Revie, 1990.

Checherita-Westphal e Rother. *The impact of high government debt on economic growth and its channels: An empirical investigation for the euro area*. European Economic Review, 2012, vol. 56, issue 7, 1392-1405

Cysne, R*. Public Debt Indexation and Denomination The case of Brazil: A comment*. 2007. Ensaios Econômicos Departamento de Economia Faculdade Getúlio Vargas de São Paulo (EPGE FGV – SP)

Giavazzi, F & Pagano, M*. Can Severe Fiscal Contractions Be Expansionary? Tales of Two Small European Countries*. Volume 5, 1990, pp 75-122 from National Bureau of Economic Research, Inc.

Goldfajn, Ilan. *Public Debt Indexation and Denomination: The case of Brazil*; International Monetary Fund, Research Department,1998

Goldfajn, Ilan. *Uma Nota sobre a composição ótima da dívida pública – Reflexões para o caso brasileiro*. Departamento de economia da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-RJ), 1999.

Inhasz, Juliana. *Dinâmica ótima da dívida pública.* Tese (Doutorado em Teoria Econômica) - Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.

Maia, Pedro & Garcia, Marcio. A gerência recente do endividamento público brasileiro. Revista de Economia Política, vol. 32, nº 2 (127), pp. 260-281, abril-junho/2012

Missale, A. *Tax Smoothing with price-index linked bonds: a case study of Italy and the UK*. De Cecco, M, Pechi, Piga, G, Org. Managing Public Debt, 1997.

Missale, A; Giavizzi, F. *Public debt management in Brazil*. World Bank, 2013.

Monetary Fund and the World Bank. *Guidelines for Public Debt Management,* 2001.

Moraes, A.; Divino, *A. Composição Ótima da Dívida Pública Brasileira e a Política Monetária*. Revista Brasileira de Economia, Rio de Janeiro, v. 73, n. 2, p. 213-233, jun. 2019.

Nechio, F. Dívida Pública Brasileira: *Decomposição de seu crescimento recente e simulação de sua trajetória para o futuro.* Monografia – Departamento de Economia, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-RJ), 2001.

Reinhart, C & Rogoff, K*. Growth in a Time of Debt*. National Bureau of Economic Research, 2010

Santos, D. Previsão de Volatilidade: *A Volatilidade Implícita como Variável Explicativa da Variância Condicional em Modelos GARCH*; INSPER, 2012

Tesouro Nacional. *Plano Anual de Financiamento* (Diversos)

Tesouro Nacional. *Composição ótima da dívida pública: Definição de uma referência de longo prazo*. 2011

Villela Pedras, G. *História da dívida pública no Brasil: de 1964 até os dias atuais em Dívida Pública: A experiencia Brasileira.* 2009

ANEXOS

1) Metodologia[21] de cálculo dos instrumentos da dívida pública

1.1 – Títulos prefixados / nominais → São títulos com rentabilidade definida no momento da sua compra, caso o investidor a carregue até sua data de vencimento. Os dois instrumentos principais com essa característica no Brasil são:

1.1.1 – Tesouro Prefixado (LTN) → Instrumento com fluxo de pagamento simples, no qual o investidor faz a compra do título e recebe seu valor de face na data de vencimento do título.

1.1.2 - Tesouro Prefixado com juros semestrais (NTN-F) → Instrumentos com fluxo de pagamentos semestrais, sendo esse rendimento recebido ao longo de todo o investimento. Na data do vencimento, existe pagamento de cupom e recebimento do valor face do título.

1.2 - Títulos Pós Fixados → São títulos que possuem o valor corrigido por um indexador, até o momento de seu vencimento. A rentabilidade desse título, portanto, depende do desempenho de seu indexador e da taxa do título no momento da compra. Os três principais instrumentos com essa característica no Brasil são:

1.2.1 – Tesouro IPCA^{+} (NTN-B)→ São títulos atrelados ao índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo, que reflete a variação dos preços das cestas de consumo das famílias, com renda de 1 a 40 salários mínimo mensalmente, acrescido dos juros estabelecidos no momento da compra. São títulos vinculados a rentabilidade em termos reais, vinculados ao aumento do poder de compra dos investidores. Assim como os títulos prefixados, existem dois tipos de NTN-B, sendo a primeira com fluxo de pagamento simples, e a segunda com fluxo de pagamentos semestrais.

[21] As metodologias foram retiradas do site do Tesouro direto em 21/12/2020. Site: https://www.tesourodireto.com.br/titulos/tipos-de-tesouro.htm

1.2.2 – Tesouro Selic (LFT) → Títulos pós fixados que seguem a variação da taxa de juros básica da economia, definida pelo Banco Central do Brasil. A remuneração de uma LFT está atrelada à variação diária da taxa SELIC, acrescido de um ágio ou deságio, no momento da compra, caso exista.

1.2.3 – Tesouro IGP-M^{+} → Títulos com características muito próximo as NTN-Bs, porem estão atreladas ao IGP-M (Índice Geral de Preços do Mercado), e não ao IPCA. Esses títulos são conhecidos como NTN-C, e apenas possuem características de pagamento de fluxos semestrais.

2) Estrutura de erros do modelo BEKK GARCH

A estrutura dos erros no modelo de GARCH BEKK será compreendida da seguinte maneira:

$$\varepsilon_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\pi,t} \\ \varepsilon_{q,t} \\ \varepsilon_{g,t} \\ \varepsilon_{b,t} \end{bmatrix} I_{t-1} \sim N(0, \Sigma_t) \qquad (14)$$

Aonde, segundo De-Losso (2012), temos que o vetor Σ é representado por (equação 14), na qual A, B e C tem como representação uma matriz n x n, sendo apenas C uma matriz triangular superior.

$$\Sigma_t = CC' + A\,\varepsilon_{t-1}\,\varepsilon'_{t-1}A' + B\Sigma_{t-1}B'_1$$

O intuito dessa matriz C ser triangular superior é por conta da tentativa de controle da covariância não condicional em que os elementos diagonais são iguais entre si, e, portanto, não se perde generalidade impondo essa parametrização a matriz C. O número de parâmetros que será estimado nesse modelo será de $n^2(p+q) + \frac{n(n+1)}{2}$, sendo uma economia a outros modelos GARCH multivariados.

3) Derivação do modelo de suavização da tributação em horizonte infinito

Definição de perda social

$$min_{\theta,\theta^*} E_{t-1} \sum_{j=t+1}^{\infty} \alpha^{j-1} \left[A \frac{(\tau_j - \tilde{\tau}_j)^2}{2} + \frac{\pi_j^2}{2} \right]$$

Aonde os termos da equação acima são:

- τ_j - Mede a quantidade total de imposto arrecadado, em moeda local, pelo governo no período j;
- $\tilde{\tau}_j$ - Mede a quantidade total de imposto anunciado que seria arrecadado, em moeda local, pelo governo no período j;
- α - Fator de desconto ($0 < \alpha < 1$)
- π_j - Taxa de inflação corrente em j;
- E - Operador de Valor Esperado;
- A - Comprometimento do governo junto às políticas monetárias e fiscais. Ou seja, mede o quanto o governo se empenha em cumprir com as medidas e os planos econômicos;
- θ - Proporções de dívida prefixada existentes na economia;
- θ^* - Proporções de dívida cambial existentes na economia;

Sujeito a uma restrição orçamentária

$$\tilde{\tau} = (1 + g_t)G_{t-1} + (1 + r_t)(1 - \theta_t - \theta_t^*)B_{t-1} + \left(\frac{1 + i_t}{1 + \pi_t}\right)\theta_t B_{t-1} + \left[\frac{(1 + i_t^*)(1 + e_t)}{1 + \pi_t}\right]\theta_t^* B_{t-1} - b_t$$

A solução do problema de minimização sujeito a restrição orçamentária aqui propostas, mostra que:

$$\theta = E_t\{A\tau_t[-(1 + r_t)B_{t-1}(\pi - \pi^e)]\} = 0$$

$$\theta^* = E_t\{A\tau_t[-(1 + r_t)B_{t-1}(q - q^e)]\} = 0$$

Retirando a expectativa da parcela do comprometimento do governo junto às políticas monetárias e fiscais atrelado a dívida e a taxa de juros real, chega-se em:

$$-A(1+r_t)BE_t[\tau_t(\pi-\pi^e)]=0$$

$$-A(1+r_t)BE_t[\tau_t(q-q^e)]=0$$

Multiplicando a restrição orçamentária aqui exposta por $E(\pi-\ \pi^e)$, obtêm-se:

$$E[\tau_t(\pi-\pi^e)]=E[G_t(\pi-\pi^e)]+(1+r)B_{t-1}E(\pi-\pi^e)-(1+r)B_{t-1}\theta[E(\pi-\pi^e)\ ]^2 \\ -(1+r)B\theta^*E[(q-\ q^e)(\pi-\ \pi^e)]-E[b_t(\pi-\ \pi^e)]$$

Lembrando que $\pi^e\ =E\{\pi\}=m$, temos que:

- $E[\tau_t(\pi-\pi^e)]=0$
- $E[G_t(\pi-\pi^e)]=\ \sigma_{g\pi}$
- $(1+r)B_{t-1}E(\pi-\pi^e)=0$
- $(1+r)B_{t-1}\theta[E(\pi-\pi^e)\ ]^2=(1+r)B\theta\sigma_\pi^2$
- $(1+r)B\theta^*E[(q-\ q^e)(\pi-\ \pi^e)]=(1+r)B\theta^*\sigma_{q\pi}$
- $E[b_t(\pi-\ \pi^e)]=\ \sigma_{\pi b}$

Ou seja, a restrição orçamentária multiplicado pelo fator $E(\pi-\ \pi^e)$, pode ser rescrita como:

$$0=\sigma_{g\pi}+0-(1+r)B\theta\sigma_\pi^2-(1+r)B\theta^*\sigma_{q\pi}-\ \sigma_{\pi b}$$

Isolando θ, pode-se observar que:

$$\theta=\frac{\sigma_{g\pi}-(1+r)B\theta^*\sigma_{q\pi}-\ \sigma_{\pi b}}{(1+r)B\theta\sigma_\pi^2}$$

Por outro lado, multiplicando a restrição orçamentária aqui exposta por $E(q - q^e)$, obtêm-se:

$$E[\tau_t(q - q^e)] = E[G_t(q - q^e)] + (1 + r)B_{t-1}E(q - q^e) - (1 + r)B_{t-1}\theta E[(\pi - \pi^e)((q - q^e)] - (1 + r)B\theta^* E[(q - q^e)]^2 - E[b_t(q - q^e)]$$

Assim, podemos entender que:

- $E[\tau_t(q - q^e)] = 0$
- $E[G_t(q - q^e)] = \sigma_{gq}$
- $(1 + r)B_{t-1}E(q - q^e) = 0$
- $(1 + r)B_{t-1}\theta E[(\pi - \pi^e)((q - q^e)] = (1 + r)B\theta\sigma_{q\pi}$
- $(1 + r)B\theta^* E[(q - q^e)]^2 = (1 + r)B\theta^*\sigma_q^2$
- $E[b_t(q - q^e)] = \sigma_{qb}$

Isolando θ^*, pode-se observar que:

$$\theta^* = \frac{\sigma_{gq} - (1 + r)B\theta\sigma_{\pi q} - \sigma_{qb}}{(1 + r)B\theta^*\sigma_q^2}$$

Agora, considerando que os gastos do governo cresçam a uma taxa g_t, sobre o montante de gastos do governo em t-1, ou seja, em G_{t-1}, e que a relação de G_{t-1} sobre B_{t-1} seja igual a β_t, substituindo a equação de θ em θ^*, encontrasse que:

$$\theta = \beta \left\{\frac{\sigma_{g\pi,t}\,\sigma_{q,t}^2 - \sigma_{b\pi,t}\,\sigma_{q,t}^2 - \sigma_{gq,t}\,\sigma_{q\pi,t} + \sigma_{bq,t}\,\sigma_{q\pi,t}}{(1 + r_{t-1})\left[\sigma_{q,t}^2\sigma_{\pi,t}^2 + (\sigma_{gq,t})^2\right]}\right\}$$

$$\theta_t^* = \beta \left\{\frac{\sigma_{gq,t}\,\sigma_{\pi,t}^2 - \sigma_{bq,t}\,\sigma_{\pi,t}^2 - \sigma_{g\pi,t}\,\sigma_{q\pi,t} + \sigma_{b\pi,t}\,\sigma_{q\pi,t}}{(1 + r_{t-1})\left[\sigma_{q,t}^2\sigma_{\pi,t}^2 + (\sigma_{\pi q,t})^2\right]}\right\}$$