Insper Instituto de Ensino e Pesquisa
Programa de Mestrado Profissional em Economia

Alex Monti

Um estudo do efeito da não arbitragem na classe de modelos Nelson - Siegel de estrutura a termo da taxa de juros para o Brasil

São Paulo
2010

Alex Monti

Um estudo do efeito da não arbitragem na classe de modelos Nelson-Siegel de estrutura a termo da taxa de juros para o Brasil

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Economia do Insper Instituto de Ensino e Pesquisa, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Economia.

Área de concentração: Finanças e Macroeconomia Aplicadas
Orientador: Prof. Dr. Marco Lyrio – Insper

São Paulo

2010

Monti, Alex

Um estudo do efeito da não arbitragem na classe de modelos Nelson Siegel de estrutura a termo da taxa de juros para o Brasil / Alex Monti; orientador Prof. Dr. Marco Lyrio – São Paulo: Insper, 2010.

58 f.

Dissertação (Mestrado – Programa de Mestrado Profissional em Economia. Área de concentração: Finanças e Macroeconomia Aplicadas) – Insper Instituto de Ensino e Pesquisa.

1. Nelson Siegel 2. Taxa de Juros 3. Estrutura a termo da taxa de juros 4. Modelo afim 5. Não arbitragem 6. Filtro de Kalman

FOLHA DE APROVAÇÃO

Alex Monti

Um estudo do efeito da não arbitragem na classe de modelos Nelson-Siegel de estrutura a termo da taxa de juros para o Brasil

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Economia do Insper Intituto de Ensino e Pesquisa, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Economia.

Área de concentração: Finanças e Macroeconomia Aplicadas

Aprovado em: Julho/2010

Banca Examinadora

Prof. Dr. Marco Lyrio
Orientador

Instituição: Insper Assinatura: _____

Prof. Dr. José Luiz Rossi Júnior

Instituição: Insper Assinatura: _____

Prof. Dr. Fernando Nascimento de Oliveira

Instituição: Banco Central do Brasil Assinatura: _____

DEDICATÓRIA

À minha inspiração, Adriana. A minha base, meus pais, Rosa e Fernando.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer ao meu orientador, Marco, por ter me guiado e incentivado durante todas as fases desta dissertação.

À minha adorável Adriana, pela imensurável paciência durante todo o longo processo desse mestrado, suportando minhas chatices e ansiedades.

À minha família, pelo seu apoio incondicional.

E a todos que de alguma forma me ajudaram na construção dessa dissertação.

RESUMO

MONTI, Alex. **Um estudo do efeito da não arbitragem na classe de modelos Nelson-Siegel de estrutura a termo da taxa de juros para o Brasil.** 2010. 58 f. Dissertação (Mestrado) – Insper Instituto de Ensino e Pesquisa, São Paulo, 2010.

Esse trabalho tem como objetivo estudar o efeito da adição de critérios de não arbitragem na construção da estrutura a termo da taxa de juros (ETTJ) para o mercado brasileiro. Foram utilizados os dados dos contratos futuros da taxa de juros negociados na BM&F (Bolsa de Mercadorias e Futuros) na comparação de dois modelos baseados no modelo paramétrico Nelson-Siegel, sob métricas da análise dentro da amostra e fora da amostra para diferentes horizontes de previsão e maturidades. Nesses modelos, são estimados fatores latentes, além da dinâmica intertemporal desses fatores. Os resultados refletem o desempenho superior do modelo que usa critérios de não arbitragem para prazos intermediários e longos da ETTJ brasileira nas previsões fora da amostra. Concluímos, portanto que a adição de critérios de não arbitragem para ETTJ brasileira está incorporada aos preços dos instrumentos financeiros analisados.

Palavras-chave: Nelson-Siegel; Taxa de Juros; Estrutura a termo da taxa de juros; Modelo afim; Não arbitragem, Filtro de Kalman

ABSTRACT

MONTI, Alex. **A study of the effect of no-arbitrage in the class of Nelson-Siegel term structure interest rates models in Brazil**. 2010. 58 f. Dissertação (Mestrado) – Insper Instituto de Ensino e Pesquisa, São Paulo, 2010.

This paper studies the effect of no-arbitrage restrictions on the construction of the Brazilian's term structure of interest rates. We use data from interest rate futures market traded on the BM&F in the comparison of two models based on the Nelson-Siegel parametric model. We use in-sample and out of sample metrics and different forecasting horizons and maturities. In these models, we estimate latent factors, besides their intertemporal dynamics. Results show the superior performance of the model that uses no-arbitrage criteria for medium term and long term yields. We conclude that the prices negotiated of the analyzed financial instruments incorporate the no-arbitrage criteria.

Keywords: Nelson-Siegel; Interest rate; Yield term structure; Affine model; No-arbitrage; Kalman Filter

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Estatísticas descritivas da amostra 31
Tabela 2 - Parâmetros estimados no *cross-section* de DL - AR(1) 39
Tabela 3 – Parâmetros estimados no modelo CDR. 40
Tabela 4 - Comparação dentro da amostra 43
Tabela 5 – Comparação das previsões fora da amostra. 45
Tabela 6 - Estatísticas descritivas dos Betas estimados no modelo de DL 52

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Diversos formatos de possíveis estruturas a termo da taxa de juros. 15
Figura 2 – Exemplo dos pesos dos fatores do modelo de DL. 20
Figura 3 - Taxas de juros no período analisado. 31
Figura 4 - Mediana, Q1 (25%) e Q3 (75%) de cada uma das maturidades escolhidas. 32
Figura 5 - Gráfico dos pesos do modelo de DL com λ de 0,0609. 34
Figura 6 - Gráfico de pesos com λ de 0,014232. 35
Figura 7 - Série temporal do Beta 1 – DL. 36
Figura 8 - Série temporal do Beta 2 – DL. 36
Figura 9 - Série temporal do Beta 3 – DL. 37
Figura 10 - Exemplo de ajustes do modelo DL. 38
Figura 11 - Diferença da velocidade de decaimento com $\boldsymbol{\lambda}$ de DL e de CDR. 40
Figura 12 - CDR - Série temporal do $\boldsymbol{X1}$. 41
Figura 13 – CDR - Série temporal do $\boldsymbol{X2}$ 41
Figura 14 - CDR – Série temporal do $\boldsymbol{X3}$ 41
Figura 15 - Gráfico das médias dos erros dentro da amostra. 43
Figura 16 - Gráfico dos erros das previsões fora da amostra para o modelo DL. 46
Figura 17 - Gráfico dos absolutos das previsões fora da amostra para o modelo CDR. 46
Figura 18 - Taxas ao longo do tempo na amostra. Prazos 21 e 42 dias úteis. 52
Figura 19 - Taxas ao longo do tempo na amostra. Prazos 63 e 126 dias úteis. 53
Figura 20 - Taxas ao longo do tempo na amostra. Prazos 189 e 252 dias úteis. 54
Figura 21 - Taxas ao longo do tempo na amostra. Prazo 378 dias úteis. 55
Figura 22 - *Box plot* dos erros de previsão fora da amostra. 56
Figura 23 - Erros dentro da amostra (Prazo 21 dias úteis) 56
Figura 24- Erros dentro da amostra (Prazo 42 dias úteis) 57
Figura 25 - Erros dentro da amostra (Prazo 63 dias úteis) 57
Figura 26- Erros dentro da amostra (Prazo 126 dias úteis) 57
Figura 27- Erros dentro da amostra (Prazo 189 dias úteis) 58
Figura 28 - Erros dentro da amostra (Prazo 252 dias úteis) 58
Figura 29- Erros dentro da amostra (Prazo 378 dias úteis) 58

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO **12**

2. REVISÃO DA LITERATURA **13**

3. MODELAGEM **18**

3.1 DL 19

3.2 CDR 22

3.2.1 Descrição do modelo *22*

3.2.2 Estimação *25*

4. APLICAÇÃO **29**

4.1 Bases de Dados 29

4.1.1 Instrumentos Financeiros *29*

4.1.2 Observações *30*

4.2 Calibração do parâmetro de decaimento exponencial (*λ*). 32

4.2.1 DL *33*

4.2.2 CDR *35*

4.3 Análise empírica e resultados 35

4.3.1 DL *35*

4.3.2 CDR *39*

4.4 Métodos de Comparação 42

4.4.1 Comparação dentro da amostra *42*

4.4.2 Comparação das previsões fora da amostra *44*

5. CONCLUSÕES **47**

REFERÊNCIAS **49**

APÊNDICES **52**

1. Introdução

A construção da estrutura a termo da taxa de juros (ETTJ) é um assunto de extrema importância para o mercado financeiro na precificação dos mais diversos instrumentos financeiros de renda fixa. A ETTJ é utilizada por gestores de portfólios na alocação de ativos, gerentes de risco de mercado no controle do risco das carteiras, na construção de políticas monetárias pelos governos e bancos centrais, no apreçamento de derivativos, na avaliação de projetos e na estrutura de capital das empresas no que se refere à emissão de dívida. Através da estrutura a termo, é construído o planejamento das empresas, refletindo-se a expectativa da economia embutida neles. A ETTJ tem uma questionada relação com a economia real no que tange o consumo e o investimento, assim como a expectativa da inflação futura. Além disso, uma das formas pelas quais as autoridades monetárias atuam na economia é através da taxa de juros de curto prazo e no controle do estoque de ativos. Com essa perspectiva, é essencial o entendimento da ETTJ para a análise do desempenho dessas políticas monetárias.

Dessa forma, é necessário entender os requisitos dos modelos de ETTJ e a compreender o aumento destes por demanda dos mercados. Esse aumento tem sido acompanhado de perto pela literatura crescente nesse assunto. Os principais requisitos para a ETTJ podem ser apontados como a identificação de suas forças determinantes e a compreensão do modo de atuação da política monetária pelos bancos centrais. Além dos requisitos usuais de flexibilidade numérica, econométrica e finalmente a inexistência da possibilidade de arbitragem. Nessa literatura, tem se destacado a classe de modelos baseada no artigo **Nelson - Siegel [1987]** por sua parcimônia, ajuste aos dados adequado e facilidade de uso.

O presente estudo visa contribuir com a literatura comparando o uso de dois modelos da ETTJ e o **efeito da adição do termo de não arbitragem** na ETTJ brasileira. Os modelos comparados são propostos no artigo de **Diebold e Li [2006]** e no artigo de **Christensen, Diebold e Rudebusch [2007].** Este último adiciona os critérios de não arbitragem supracitados. Os resultados mostram que a adição do termo de não arbitragem

melhora o desempenho das previsões fora da amostra para o médio e o longo prazo da ETTJ brasileira.

O trabalho é organizado da seguinte maneira: a seção 2 descreve a literatura existente para o mercado internacional e brasileiro. A seção 3 demonstra o arcabouço teórico dos modelos a serem comparados e os métodos de comparação. Na seção 4 é feita a aplicação dos modelos supracitados ao mercado brasileiro, em que é explorada a adição dos critérios de não arbitragem. O trabalho termina com a seção 5 que é constituída pelas conclusões.

2. Revisão da Literatura

A literatura de estrutura a termo da taxa de juros é vasta com os mais diferentes tipos de modelos. Dentre os modelos, podemos separar em classes conforme o enfoque primário de cada um. Desta forma, dentro da vasta gama de modelos podemos citar os modelos baseados em não arbitragem (daqui em diante denominados *Arbitrage Free Models* (AF)), os modelos baseados em equilíbrio (EM) e a classe de modelos baseados no artigo **Nelson-Siegel [1987].**

Os modelos de não arbitragem (AF) procuram ajustar os pontos de mercado dos instrumentos financeiros escolhidos com equações definidas. Essas equações podem ser polinômios, *splines* cúbicos ou *splines* exponenciais, como em **Vasicek e Fong [1982]**. Esses modelos acabam sendo bons modelos para comparações dentro da amostra e fracos empiricamente na previsão das taxas de juros de longo prazo. Porém, são muito importantes no apreçamento de derivativos como mostrado em **Hull e White [1990].** Além disso, esse tipo de modelo tem pouco a dizer sobre a dinâmica da taxa de juros, já que o modelo é empregado utilizando-se dados de apenas um dia de mercado e não na série histórica de preços.

Os modelos de equilíbrio (EM) se preocupam com a dinâmica das taxas de juros instantâneas. Para essa classe de modelos, é comum o uso de modelos afins (*Affine models*), que trazem a conveniência de utilizar equações lineares de fatores latentes.

Já a classe de modelos denominada **Nelson-Siegel [1987]** (abreviados como **Nelson-Siegel**), tem como objetivo a construção de um modelo simples e parcimonioso para a

estrutura a termo da taxa de juros, que seja flexível o suficiente para representar os mais diversos formatos de curvas. Dentro dessa gama de formatos, podemos citar:

- Monotônicas ascendentes: quanto maior o prazo, maior a taxa de juros, porém com aumentos que diminuem no tempo, convergindo assintoticamente para uma taxa de juros de longo prazo. Isso demonstra uma expectativa de aumento das taxas de juros pelos participantes do mercado.

- *Humped*: As taxas de juros de curto prazo e de longo prazo são próximas, porém as taxas de prazo médio são maiores que as taxas de juros de curto prazo e de longo prazo.

- *Flat*: todas as maturidades têm taxas de juros parecidas.

- Invertidas: sob certas condições não usuais, as taxas de juros de longo prazo podem ser menores que as taxas de juros de curto prazo, demonstrando uma desaceleração futura na economia ou até uma recessão futura. Além disso, esse tipo de curva mostra que a expectativa para inflação é de permanência em baixa.

Podemos observar os formatos (*flat*,invertida e monotônica ascendente) supracitados na Figura 1 - Diversos formatos de possíveis estruturas a termo da taxa de juros.

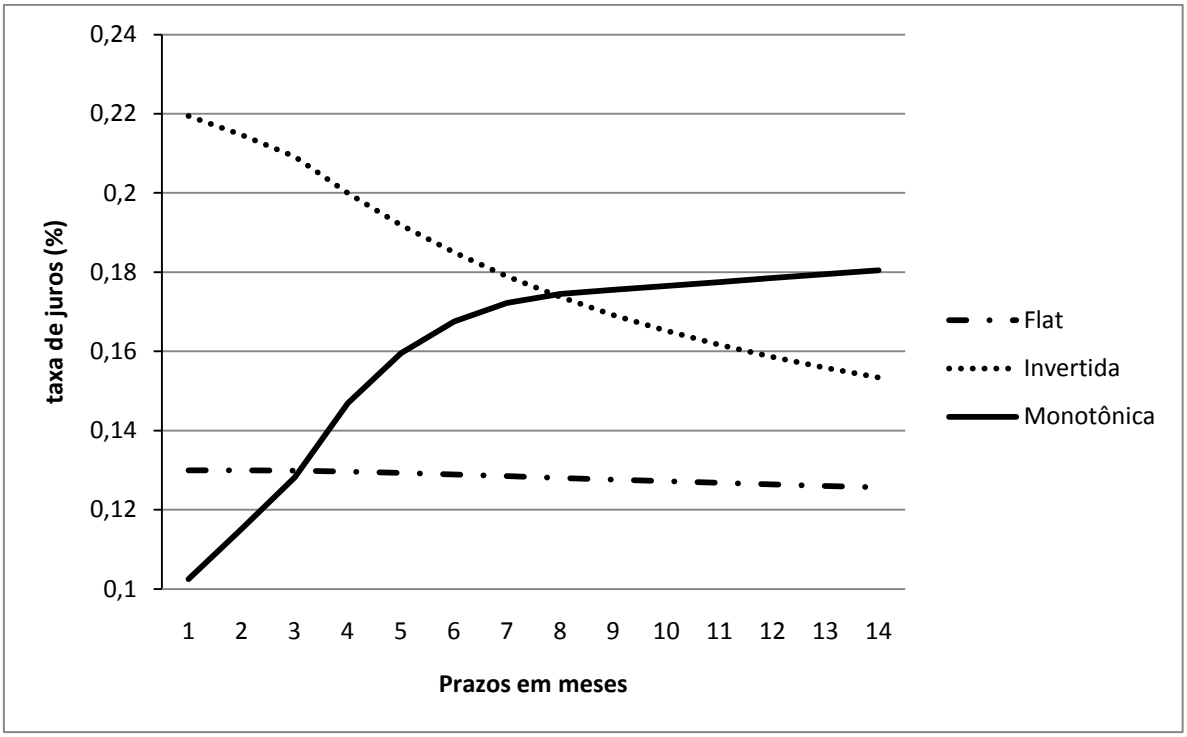

Figura 1 - Diversos formatos de possíveis estruturas a termo da taxa de juros.

Para explicar os possíveis formatos da ETTJ descritos acima, podemos citar:

A hipótese de expectativas diz que a taxa corrente *forward* é igual à expectativa das taxas à vista de curto prazo futuras.

A hipótese do prêmio por liquidez explica que o retorno em títulos de longo prazo deve exceder os retornos esperados de títulos de curto prazo para compensar os investidores pela falta de liquidez dos títulos de longo prazo. Conseqüentemente, mesmo que o mercado esteja prevendo taxas futuras de curto prazo nos níveis atuais, a estrutura a termo é uma função crescente da maturidade.

A hipótese de segmentação de mercado e habitat preferido supõe que diferentes participantes do mercado têm preferências por títulos de prazos específicos. Assim, devido às condições diferentes de oferta e demanda, os preços e taxas de juros nos diferentes segmentos têm uma relativa independência, deixando a curva não necessariamente suave e contínua entre os diferentes segmentos. Por exemplo, gestores de fundos de pensão têm preferência por títulos de longo prazo.

Em **Longstaff [2000]** e **Fama e Bliss [1987]** são mostradas evidências que corroboram com a hipótese de expectativas para o mercado norte americano. Em **Longstaff [2000]**, são usados dados das taxas de juros de curto prazo negociadas em transações de *overnight* e em transações com acordo de recompra (*repo rates).* A literatura para o mercado

brasileiro é escassa quando comparada ao mercado internacional. O trabalho de **Marçal e Valls [2007]** testa a hipótese de expectativas e não encontra evidências empíricas que a corroborassem no mercado brasileiro.

Um modelo ótimo para a ETTJ deve obedecer às seguintes premissas:

- Deve proporcionar um amoldamento aos dados aceitável.
- As taxas *zero coupon* e taxas *forward* devem ser positivas em todos os pontos da ETTJ.
- A ETTJ resultante deve ser contínua.
- Deve existir uma taxa de juros assintótica para o longo prazo da ETTJ.

Em **Nelson-Siegel [1987],** é observado que a classe de funções que representam bem as curvas de juros são soluções de equações diferenciais ou de diferenças. É sugerida, então, uma equação baseada em três fatores que define a taxa de juros ***y*** em função da maturidade τ:

$$y(\tau) = \alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3)\frac{\beta}{\tau}\left(1 - e^{-\frac{\tau}{\beta}}\right) - \alpha_3 e^{-\frac{\tau}{\beta}} \qquad (1)$$

tendo os parâmetros da equação acima uma interpretação econômica bastante plausível. A soma dos parâmetros α_1 e α_2 é a taxa de juros instantânea de curto prazo, α_1 é o valor assintótico da taxa de juros de longo prazo e finalmente a diferença y(∞) – y(0) pode ser interpretada como a inclinação da ETTJ. Já o parâmetro α_3 afeta a curvatura em prazos intermediários, com $\alpha_3 > 0$ temos funções côncavas e para $\alpha_3 < 0$ funções convexas. Além disso, o β pode ser interpretado como a velocidade de convergência para a taxa assintótica.

Um ponto interessante de **Nelson-Siegel [1987]** é a vantagem dada pela característica assintótica da convergência para a taxa de juros de longo prazo. Além disso, a parcimônia do modelo faz com que o mesmo seja facilmente estimado. Contudo, não evita a possibilidade de arbitragem, já que não são incluídas restrições com esse intuito.

Em **Diebold e Li [2006] (**daqui em diante **DL**)**,** é construído um *framework* a partir da equação sugerida em **Nelson-Siegel [1987],** com três fatores dinâmicos (dependentes do tempo) que são interpretados como fatores latentes correspondentes à

inclinação, à curvatura e ao nível. Daqui em diante, este será descrito como *Dynamic Nelson-Siegel* (DNS).[1] O modelo utilizado segue a equação abaixo de três fatores:

$$y_t(\tau) = \beta_{1t} + \beta_{2t}\left(1 - \frac{\exp(-\lambda_t\tau)}{\lambda_t\tau}\right) + \beta_{3t}\left(\frac{1-\exp(-\lambda_t\tau)}{\lambda_t\tau} - \exp(-\lambda_t\tau)\right) \quad (2)$$

sendo os fatores $\{\beta_{1t}, \beta_{2t}, \beta_{3t}, \lambda_t\}$ estimados fixando um λ_t e com isso podendo ser usado mínimos quadrados lineares para cada mês t. As previsões do modelo foram comparadas a um passeio aleatório. Entre os resultados desse artigo, pode-se citar o bom desempenho de previsão fora da amostra (para prazos maiores que um mês, o modelo do artigo foi muito superior ao passeio aleatório), simplicidade de aplicação e finalmente uma boa aderência às premissas para uma ETTJ ótima.

Em **Christensen, Diebold e Rudebusch [2007] (**daqui em diante **CDR**)**,** é observado que o DNS é uma versão moderna dos modelos de fatores latentes que representam à curvatura, à inclinação e ao nível. Além disso, é descrita a fácil estimação do modelo e a não imposição de restrições importantes que levam à possibilidade de existência de arbitragem. Com isso, é sugerida uma alteração para impor restrições de não arbitragem, criando uma nova classe de modelos denominados *Arbitrage Free Dynamic Nelson-Siegel* ou AFDNS. Isso foi obtido utilizando a mesma lógica de transformação dos parâmetros estáticos de **Nelson-Siegel** utilizada por **DL**.

Em **CDR,** são comparados quatro modelos. Os dois primeiros modelos têm análise em tempo discreto e sem a imposição de não arbitragem, o terceiro e o quarto modelos têm a condição de não arbitragem adicionada. O primeiro e o terceiro modelos são modelos com fatores independentes (a correlação é nula entre os fatores latentes). Já o segundo e o quarto modelos têm a possibilidade de correlação adicionada aos fatores latentes. Em todos os modelos é empregado o Filtro de Kalman para a estimação dos fatores. O procedimento de manipulação dos dados foi similar ao procedimento utilizado em **DL** e o resultado obtido com o **terceiro modelo** tem desempenho em previsões fora da amostra melhor que os outros três modelos.

---

[1] A base de dados desse artigo foi composta por títulos públicos americanos (U.S. Treasuries) do final de cada mês. Foi utilizada a média entre a oferta de compra e a de venda no período de janeiro 1985 a dezembro 2000. Foram eliminados títulos com opções de recompra e títulos com problemas de liquidez. Os prazos foram ajustados com uma interpolação linear para obter vértices em prazos fixos.

Em outra linha de pesquisa da literatura, temos modelos que incorporam variáveis macroeconômicas na estimação da ETTJ, como em **Ang e Piazzesi [2003]**. Nesse trabalho, foi mostrado que a adição de variáveis macroeconômicas contribui para uma melhor previsão fora da amostra. Em **Diebold, Rudebusch e Arouba [2006],** estudou-se a relação bidirecional entre as variáveis macroeconômicas e a estrutura a termo da taxa de juros.

Apesar de escassa, a literatura para o mercado brasileiro, quando comparada ao mercado internacional, alguns trabalhos proeminentes abrolharam nos últimos anos. Por exemplo, no trabalho de **Vicente e Tabak[2007]** para o mercado brasileiro é feita uma análise da capacidade preditiva e a comparação entre um modelo DNS **(DL)** e um modelo afim (baseado na proposta de **Almeida e Vicente [2006]**). Nesse artigo, para o teste de acuidade dos modelos foi empregado o teste descrito em **Diebold e Mariano [1995]**. O resultado encontrado mostra um desempenho superior de **DL** para previsões fora da amostra.

Em **Caldeira, Moura e Portugal [2009]**, a formulação de **DL** é utilizada em previsões da ETTJ brasileira, empregando-se contratos de futuros de DI1 no período de Janeiro de 2006 a Fevereiro de 2009. Ao invés de utilizar a estimação em dois passos (usual em grande parte dos estudos baseados em **DL**), é utilizado um Filtro de Kalman. Os resultados para previsões fora da amostra de um mês, três meses e seis meses tiveram desempenho superior quando comparados a **DL** de dois passos e a um passeio aleatório.

Os resultados obtidos nos estudos do mercado brasileiro são condizentes aqueles encontrados no mercado norte americano. Isto é, o modelo de **DL** fornece uma capacidade de previsão superior aos outros modelos comparados para taxas de juros de longo prazo. Porém, são necessárias mais pesquisas para encontrar modelos que tenham capacidade preditiva adequada às taxas de juros de curto prazo.

3. Modelagem

Nesta seção, é apresentado o arcabouço teórico do modelo de DL e do modelo de **CDR**. Primeiro, é apresentado o modelo de **DL** com a estimação em dois estágios dos três fatores latentes. A dinâmica dos fatores latentes é modelada como um processo auto-regressivo de ordem 1. Seguido, da apresentação do modelo **CDR**, também de três fatores

latentes, porém com a dinâmica dos fatores implementada com um vetor auto-regressivo de ordem 1.

3.1 DL

O modelo de **DL** soluciona o problema clássico de estimação de taxas à vista a partir de títulos *zero coupon* com diversas maturidades. As taxas de juros à vista são calculadas através de sucessivos cálculos das taxas *forward* implícitas não suavizadas. Com isso, uma curva de taxas *forward* suavizadas é obtida através de uma regressão dos dados em uma forma funcional paramétrica proposta por **Nelson-Siegel.** Neste modelo, os fatores são associados às taxas de juros de curto, médio e longo prazo. Esses fatores são em número de três e ganharam a interpretação usada em outros modelos, como o de análise de componentes principais. Um fator ficou com a interpretação de nível, outro fator de inclinação e o último de curvatura.

A taxa *forward* instantânea para uma maturidade $\boldsymbol{\tau}$ é suposta como a solução de uma equação diferencial de segunda ordem com raízes reais e diferentes. Ela pode ser expressa como:

$$f_t(\tau) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} e^{-\lambda_t \tau} + \beta_{3,t} \lambda_t e^{-\lambda_t \tau} \tag{3}$$

A equação acima pode ser vista como uma constante mais uma função de Laguerre, que é um polinômio multiplicado por um termo de decaimento exponencial. Dessa forma, a estrutura a termo das taxas à vista conseqüentemente é

$$y_t(\tau) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} \frac{\left(1 - e^{-\lambda_t \tau}\right)}{\lambda_t \tau} + \beta_{3,t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} - e^{-\lambda_t \tau} \right) \tag{4}$$

A curva de juros é determinada pelos três fatores e pelos pesos *(loadings)* associados a eles. Além dos três fatores $\beta_{1,t}, \beta_{2,t}$ e $\beta_{3,t}$, também existe o parâmetro λ, associado à velocidade de decaimento exponencial dos fatores. Assim sendo, pequenos valores de λ estão associados a um decaimento suave e grandes valores de λ a um decaimento rápido.

Conforme se verifica no trecho do texto sobre calibração do λ, para o modelo de **DL** foi utilizado um λ fixo $\boldsymbol{\lambda_t} = \boldsymbol{\lambda}$ para qualquer t.

O peso associado ao primeiro fator $\beta_{1,t}$ tem valor 1. Já o segundo fator $\beta_{2,t}$ tem peso correspondente a $\frac{(1-e^{-\lambda_t \tau})}{\lambda_t \tau}$, começando com 1 e convergindo a zero assintoticamente, conforme a Figura 2. Finalmente, o terceiro fator $\boldsymbol{\beta_{3,t}}$ tem peso de $\left(\frac{\boldsymbol{1-e^{-\lambda_t \tau}}}{\boldsymbol{\lambda_t \tau}} - \boldsymbol{e^{-\lambda_t \tau}}\right)$ correspondente à curvatura da ETTJ.

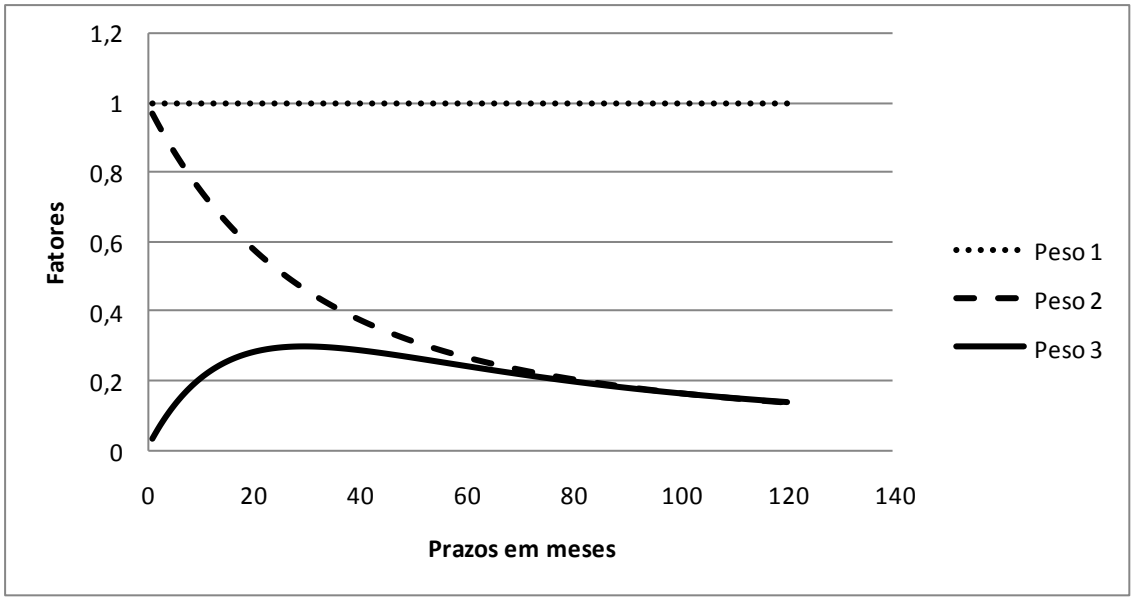

Figura 2 – Exemplo dos pesos dos fatores do modelo de DL.

O peso constante e igual a 1, dá uma interpretação a $\beta_{1,t}$ de uma taxa de juros de longo prazo. O peso de $\beta_{2,t}$ foi definido como inclinação e correspondente a $y_t(\infty) - y_t(0)$, convergindo assim para uma inclinação de $-\beta_{2,t}$, como explicado em **Frankel e Lown [1994]**.

DL discorrem sobre fatos estilizados da ETTJ norte americana e da capacidade do seu modelo em replicá-las, a saber:

- A curva da taxa de juros média é crescente e côncava. Na abordagem de **Nelson-Siegel**, a curva de juros média está associada aos valores médios de $\beta_{1,t}$, $\beta_{2,t}$ e $\beta_{3,t}$.
- A curva da taxa de juros pode assumir diversas formas ao longo do tempo, conforme fato supracitado. Dependendo dos valores específicos

assumidos pelos fatores $\beta_{1,t}$, $\beta_{2,t}$ e $\beta_{3,t}$, é possível que a ETTJ assuma qualquer um desses formatos.

- A dinâmica das taxas é mais persistente que a dinâmica das diferenças entre as taxas relativas a prazos diferentes (*spreads*). A persistência das taxas pode ocorrer se a dinâmica do fator $\beta_{1,t}$ for persistente, enquanto a baixa persistência dos *spreads* pode ser observada se a dinâmica do fator $\beta_{2,t}$ for pouco persistente.

Assim sendo, o procedimento utilizado corresponde a escolher um λ fixo para todo t e para todas as maturidades, seguido da execução de uma regressão com mínimos quadrados ordinários com os pontos dos títulos *zero coupon* para cada dia de mercado. Com a observação de títulos com maturidades $(\tau_1, \tau_2 , \tau_3, \dots , \tau_n)$ para cada dia de mercado **t**, obteve-se uma série de fatores $\beta_{1,t}$ $\beta_{2,t}$ e $\beta_{3,t}$.

Dessa forma, fica claro, pelo menos a princípio, que o modelo proposto está em acordo com os principais fatos estilizados observados na ETTJ norte-americana.

Nesse ponto, é importante notar que se o objetivo de um estudo baseado em **DL** for comparar as taxas de juros dentro da amostra, pode se parar por aqui. Mas o estudo de **DL** foi adiante, visto que o mesmo tinha como escopo comparar previsões fora da amostra.

Foi assumido no modelo que os fatores $\beta_{1,t}$, $\beta_{2,t}$ e $\beta_{3,t}$ seguem processos auto-regressivos de ordem 1 (AR(1)) . Em outro modelo proposto em **DL**, os fatores latentes foram colocados em um formato estado-espaço, na forma de um vetor auto-regressivo de primeira ordem, VAR (1).

No caso do AR(1), a dinâmica dos fatores é definida através da equação (5).

$$\beta_{\mathrm{i,t+h}} = c_i + \gamma_i \beta_{it} + \epsilon_{\mathrm{t}} \quad , i = 1{,}2 \text{ e } 3 \tag{5}$$

sendo **i** correspondente a 1, 2 e 3 dos fatores $\beta_{1,t}$, $\beta_{2,t}$ e $\beta_{3,t}$ e *h* um horizonte correspondente ao número de dias a frente do fator β original. Com isso, pode-se definir a expectativa da taxa de juros para uma maturidade $\boldsymbol{\tau}$ e **h** períodos a frente do tempo **t.**

$$E_t\left(y_{t+h}(\tau)\right) = \beta_{1,t+h} + \beta_{2,t+h}\frac{\left(1-e^{-\lambda_{t+h}\tau}\right)}{\lambda_{t+h}\tau} + \beta_{3,t+h}\left(\frac{1-e^{-\lambda_{t+h}\tau}}{\lambda_{t+h}\tau} - e^{-\lambda_{t+h}\tau}\right) \quad (6)$$

No presente estudo, utilizou-se o modelo baseado em um processo auto-regressivo de ordem 1 - AR(1) mostrado na equação (5). Portanto, a equação (6) será utilizada durante o processo de previsão fora da amostra estudada na seção 4.4.1.

3.2 CDR

Nesta seção, será apresentado o arcabouço teórico do modelo **CDR,** seguido da metodologia utilizada para a estimação do mesmo.

3.2.1 Descrição do modelo

Em **CDR,** tem-se uma derivação de um modelo afim de não arbitragem da estrutura a termo da taxa de juros. Os fatores latentes têm a interpretação semelhante à interpretação fornecida em **DL,** porém agora em tempo contínuo.

A derivação de **CDR** para um modelo AFDNS (*Affine Arbitrage Free Dynamic Nelson-Siegel)*, começa do modelo tradicional em tempo contínuo afim definido em **Duffie e Kan [1996].** Nesse artigo, são definidos um processo de difusão afim, um espaço de probabilidade filtrado e uma filtração. A variável de estado X_t é assumida como um processo de Markov que soluciona a seguinte equação diferencial estocástica.

$$dX_t = K^Q[\theta^Q - X_t]dt + \Sigma D(X_t)dW_t^Q \quad [2] \quad (7)$$

Os fatores latentes têm a interpretação semelhante à interpretação fornecida em **DL.** A equação (6) pode ser reescrita como:

[2] Em que W_t^Q é um movimento browniano padrão.

$$y_t(\tau) = L_t + S_t \frac{\left(1 - e^{-\lambda_t \tau}\right)}{\lambda_t \tau} + C_t \left(\frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} - e^{-\lambda_t \tau} \right) \tag{8}$$

O primeiro fator $\mathrm{L_t}$ pode ser interpretado como o nível, o fator $\mathrm{S_t}$ como a inclinação e o fator $\mathrm{C_t}$ como a curvatura. A partir do modelo acima e da equação (8), é demonstrado que a aproximação mais satisfatória da função de taxa de juros de **Nelson-Siegel** tem a seguinte forma:

$$y_t(\tau) = \mathrm{X_t^1} + \mathrm{X_t^2} \frac{\left(1 - e^{-\lambda_t \tau}\right)}{\lambda_t \tau} + \mathrm{X_t^3} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} - e^{-\lambda_t \tau} \right) - \frac{\alpha_t(\tau)}{(\tau - t)} \tag{9}$$

em que $\mathrm{X_t^1}, \mathrm{X_t^2}$ e $\mathrm{X_t^3}$ corresponde aos fatores latentes $\mathrm{L_t}$, $\mathrm{S_t}$ e $\mathrm{C_t}$ respectivamente da equação (8).

O último termo da equação acima tem a interpretação de *termo de ajuste da taxa por maturidade*. A partir da matriz de volatilidade $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$, esse termo é deduzido como:

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha_t(\tau)}{(\tau - t)} &= \frac{\bar{A}(\tau - t)^2}{6} \\
&+ \bar{B} * \left[\frac{1}{2\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^3} * \frac{\left(1 - e^{-\lambda(\tau - t)}\right)}{(\tau - t)} + \frac{1}{4\lambda^3} * \frac{\left(1 - e^{-2\lambda(\tau - t)}\right)}{(\tau - t)} \right] \\
&+ \bar{C} * \left[\frac{1}{2\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} * \left(e^{-\lambda(\tau - t)}\right) + \frac{1}{4\lambda} * (\tau - t) e^{-2\lambda(\tau - t)} - \frac{3}{4\lambda^2} e^{-2\lambda(\tau - t)} - \frac{2}{\lambda^3} \frac{\left(1 - e^{-\lambda(\tau - t)}\right)}{(\tau - t)} + \frac{5}{8\lambda^3} * \left(\frac{1 - e^{-2\lambda(\tau - t)}}{(\tau - t)} \right) \right] \\
&+ \bar{D} * \left[\frac{1}{2\lambda} (\tau - t) + \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda(\tau - t)} - \frac{1}{\lambda^3} \left(\frac{1 - e^{-\lambda(\tau - t)}}{(\tau - t)} \right) \right] \\
&+ \bar{E} * \left[\frac{3}{\lambda^2} e^{-\lambda(\tau - t)} + \frac{1}{2\lambda} (\tau - t) + \frac{1}{\lambda} (\tau - t) e^{-\lambda(\tau - t)} - \frac{3}{\lambda^3} \frac{\left(1 - e^{-\lambda(\tau - t)}\right)}{(\tau - t)} \right] \\
&+ \bar{F} * \left[\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda(\tau - t)} - \left(\frac{1}{2\lambda^2} \right) e^{-2\lambda(\tau - t)} - \frac{3}{\lambda^3} \frac{\left(1 - e^{-\lambda(\tau - t)}\right)}{(\tau - t)} + \frac{3}{4\lambda^3} \frac{\left(1 - e^{-2\lambda(\tau - t)}\right)}{(\tau - t)} \right]
\end{aligned}$$

sendo:

$$\bar{A} = \sigma_{11}^2$$

$$\bar{B} = \sigma_{21}^2 + \sigma_{22}^2$$
$$\bar{C} = \sigma_{31}^2 + \sigma_{32}^2 + \sigma_{33}^2$$
$$\bar{D} = \sigma_{11}\sigma_{21}$$
$$\bar{E} = \sigma_{11}\sigma_{31}$$
$$\bar{F} = \sigma_{21}\sigma_{31} + \sigma_{22}\sigma_{32}$$

É interessante notar que a escolha da matriz de volatilidade Σ afeta o valor da taxa de juros tanto através da dinâmica das variáveis de estado como através do termo de ajuste supracitado.

Vale notar que os modelos seguem uma estimação em um único estágio. Esse tipo de estimação é preferível à estimação em dois passos, como em **DL**, já que a estimação dos parâmetros na segunda etapa não considera a incerteza sobre os valores dos parâmetros do primeiro estágio. Para isso, é utilizado o Filtro de Kalman, em que os parâmetros são estimados concomitantemente.

Outra vantagem do modelo apresentado é o fato de estimar-se o fator de decaimento exponencial λ em conjunto com os outros fatores. Já no modelo de dois estágios, esse fator é calibrado *ex-ante* de acordo com algum critério previamente escolhido. Essa calibração é questionada por **Almeida et al. [2007]**, em que diferentes escolhas de calibração de λ geram resultados bem diferentes de previsões fora da amostra.

Os modelos de **CDR** são formulados em tempo contínuo diferentemente de **DL**. A equação de transição para eles tem a forma comentada anteriormente na medida Q de probabilidade, porém agora na medida de probabilidade P:

$$dX_t = K^p[\theta^p - X_t]dt + \Sigma dW_t^p \tag{10}$$

No modelo (*independent-factor AFNS* ou modelo afim de não arbitragem Nelson-Siegel de fatores independentes), as três variáveis de estado são independentes e têm a forma abaixo na medida de probabilidade P.

$$\begin{pmatrix} dX_t^1 \\ dX_t^2 \\ dX_t^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11}^p & 0 & 0 \\ 0 & k_{22}^p & 0 \\ 0 & 0 & k_{33}^p \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \theta_1^p \\ \theta_2^p \\ \theta_3^p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_t^1 \\ X_t^2 \\ X_t^3 \end{pmatrix} \right] dt + \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_t^{1,p} \\ dW_t^{2,p} \\ dW_t^{3,p} \end{pmatrix} \tag{11}$$

Já no modelo mais flexível (*correlated-factor AFNS* ou modelo afim de não arbitragem Nelson-Siegel de fatores correlacionados), existe a possibilidade já comentada dos fatores, assim como os choques, serem correlacionados.

$$\begin{pmatrix} dX_t^1 \\ dX_t^2 \\ dX_t^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11}^p & k_{12}^p & k_{13}^p \\ k_{21}^p & k_{22}^p & k_{23}^p \\ k_{31}^p & k_{32}^p & k_{33}^p \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \theta_1^p \\ \theta_2^p \\ \theta_3^p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_t^1 \\ X_t^2 \\ X_t^3 \end{pmatrix} \right] dt + \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_t^{1,p} \\ dW_t^{2,p} \\ dW_t^{3,p} \end{pmatrix} \tag{12}$$

A equação de medida para *correlated-factor AFNS e independent-factor AFNS* tem a forma abaixo, com a constante $\frac{\alpha(\tau_i)}{\tau_i}$ já definida na seção de termo de ajuste da taxa de juros por maturidade.

$$\begin{pmatrix} y_t(\tau_1) \\ y_t(\tau_2) \\ \vdots \\ y_t(\tau_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{(1-e^{-\lambda\tau_1})}{\lambda\tau_1} & \left(\frac{1-e^{-\lambda\tau_1}}{\lambda\tau_1} - e^{-\lambda\tau_1}\right) \\ 1 & \frac{(1-e^{-\lambda\tau_2})}{\lambda\tau_2} & \left(\frac{1-e^{-\lambda\tau_2}}{\lambda\tau_2} - e^{-\lambda\tau_2}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{(1-e^{-\lambda\tau_n})}{\lambda\tau_n} & \left(\frac{1-e^{-\lambda\tau_n}}{\lambda\tau_n} - e^{-\lambda\tau_n}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t^1 \\ X_t^2 \\ X_t^3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\alpha(\tau_1)}{\tau_1} \\ \frac{\alpha(\tau_2)}{\tau_2} \\ \vdots \\ \frac{\alpha(\tau_n)}{\tau_n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_t(\tau_1) \\ \epsilon_t(\tau_2) \\ \vdots \\ \epsilon_t(\tau_n) \end{pmatrix} \tag{13}$$

No presente estudo, estimou-se o modelo afim livre de arbitragem Nelson-Siegel de fatores independentes, devido ao melhor desempenho em previsões fora da amostra encontrado em **CDR** nesse modelo. Além disso, esse modelo requer menor tempo computacional para a maximização da log verossimilhança, que corrobora com a idéia de parcimônia na estimação da ETTJ proposta em **Nelson e Siegel [1987].**

3.2.2 Estimação

Para a estimação do modelo afim de não arbitragem Nelson-Siegel de fatores independentes e tempo contínuo, utilizou-se a discretização de Δt (tempo entre estimações, no caso desse estudo 1 dia útil). Dessa forma, a equação de transição de estado tem a forma:

$$X_t = \left(I - \exp\left(-K^p \Delta t\right)\right)\theta^p + \exp\left(-K^p \Delta t\right) X_{t-1} + \eta_t \quad [3] \tag{14}$$

em que η_t tem distribuição normal de média zero e matriz de variância Q diagonal.

Já a equação de medida tem a forma:

$$y_t = A + BX_t + \epsilon_t \tag{15}$$

sendo **A** constante definida acima como termo de ajuste da taxa por maturidade. A matriz **B** corresponde aos pesos de Nelson-Siegel. A estrutura do erro ϵ_t segue uma distribuição normal de média zero e variância H. A matriz H é diagonal e estimada durante a maximização da log verossimilhança com o uso do Filtro de Kalman.

Cálculo da matriz de covariância ($\boldsymbol{Q_t}$) para o modelo escolhido

É observado em **CDR** que a matriz $\boldsymbol{Q_t}$ tem uma forma especial. Essa forma segue a equação:

$$Q_t = \int_0^{\Delta t} \exp(-K^p s)\, \Sigma\Sigma' \exp(-K^{p\prime} s)\, ds \tag{16}$$

Diferentemente do **CDR**, no presente estudo utilizou-se a solução numérica para a variância não condicional e condicional obtida em **Fackler [2000].** Neste**,** é deduzida uma solução para a média e a variância condicional de processos de difusão afim, a partir da equação diferencial estocástica abaixo:

$$dx = (a + Ax)dt + Cdiag\left(\sqrt{b + Bx}\right)dW \tag{17}$$

Sendo a e b (n x 1) e A, B e C (n x n) que podem ser constantes ou funções do tempo. Dessa forma, são deduzidas a média e a variância condicional como:

---

[3] Para garantir a estabilidade do modelo na estimação, foi adicionado um critério de tal forma a garantir que a matriz K^p seja positivamente definida.

$$\begin{pmatrix} E_t[x_{t+h}] \\ vec(Var_t[x_{t+h}]) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_o \\ V_o \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_1 \\ V_1 \end{pmatrix} x_t \tag{18}$$

Sendo que m_o, V_o, m_1 e V_1 satisfazem dois sistemas de equações diferenciais ordinárias em h:

$$\begin{pmatrix} m_o \\ V_o \end{pmatrix}' = \tilde{a} + \tilde{A}\begin{pmatrix} m_o \\ V_o \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} m_1 \\ V_1 \end{pmatrix}' = \tilde{A}\begin{pmatrix} m_1 \\ V_1 \end{pmatrix}$$

Onde:

$$\tilde{a} = \begin{bmatrix} a \\ (C \otimes C)Db \end{bmatrix}$$

E

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ (C \otimes C)DB' & (A \otimes I_n + I_n \otimes A) \end{bmatrix}$$

sendo que $\otimes$ representa o produto Kronecker de matrizes. Para o presente estudo, vale observar que:

$$a = [K^p \theta^p] \qquad A = -K^p \qquad b = 1 \qquad B = 0 \qquad C = \Sigma$$

Faltando definir a matriz D (n^2 x n) que tem valor 1 se i= (j-1)n+j e 0 caso contrário. Utilizando-se as equações acima e a técnica de Runge-Kutta de solução de equações diferenciais ordinárias, a matriz de variância Q_t é obtida em cada iteração do Filtro de Kalman.

Filtro de Kalman

O Filtro de Kalman para o modelo acima é utilizado para maximizar a função de verossimilhança do modelo. O algoritmo do Filtro de Kalman utilizado foi construído a partir da representação estado-espaço e do algoritmo descritos em **Hamilton [1994].** Além disso, foi utilizada a metodologia apresentada em **Nyholm [2008]** para a codificação em *Matlab* do Filtro de Kalman**.**

As condições iniciais do modelo são obtidas utilizando–se $X_o = \theta^p$ e

$Q_0 = \int_0^\infty \exp(-K^p s)\, \Sigma\Sigma' \exp(-K^{p\prime} s)\, ds.$

O passo de previsão pode ser observado através das equações abaixo:

$$X_{t|t-1} = E^p[X_t|Y_{t-1}] = (I - \exp(-K^p \Delta_t))\theta^p + \exp(-K^p \Delta_t)\, X_{t-1} \tag{19}$$

$$\Sigma_{t|t-1} = \exp(-K^p \Delta_t)\ \Sigma_{t-1} \exp(-K^p \Delta_t)' + Q_t \tag{20}$$

sendo $X_{t|t-1}$ o valor do fator X_t em t-1, e $\Sigma_{t|t-1}$ o valor da variância da transição de estado.

No tempo t, com o passo de atualização, tem-se o cálculo do novo valor de X_t conforme equação abaixo.

$$X_t = E[X_t|Y_t] = X_{t|t-1} + \Sigma_{t|t-1} B F_t^{-1} v_t \tag{21}$$

sendo: $v_t = y_t - E[y_t|Y_{t-1}] = y_t - A - BX_{t|t-1}$ e $F_t = cov(v_t) = B\Sigma_{t|t-1}B' + H$

A variância também é atualizada neste passo:

$$\Sigma_t = \Sigma_{t|t-1} - \Sigma_{t|t-1} B' F_t^{-1} B \Sigma_{t|t-1} \tag{22}$$

Com as variáveis acima calculadas, é possível calcular a log verossimilhança

$$\log l(y_1, \ldots, y_T) = \sum_{t=1}^{T} \left(-\frac{N}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log |F_t| - \frac{1}{2} v_t' F_t^{-1} v_t\right) \tag{23}$$

em que N é o número de taxas de juros observadas. A log verossimilhança foi maximizada através de algoritmo no *Matlab* usando as funções *fminsearch* e *fmincon*.

4. Aplicação

Esta seção está dividida em 4 subseções. Na subseção 4.1, a base de dados é descrita com os instrumentos financeiros utilizados e os gráficos da amostra escolhida. Seguido da subseção 4.2, em que são demonstrados os critérios de escolha do parâmetro de decaimento exponencial λ. Já na subseção 4.3, são mostrados os resultados da estimação dos dois modelos escolhidos. Em seguida, a seção termina com a modelagem e a comparação das previsões fora da amostra.

4.1 Bases de Dados

Nesta seção, são descritos os instrumentos financeiros utilizados na estimação dos dois modelos (**DL** e **CDR**). Além disso, é feita uma análise da amostra utilizada nas estimações, através das estatísticas descritivas da mesma.

4.1.1 Instrumentos Financeiros

Os dados utilizados nesse estudo são os contratos futuros DI1 negociados na BM&F. O contrato de DI1 é um contrato em que é negociado o futuro de taxa média de depósitos interfinanceiros de um dia. A taxa média de depósitos interfinanceiros de um dia (DI) é calculada pela Central de Custódia e de Liquidação Financeira de Títulos (CETIP), expressa em taxa efetiva anual, base 252 dias úteis. O objeto de negociação do contrato futuro é a taxa de juros efetiva até o vencimento do contrato, definida pela acumulação das taxas diárias de DI no período compreendido entre a data de negociação e o último dia de negociação do contrato. O preço é calculado através da equação abaixo:

$$\text{Preço} = \frac{100.000}{\left(1 + \frac{\mathrm{i}}{100}\right)^{\frac{\mathrm{n}}{252}}} \tag{24}$$

onde **n** é o numero de dias úteis entre o dia de negociação e o vencimento do contrato, **i** a taxa negociada no contrato em pontos percentuais.

É interessante notar o tamanho do lote de negociação (R$ 100.000,00), que dificulta a negociação desses contratos por pequenos investidores. Para outras taxas de juros, como a taxa de juros em dólares negociada no Brasil (Cupom Cambial), existem contratos menores denominados *mini*. Vale observar também a existência de custos transacionais que dependem do volume negociado e das posições em aberto.

A liquidação é feita através de ajustes diários das posições em aberto no dia anterior e dos negócios do dia. Além disso, é exigida uma margem como forma de garantia para todos os participantes com posição em aberto. Dessa forma, observa-se que o contrato DI1 é muito semelhante a um *zero coupon* exceto pelo fato comentado acima da liquidação ser feita por ajustes diários.

Os contratos têm maturidades com vencimento no primeiro dia útil do mês dos vencimentos. Existem contratos para os meses que iniciam cada trimestre (janeiro, abril, julho e outubro), assim como os quatro meses subseqüentes ao mês corrente.

O uso dos contratos futuros das taxas de juros no mercado brasileiro, ao invés de títulos públicos, é usual dada à existência de prêmio por risco de soberano. Essa diferença foi observada em **Cabral [2007].** Nesse artigo, foi observada a existência de prêmio de risco embutido nos preços dos títulos públicos brasileiros da dívida interna. Conforme a previsão da teoria dos prêmios de risco, esse prêmio cresce com o prazo, assim como a volatilidade associada. Dessa forma, a utilização de contratos DI1 para a estimação da ETTJ brasileira parece bem adequada.

4.1.2 Observações

O período analisado foi de 06/Jan/2003 a 03/Jan/2007, obtendo-se assim 994 dias de negociação (dias úteis) e conseqüentemente 994 observações de cada um dos futuros utilizados. Os preços/taxas utilizados foram aqueles do último negócio de cada dia. Os contratos utilizados foram os **onze primeiros** contratos disponíveis em cada dia de mercado que representam os contratos mais líquidos para o período analisado.

A partir das maturidades observadas em cada dia, foi feito o ajuste para maturidades fixas de 21, 42, 63, 126, 189, 252 e 378 dias úteis como de praxe nos estudos de renda fixa, através de interpolação *spline* cúbica. As estatísticas descritivas para cada vértice estão colocadas na Tabela 1 e a Figura 3 mostra a evolução de todas as curvas no período

analisado. As Figuras 18, 19, 20 e 21 apresentam em mais detalhes cada uma das curvas das taxas de juros do período em questão.

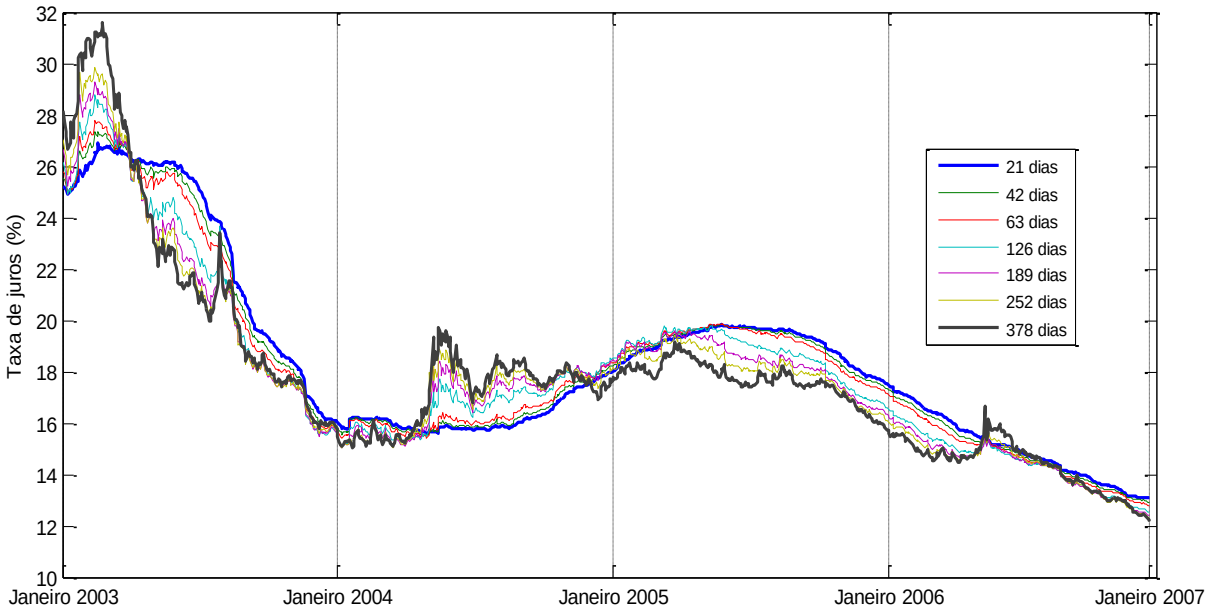

Figura 3 - Taxas de juros no período analisado. Curva de 21 dias úteis em destaque.

Tabela 1 - Estatísticas descritivas da amostra. Prazos em dias úteis. Unidades em %.

Prazos	Mínimo	Máximo	Média	Mediana	Desvio Padrão
21	13,0752	26,9068	18,3437	17,4895	3,6395
42	12,9300	27,3168	18,2643	17,5555	3,6417
63	12,7942	27,8086	18,1889	17,4663	3,6241
126	12,5266	28,7713	18,0152	17,3242	3,5501
189	12,4031	29,2851	17,9174	17,5304	3,5501
252	12,2882	29,8708	17,8757	17,6319	3,6005
378	12,1956	31,5902	17,8924	17,5299	3,7917

Pode-se notar que no período analisado existem grandes variações nas taxas de juros de curto prazo, refletindo as várias mudanças na condução da política monetária Brasileira. Além disso, observa-se a ocorrência do formato invertido da ETTJ na média das taxas de juros de cada prazo. No desvio padrão observado, nota-se uma diminuição da

volatilidade com o aumento do prazo, até a maturidade de 189 dias úteis. Após essa maturidade, ocorre uma inversão, com o aumento do prazo a volatilidade aumenta. **DL** observou para a ETTJ norte americana uma diminuição da volatilidade com o aumento do prazo, fato diferente do observado no presente estudo.

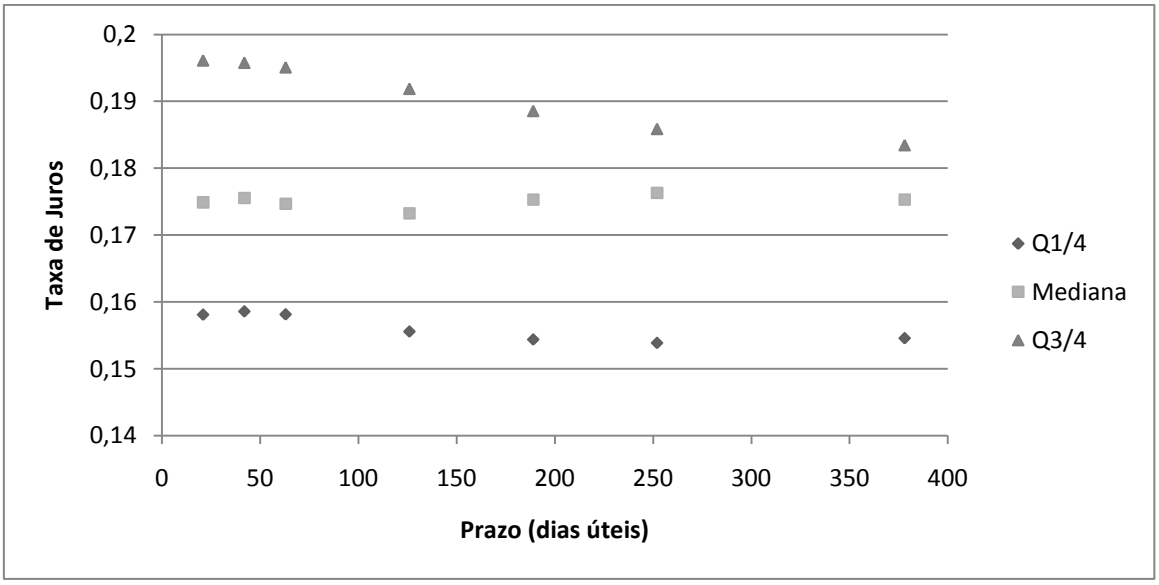

Figura 4 - Mediana, Q1 (25%) e Q3 (75%) de cada uma das maturidades escolhidas.

Na Figura 4, mostramos a mediana das taxas de juros dos prazos escolhidos, assim como o primeiro quartil (Q1/4) e terceiro quartil (Q3/4). É possível notar através da Figura 4, que as distribuições das taxas de juros em volta da suas medianas tendem a ser assimétricas.

É importante notar a diferença nos estudos de ETTJ para o mercado americano e para o mercado brasileiro no que tange ao prazo. Para o estudo de **DL**, o prazo estudado foi de 120 meses. Para o mercado brasileiro, este prazo é inviável devido à falta de liquidez para os prazos longos. É de praxe no Brasil estudos mais curtos, com prazos indo normalmente até dois anos, como em **Vicente e Tabak [2007]** que estuda o prazo máximo de 1 ano e **Almeida et al. [2007]** que utilizou o prazo máximo de 2,7 anos.

4.2 Calibração do parâmetro de decaimento exponencial (*λ*).

A seguir é discutida a escolha do λ (parâmetro de decaimento exponencial) para os modelos **DL** e **CDR**. É importante notar que a escolha do λ fixo para todas

maturidades em **DL** simplifica a estimação do modelo, assim como, reduz a chance de otimizações numéricas dispendiosas. Dessa maneira, o modelo **DL** pode ser estimado com o uso de mínimos quadrados ordinários para cada dia de mercado.

4.2.1 DL

Em **Almeida et al. [2008],** são estudados diferentes critérios de calibração do parâmetro do modelo que controla a inclinação e a curvatura de juros. A escolha do λ é analisada com critérios de previsão fora da amostra. Testa-se, então, a robustez do modelo de **DL** com relação a critérios de escolha do λ.

No estudo de **Almeida et al. [2008],** são utilizados quatro critérios de escolha do λ. O **primeiro** critério é a minimização do erro quadrático médio dentro da amostra. O **segundo** critério é a minimização do erro quadrático médio na previsão fora da amostra para o horizonte de 1 dia. Já o **terceiro** e o **quarto** critérios são semelhantes ao segundo, porém com horizontes de 1 semana (5 dias úteis) e 1 mês (21 dias úteis). As previsões foram feitas impondo-se um processo auto-regressivo (AR(1)) dos fatores latentes. Os dados de mercado utilizados no artigo foram os dados do período de Novembro 2004 a Junho 2006 do mercado futuro da bolsa de mercadorias e futuros (BM&F).

Os resultados encontrados mostram que o primeiro critério não favorece uma maturidade em particular em detrimento das outras. Outro fato observado foi a menor dispersão dos erros ao longo da curva para todos os horizontes de previsão analisados. Desse modo, é possível concluir que esse critério tem a melhor capacidade preditiva de ETTJ como um todo. No entanto, caso o objeto do estudo seja uma maturidade em especifico, a escolha do λ com o horizonte de previsão conforme os critérios 2,3 e 4 resulta em uma melhor previsão.

No modelo de **DL,** o parâmetro λ é baseado no fato do λ determinar a maturidade em que o peso da curvatura tem o seu valor máximo. Esse critério foi proposto para um prazo médio da ETTJ, encontrando-se para o prazo de 30 meses um λ igual a 0,609, conforme gráfico abaixo:

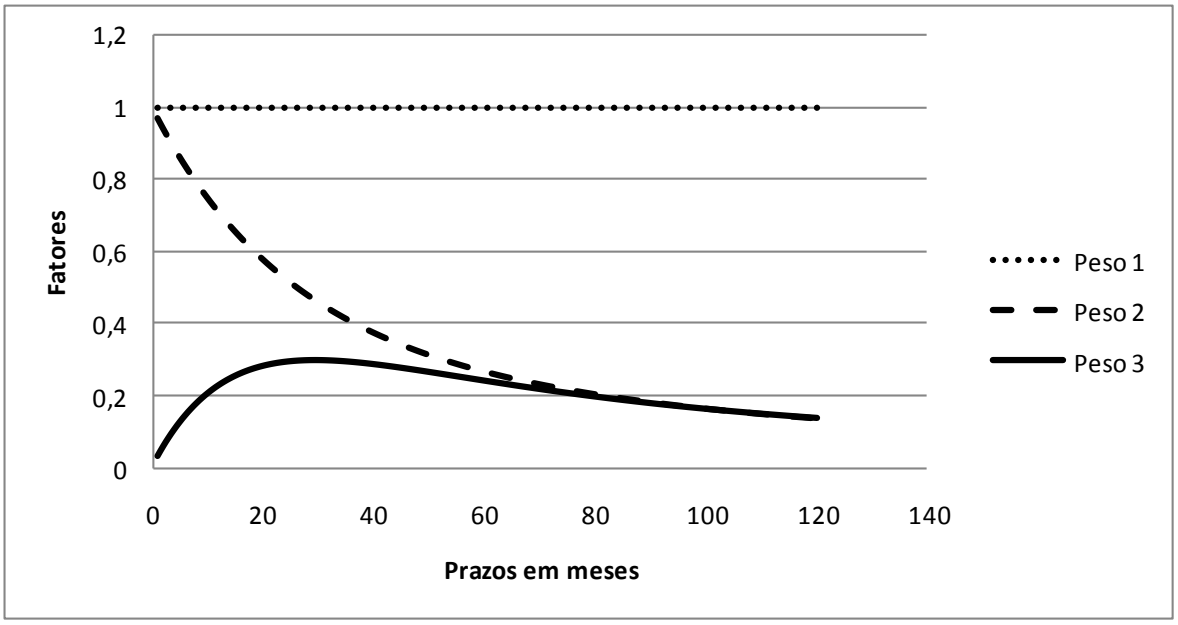

Figura 5 - Gráfico dos pesos do modelo de DL com λ de 0,0609.

Como a conclusão de **Almeida et al. [2008]** não é incisiva para previsões fora da amostra e incluindo-se o fato do presente estudo analisar a previsão para vários horizontes de previsão fora da amostra, adotou-se o critério de **DL** para maximizar a curvatura. Como a curva brasileira é mais curta que a curva americana, escolheu-se maximizar a curvatura para o prazo de 6 meses, correspondentes a 126 dias úteis.

Dessa forma, será fixado o valor λ (λ_t= λ para todo t) de tal forma que será possível a utilização de mínimos quadrados lineares para a estimação dos fatores. Aplicando-se o critério acima, obteve-se o λ de 0,014232. Com o seu gráfico de pesos correspondentes:

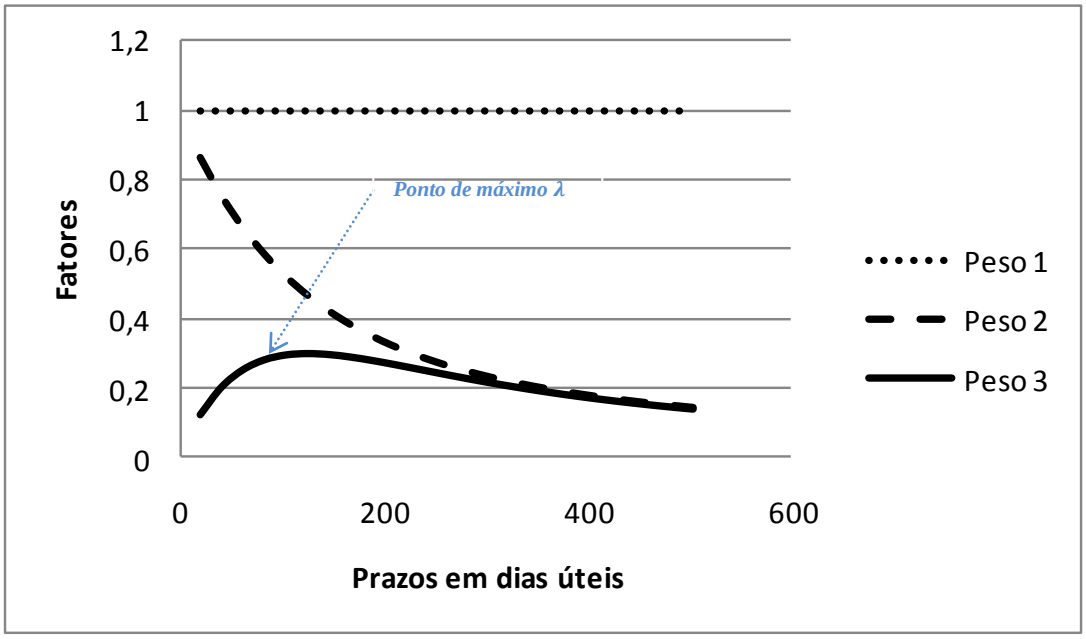

Figura 6 - Gráfico de pesos com λ de 0,014232.

4.2.2 CDR

Para o **CDR**, o parâmetro λ é fixo para todas as maturidades e estimado em conjunto com os outros parâmetros. Dessa forma, não existe a necessidade da calibração desse parâmetro *ex-ante*. Neste estudo, foi utilizado o λ escolhido para a estimação do modelo de **DL** como condição inicial para a estimação do Filtro de Kalman.

4.3 Análise empírica e resultados

Nesta seção, são apresentados os parâmetros estimados de cada um dos modelos escolhidos e as séries correspondentes a cada um dos fatores latentes. Além disso, são apresentados os resultados das estimações feitas no presente estudo.

4.3.1 DL

Nesse modelo, foram estimados os parâmetros do primeiro estágio através da equação (4), realizando-se uma regressão com mínimos quadrados ordinários para cada dia

de mercado. Isso é possível devido à linearização do modelo obtida com a utilização de λ fixo para todas as maturidades, obtendo-se assim, as séries correspondentes a cada um dos fatores, os resíduos e os erros correspondentes. As séries temporais correspondentes aos betas são apresentadas a seguir.

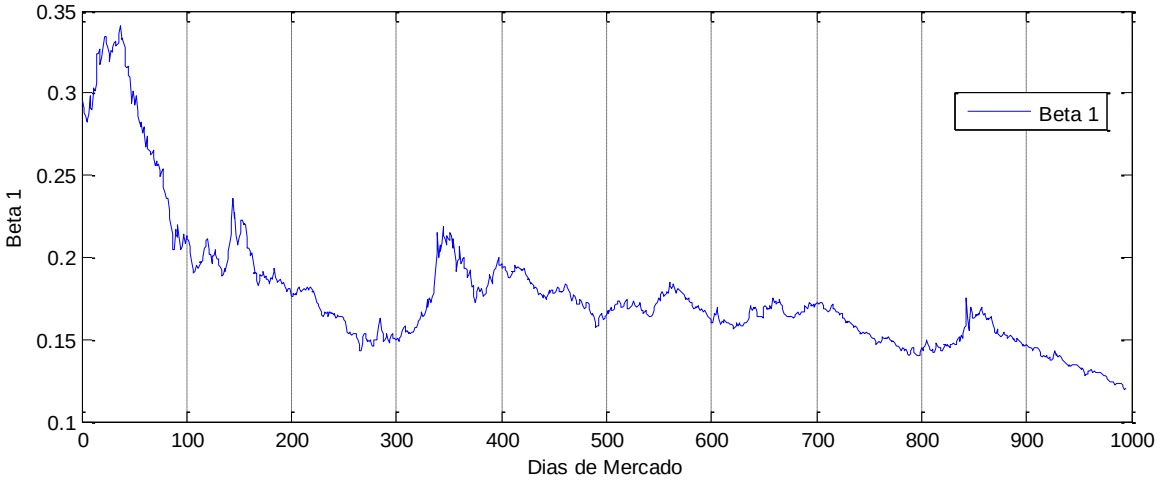

Figura 7 - Série temporal do Beta 1 – DL.

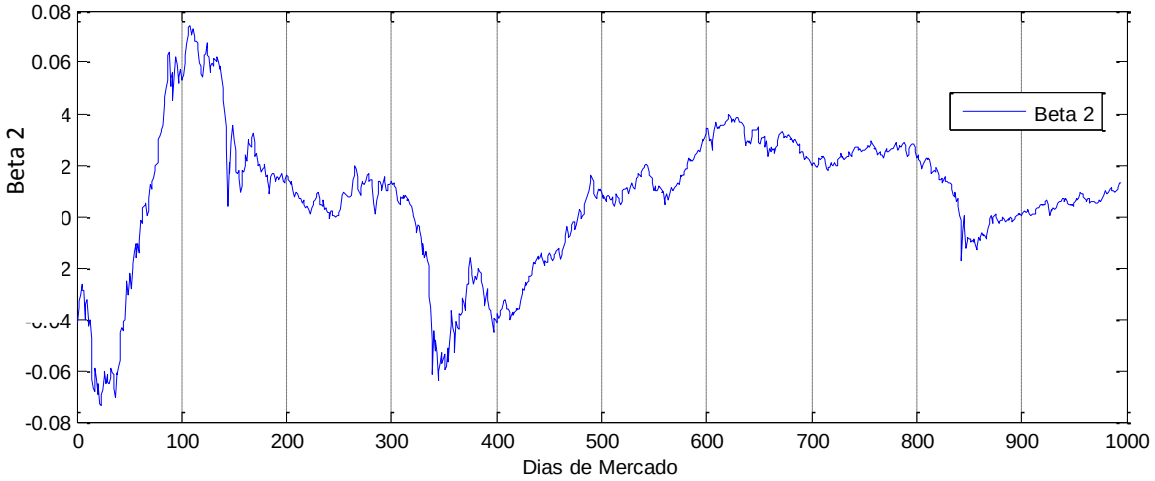

Figura 8 - Série temporal do Beta 2 – DL.

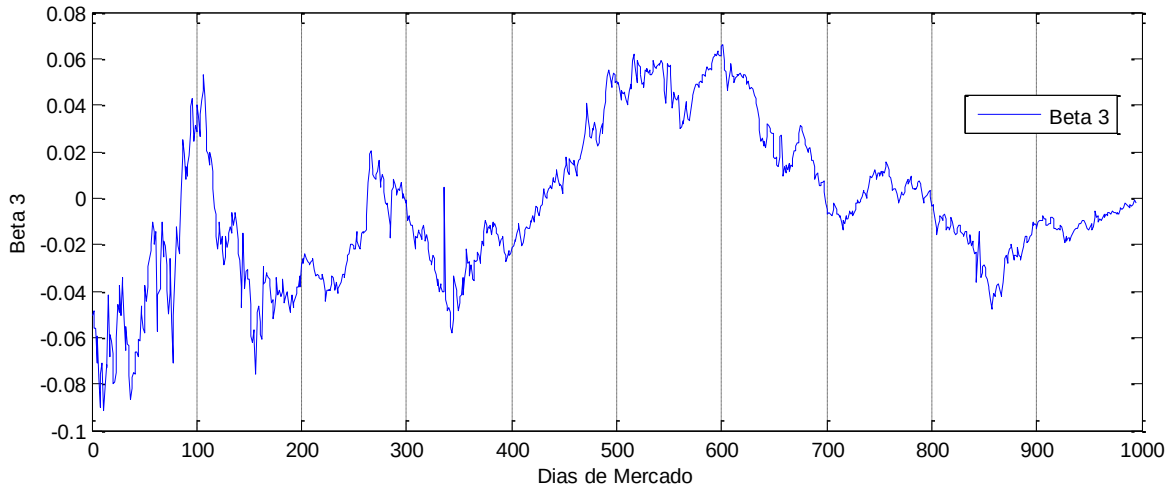

Figura 9 - Série temporal do Beta 3 – DL.

Pode-se notar na Figura 7 um decaimento do valor do β_1 ao longo do período analisado. Esse decaimento reflete uma expectativa de diminuição da taxa de juros de longo prazo, condizente com a política monetária e a expectativa de inflação no período em questão.

Na Tabela 6, são apresentadas as estatísticas descritivas para os parâmetros estimados. Nota-se, uma menor variabilidade no fator correspondente à inclinação (β_2), seguido do fator correspondente a curvatura (β_3).

Como ilustração, nós apresentamos na Figura 10 o ajuste aos dados em dois dias de mercado com diferentes formatos da curva. É observável claramente que o modelo de **DL** é capaz de reproduzir os formatos das curvas citados na seção 2. No lado esquerdo, temos o formato de uma curva monotônica ascendente e no lado direito, temos uma curva invertida. Contudo, é possível observar alguns erros pronunciados na curva da taxa de juros de 7 de fevereiro de 2003, para o prazos de 252 e 378 dias úteis. Esses erros serão quantificados e apresentados na seção correspondente a análise dentro da amostra.

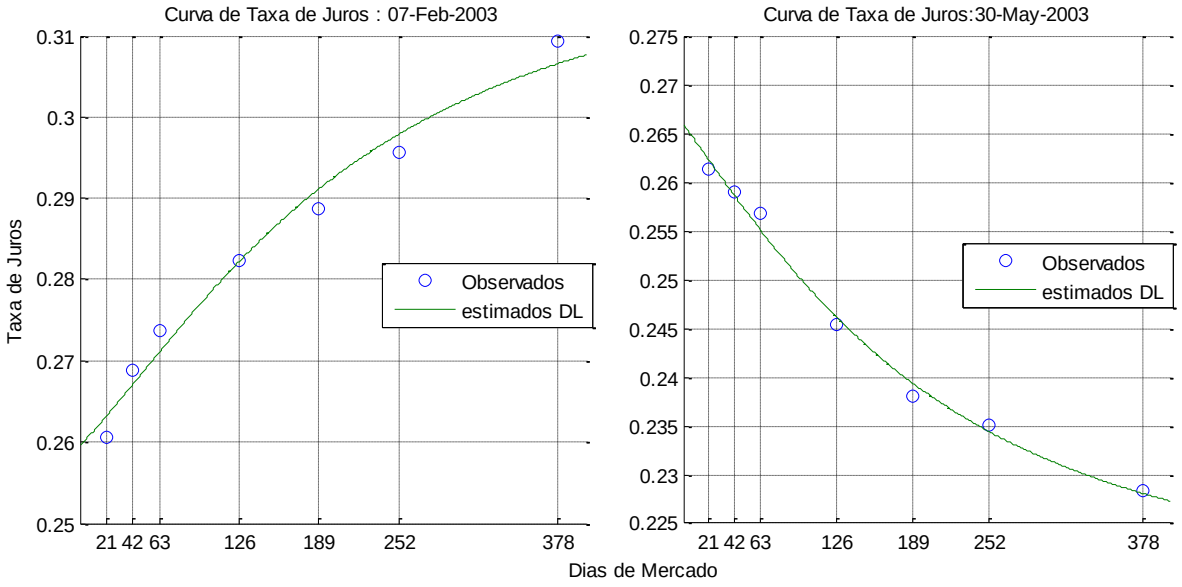

Figura 10 - Exemplo de ajustes do modelo DL.

No segundo estágio do modelo **DL,** foram estimados os coeficientes referentes ao *cross-section* apresentado na equação abaixo para cada um dos horizontes do exercício de previsão fora da amostra a serem comentados na seção 4.4.1.

$$\beta_{\mathrm{i,t+h}} = c_i + \gamma_i \beta_{it} + \epsilon_{\mathrm{t}} \qquad , i = 1,2,3 \tag{25}$$

Com a equação acima, foram realizadas novas estimações utilizando-se mínimos quadrados ordinários que resultaram nos seguintes coeficientes estimados do processo AR(1) acima. A utilização dos coeficientes da Tabela 2 será apresentada na seção de comparação das previsões fora da amostra.

Tabela 2 - Parâmetros estimados no *cross-section* de DL - AR(1).

	c_i	γ_i		
Horizonte de h = 21 dias				
$\boldsymbol{\beta_1}$	0,030498	0,814797	0	0
$\boldsymbol{\beta_2}$	0,003543	0	0,768425	0
$\boldsymbol{\beta_3}$	0,001603	0	0	0,766029464
Horizonte de h = 63 dias				
$\boldsymbol{\beta_1}$	0,110646	0,346434	0	0
$\boldsymbol{\beta_2}$	0,010852	0	0,147716	0
$\boldsymbol{\beta_3}$	0,004164	0	0	0,410829
Horizonte de h = 252 dias				
$\boldsymbol{\beta_1}$	0,183797	-0,07374	0	0
$\boldsymbol{\beta_2}$	0,00558	0	-0,5454	0
$\boldsymbol{\beta_3}$	0,011318	0	0	-0,0947015

4.3.2 CDR

A partir dos modelos propostos em **CDR**, foi estimado o modelo AFNS de fatores independentes. Nesse modelo, foram estimados os valores dos parâmetros através do Filtro de Kalman. Essa estimação é bem dispendiosa com relação ao tempo computacional, devido as otimizações computacionais necessárias no cálculo da máxima log verossimilhança. É fato importante notar que isso restringe a possibilidade de repetidas re-estimações, compreensíveis em um estudo de previsão fora da amostra[4].

O λ estimado nesse modelo foi de 0,01810, diferente de 0,01232 utilizado em **DL**. Isso pode ser explicado pela estimação em um único passo de **CDR** em que o λ foi estimado em conjunto com os outros parâmetros. O efeito da diferença do fator de decaimento exponencial λ pode ser observado através do gráfico abaixo dos fatores de inclinação e curvatura.

[4] Na previsão fora da amostra conduzida nas próximas seções, e para efeito de comparação dos modelos, não foi feita a re-estimação ao incluir novos dias de mercado na amostra.

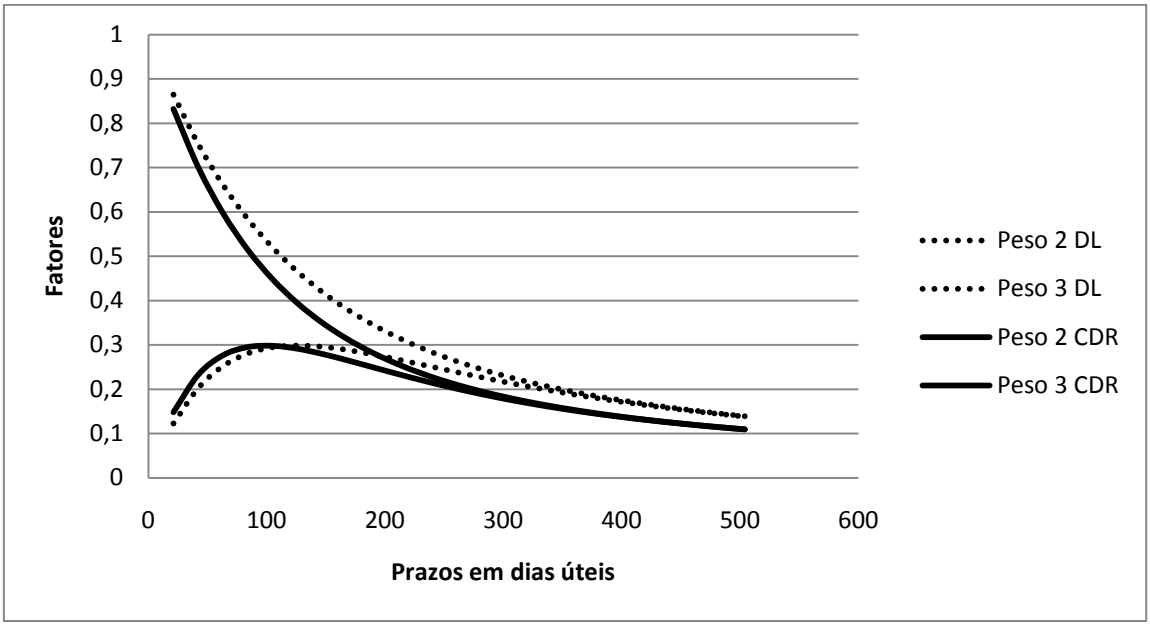

Figura 11 - Diferença da velocidade de decaimento com λ utilizado no modelo de DL e no modelo de CDR.

Percebe-se um decaimento do fator de inclinação (peso2) do modelo **CDR** mais rápido que o modelo **DL,** devido ao λ maior encontrado em **CDR**. Além disso, observa-se que o fator correspondente à curvatura de **CDR** tem valor máximo em uma maturidade um pouco inferior ao ponto de máximo de **DL**.

Na tabela abaixo, são mostrados os valores dos fatores encontrados durante a estimação.

Tabela 3 – Resultado da estimação do modelo CDR.

	$K^p_{,1}$	$K^p_{,2}$	$K^p_{,3}$	θ^p
$K^p_{1,}$	1,239961	0	0	0,185073
$K^p_{2,}$	0	1,051352	0	-0,03515
$K^p_{3,}$	0	0	0,001259	0,005439

	$\boldsymbol{\Sigma}_{,1}$	$\boldsymbol{\Sigma}_{,2}$	$\boldsymbol{\Sigma}_{,3}$
$\boldsymbol{\Sigma}_{1,}$	0,000431	0	0
$\boldsymbol{\Sigma}_{2,}$	0	0,000107	0
$\boldsymbol{\Sigma}_{3,}$	0	0	0,000105

Nota: Através do Matlab (função fminsearch e algoritmo de Nelder–Mead) obteve-se um valor de log verossimilhança igual a 16115,57.

As séries temporais dos fatores X_1, X_1 e X_3 podem ser observadas abaixo:

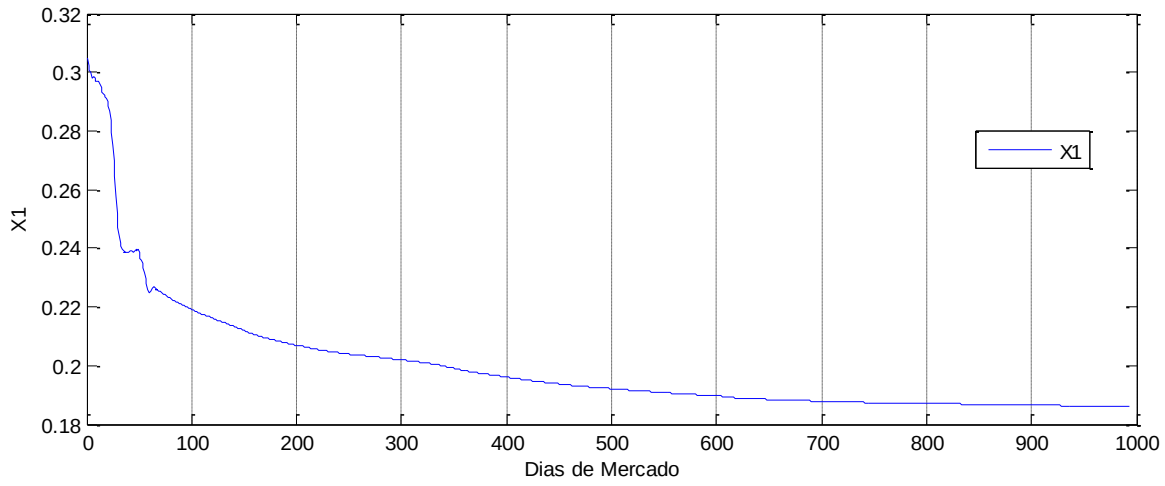

Figura 12 - CDR - Série temporal do X_1.

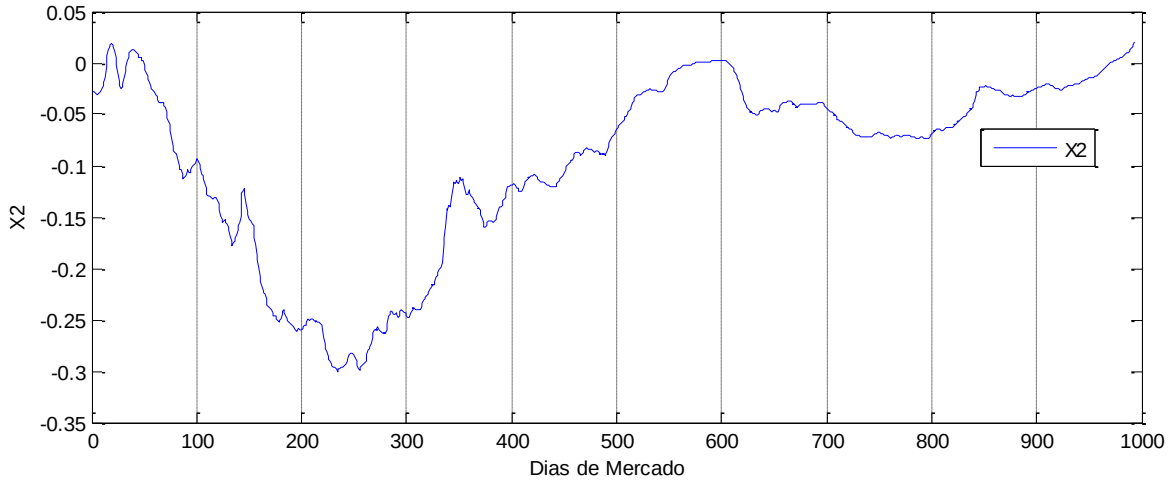

Figura 13 – CDR - Série temporal do X_2

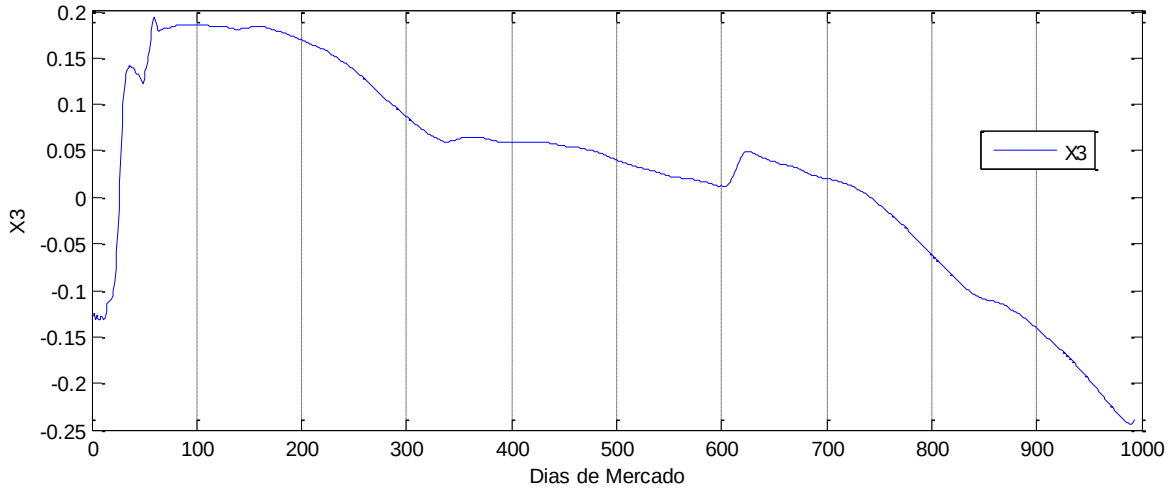

Figura 14 - CDR – Série temporal do X_3

O mesmo decaimento notado anteriormente na Figura 7, correspondente ao β_1 estimado no modelo de **DL**, pode ser notado na Figura 12, fator X_1. O comportamento do decaimento quase perfeito, observado na Figura 12 (que poderia indicar um possível erro no algoritmo utilizado), despertou uma reavaliação do algoritmo e uma nova estimação do período em questão. Contudo, não foram encontradas mais evidências de possíveis erros e a nova estimação apresentou os mesmos resultados encontrados anteriormente. O comportamento das séries acima, no que tange aos erros de estimação ou a especificação dos modelos, será analisada na seção a seguir.

4.4 Métodos de Comparação

Uma boa aproximação da dinâmica da ETTJ deve ter ajuste aceitável aos dados, assim como, um bom desempenho fora da amostra. Visto isso, a avaliação dos desempenhos dos modelos é produzida com as comparações dos erros dentro da amostra, assim como, os erros correspondentes as previsões fora da amostra.

4.4.1 Comparação dentro da amostra

Para a avaliação do ajuste do modelo aos dados observados, foi feito o cálculo da média dos erros dentro da amostra e da raiz quadrada da média dos erros quadráticos. Os prazos analisados foram os prazos correspondentes a 21, 42, 63, 126, 189, 252 e 378 dias úteis, que coincidem com as maturidades utilizadas dentro da estimação dos modelos, fato requerido para uma comparação e análise do efeito de não arbitragem em estudos da ETTJ brasileira. A tabela 5 e a Figura 15 mostram que o modelo **DL** teve desempenho inferior na comparação dentro da amostra se comparado ao modelo **CDR.** É possível observar isso devido à menor RMSE (raiz quadrada da média dos erros quadráticos) para todas as maturidades comparadas. Além disso, a Figura 15 mostra um possível viés do modelo **CDR** se comparado ao **DL,** que tem as médias dos erros mais próximas de zero. Uma possível explicação para o resultado observado, é que a adição de critério de não arbitragem cria mais “amarras” ou restrições ao modelo, fazendo com que o modelo **CDR** tenha maior dificuldade de se ajustar aos dados observados. Em compensação, essas restrições proporcionaram uma melhora nas previsões fora da amostra conforme observado na próxima seção.

As Figuras 23 a 29 mostram as séries dos erros dentro da amostra para os dois modelos estimados. É possível notar que as séries estão em acordo com a Tabela 4, mostrando um maior erro dentro da amostra do modelo **CDR** nas maturidades estimadas.

Tabela 4 - Comparação dentro da amostra. Unidades em pontos base.

	DL		CDR	
Prazos	**Média**	**RMSE**	**Média**	**RMSE**
21	-0,0198	0,0728	-0,0989	0,8659
42	0,0124	0,0509	-0,1832	0,6397
63	0,0223	0,0868	-0,2286	0,5807
126	0,0040	0,0445	-0,2364	0,4125
189	-0,0200	0,0724	-0,1836	0,2088
252	-0,0243	0,0784	-0,1403	0,4413
378	0,0254	0,0801	-0,1341	1,1091

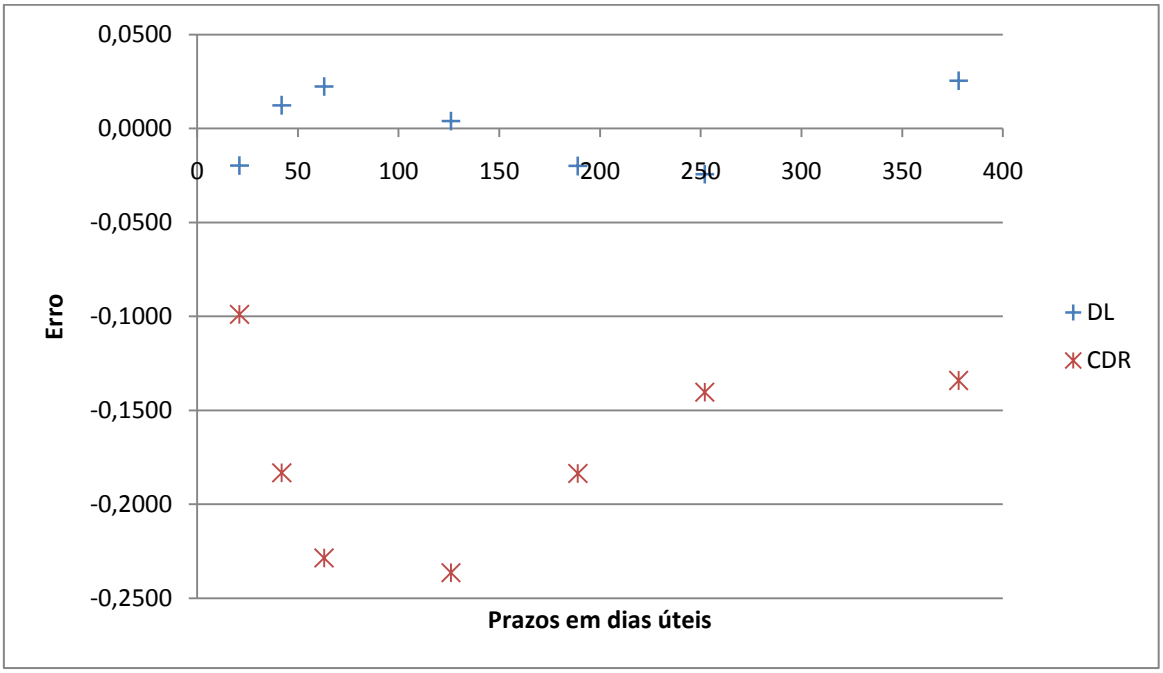

Figura 15 - Gráfico das médias dos erros dentro da amostra.

4.4.2 Comparação das previsões fora da amostra

Para a avaliação da capacidade de previsão do modelo, os dados foram divididos em duas partes, sendo a primeira constituída por 794 observações no período de Março de 2003 até Fevereiro de 2006, utilizada para a estimação dos modelos descritos anteriormente. Já a segunda parte (compreendida entre Fevereiro de 2006 a Janeiro de 2007) foi utilizada para previsões fora da amostra. São analisadas as previsões para os horizontes (h) de 1 mês (21 dias úteis), 3 meses (63 dias úteis) e 12 meses (252 dias úteis) à frente do tempo (t).

Para efeito de comparação, o modelo com melhor desempenho é aquele que obtiver, para um dado horizonte e maturidade, a menor a raiz quadrada do erro quadrático médio de previsão.

Tanto para **DL,** quanto para **CDR**, o valor da taxa de juros depende somente dos três fatores latentes. Assim sendo, a estimação da previsão da taxa de juros corresponde a estimação da previsão dos fatores latentes. Dessa forma, a previsão é feita a partir de Fevereiro de 2006 prosseguindo em direção à Janeiro de 2007.

Para o **DL,** foi utilizada a equação abaixo para a obtenção de $E_t\left(y_{t+h}(\tau)\right)$, em que $\beta_{1,t+h}$, $\beta_{2,t+h}$ e $\beta_{3,t+h}$ foram obtidos através do segundo passo da estimação de **DL**, comentado anteriormente. O valor parâmetro λ utilizado foi o mesmo da estimação do modelo, 0,014232.

$$E_t\left(y_{t+h}(\tau)\right) = \beta_{1,t+h} + \beta_{2,t+h}\frac{\left(1-e^{-\lambda_{t+h}\tau}\right)}{\lambda_{t+h}\tau} + \beta_{3,t+h}\left(\frac{1-e^{-\lambda_{t+h}\tau}}{\lambda_{t+h}\tau} - e^{-\lambda_{t+h}\tau}\right) \qquad (26)$$

Já para o modelo **CDR,** foi utilizada uma equação semelhante à equação (26) com a adição do termo de ajuste da taxa de juros por maturidade, $\frac{\boldsymbol{\alpha_t(\tau)}}{(\tau-t)}$. Com isso, utilizou-se a seguinte equação:

$$E_t\left(y_{t+h}(\tau)\right) = X_{1,t+h} + X_{2,t+h}\frac{\left(1-e^{-\lambda_{t+h}\tau}\right)}{\lambda_{t+h}\tau} + X_{3,t+h}\left(\frac{1-e^{-\lambda_{t+h}\tau}}{\lambda_{t+h}\tau} - e^{-\lambda_{t+h}\tau}\right) - \frac{\alpha_t(\tau)}{(\tau-t)} \qquad (27)$$

onde $X_{1,t+h}$, $X_{2,t+h}$ e $X_{3,t+h}$ foram obtidos através da equação de transição de estado do modelo , equação (14).

Tabela 5 - Raiz quadrada da média do erro quadrático das previsões fora da amostra. Desvio padrão entre parênteses e unidades em pontos base.

		h=21	h=63	h=252
Taxa $\tau = 21$ dias				
	DL	**0,720334429**	2,521433997	3,331758954
		(0,192565)	(0,698721)	(1,206316)
	CDR	1,293509471	**1,113526803**	**1,081475812**
		(1,296683)	(1,107342)	(1,053721)
Taxa $\tau = 126$ dias				
	DL	**0,682410862**	2,444052158	3,801886761
		(0,172239)	(0,588052)	(0,961684)
	CDR	1,629847657	**1,668829553**	**1,830150252**
		(0,984430)	(0,935027)	(0,982007)
Taxa $\tau = 252$ dias				
	DL	**0,648023544**	**2,292012276**	3,737362385
		(0,194110)	(0,606180)	(0,966663)
	CDR	2,491104348	2,532111128	**2,650604692**
		(0,955446)	(0,945684)	(0,987456)

Nota: Os modelos com melhor desempenho para cada combinação de horizonte e maturidade foram marcados em negrito. O erro de previsão fora da amostra é definido como a diferença entre o valor observado da taxa de juros $y_{t+h}(\tau)$ e o valor estimado com cada um dos modelos $E_t(y_{t+h}(\tau))$.

A tabela acima apresenta a raiz quadrada do erro quadrático médio em previsões fora da amostra para os modelos comparados. Os erros foram calculados em previsões fora da amostra para 21 dias, 63 dias e 252 dias à frente e com as maturidades de 1 mês (21 dias úteis), 6 meses (126 dias úteis) e 1 ano (252 dias úteis). Pode-se observar que para prazos curtos da ETTJ brasileira, o modelo de **DL** teve um desempenho superior se comparado a **CDR**. Já para prazos médios e longos da ETTJ, o **CDR** teve desempenho superior no período analisado.

Os gráficos das Figuras 16 e 17 mostram as séries dos erros. Percebe-se, no gráfico correspondente ao modelo **DL** que as previsões tiveram um aumento do erro em módulo (observado para todas as séries). Isso pode ser explicado pelo método utilizado nas previsões fora de amostra, em que os parâmetros não foram re-estimados com a incorporação de novos dias de mercado. Essa escolha foi feita para que os dois modelos tivessem a mesma metodologia de previsão, já que para o modelo **CDR** ficaria inviável a re-estimação, devido ao elevado tempo computacional requerido.

Além disso, é possível observar na Figura 22 a dispersão dos erros fora da amostra dos dois modelos comparados. É possível observar nesta, uma maior dispersão dos

erros no modelo **CDR,** para horizontes de previsão correspondentes a 21 dias úteis**,** em linha com os resultados mostrados na Tabela 5.

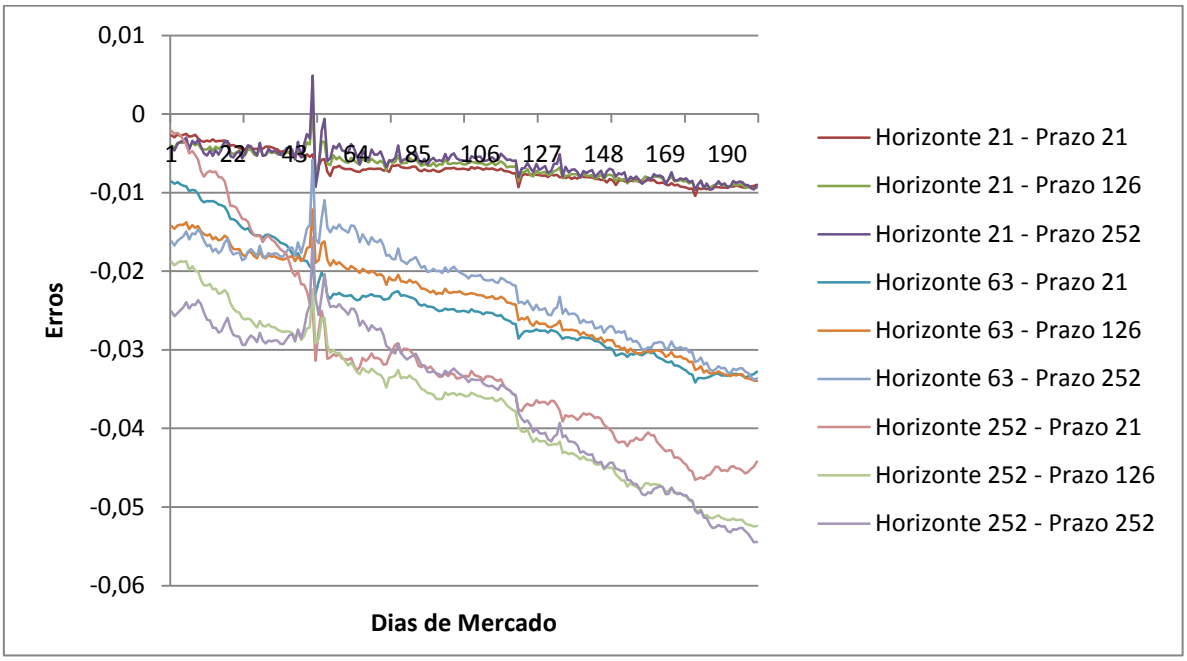

Figura 16 - Gráfico dos erros das previsões fora da amostra para o modelo DL.

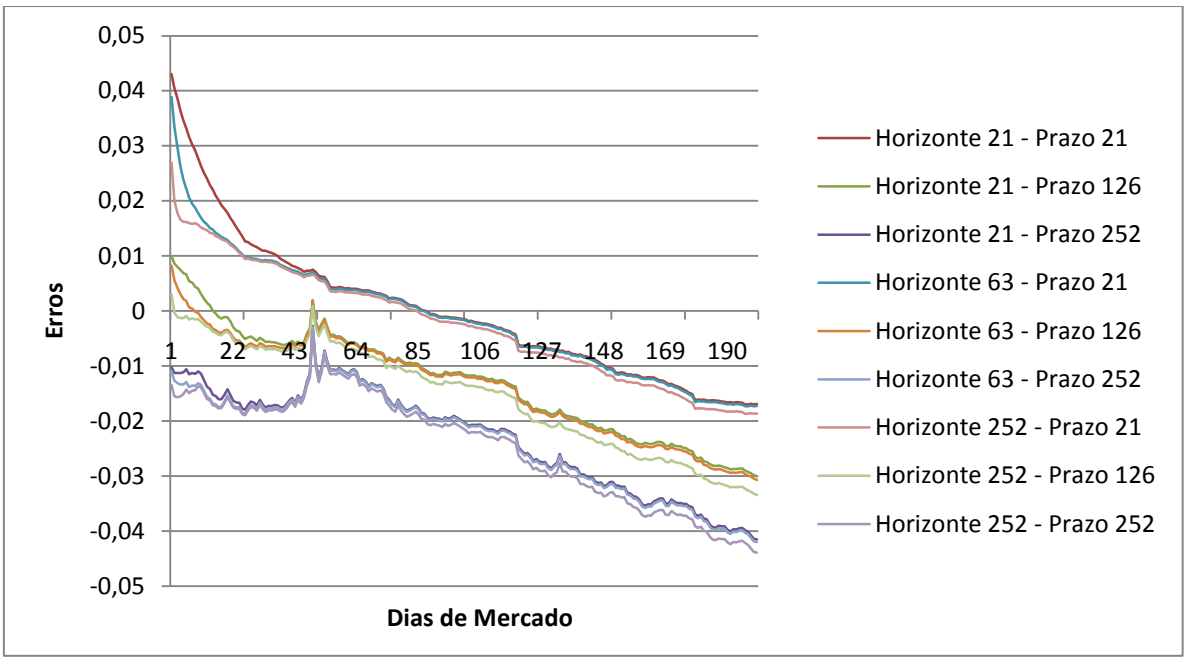

Figura 17 - Gráfico dos absolutos das previsões fora da amostra para o modelo CDR.

5. Conclusões

Neste trabalho, procurou-se estudar algumas questões importantes no que tange a estimação da ETTJ brasileira, como a utilização de um modelo afim com a adição de termo de não arbitragem. Esse estudo foi feito através da estimação e comparação do desempenho dentro da amostra e fora da amostra no período de Janeiro de 2003 a Janeiro de 2007 para dois modelos baseados na classe de modelos paramétricos **Nelson-Siegel.**

É importante notar a impossibilidade da análise do efeito da adição de restrições de não arbitragem em separado da estimação dos modelos. Visto isso, os resultados apresentam, além do efeito da adição das restrições de não arbitragem, os efeitos resultantes da estimação de um processo AR(1) no caso do **DL** e um VAR no caso do **CDR.**

Com base nos modelos de **DL** e **CDR,** estimou-se a ETTJ brasileira utilizando-se dados de futuros da taxa de juros negociados na BM&F com maturidades fixas de 21, 42, 63, 126, 189, 252 e 378 dias úteis. Para **DL** a estimação foi feita calibrando-se o λ *ex-ante* e depois executando regressões com mínimos quadrados ordinários em dois estágios. Para **CDR,** a estimação foi feita através do Filtro de Kalman, em que todos os parâmetros foram estimados em um único estagio. É deduzido a partir de um modelo afim, um modelo que adiciona restrições de não arbitragem a ETTJ. As restrições aparecem através da adição de um termo de ajuste da taxa de juros por maturidade. As estimações foram bem coerentes com que se esperava. Na comparação dentro da amostra, o modelo de **DL** mostrou desempenho superior para todas as maturidades analisadas. Além disso, percebeu-se uma possível existência de viés através da análise das médias dos erros quadráticos. O modelo proposto em **CDR** desempenhou melhor em prazos médios e longos da ETTJ brasileira na comparação das previsões fora da amostra. Já para prazos pequenos, o modelo de **DL** teve desempenho superior. Isso demonstra que a adição do termo de não arbitragem, assim como a estimação em único estágio, utilizando-se o Filtro de Kalman, favoreceu o desempenho das previsões fora da amostra.

Tentou-se melhorar a estimação do **CDR** com a estimação da variância condicional do modelo através da utilização da solução numérica proposta em **Fackler [2000].** Outro fato importante a notar na estimação desse modelo, foi o elevado tempo computacional requerido para a execução da mesma. Isso se deve ao elevado número de

variáveis a serem estimadas no modelo, além dos métodos numéricos empregados para o cálculo da variância condicional e para a maximização da log verossimilhança.

Outras possíveis extensões a esse trabalho seriam a incorporação de um termo para equacionar a falta de liquidez no mercado brasileiro, conforme proposto em **Fontaine e Garcia [2007].** Além disso, poderia ser estudado o desempenho dos modelos através da utilização de uma carteira teórica de títulos, com a utilização de técnicas de imunização (*Hedge*) em que o melhor modelo seria o modelo que tivesse a imunização mais efetiva e com o menor custo.

REFERÊNCIAS

[1] Almeida C. e Vicente J., (2006). Term Structure Movements Implicit in Option Prices, Working Papers Series 128, Central Bank of Brazil, Research Department.

[2] Almeida, C., Gomes, R., Leite, A. e Vicente, J. (2007). Does curvature enhance forecasting? Technical Report 155, Banco Central do Brasil.

[3] Almeida C., Vicente J., Gomes R. e Leite A. (2008). Movimentos da Estrutura a Termo e critérios de Minimização do Erro de Previsão em um Modelo Paramétrico Exponencial. Revista Brasileira de Economia, 62, 4, 497-510.

[4] Ang. A. e M. Piazzesi (2003). A No-Arbitrage Vector Autoregression of Term Structure Dynamics with Macroeconomic and Latent Variables. Journal of Monetary Economics, 50,745-787.

[5] Cabral R. (2007). Algumas considerações sobre o mercado de taxa de juros brasileiro. Revista de Economia Mackenzie, 5, 10-64.

[6] Caldeira, J F, Moura, G. V. e Portugal, M. S. (2009). Estimação e previsão eficientes do modelo de Nelson-Siegel com o Filtro de Kalman. In: IX Encontro Brasileiro de Finanças São Leopoldo. Anais do IX Encontro Brasileiro de Finanças. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Finanças, 2009. v. cd-rom.

[7] Christensen, J. H., F. X. Diebold, e G. D. Rudebusch (2007). The Affine Arbitrage-Free Class of Nelson-Siegel Term Structure Models. Working Paper No. 13611, NBER.

[8] Diebold F.X. e C. Li (2006). Forecasting the Term Structure of Government Bond Yields.Journal of Econometrics, 130, 337-364.

[9] Diebold, F.X., Rudebusch, G.D. e Aruoba, B. (2006), The Macroeconomy and the Yield Curve: A Dynamic Latent Factor Approach, Journal of Econometrics, 131, 309-338.

[10] Diebold, F. e Mariano, R. (1995). Comparing predictive accuracy. Journal of Business and Economic Statistics, 13:253–265.

[11] Duffie, D. e Kan, R. (1996). A yield-factor model of interest rates. Mathematical Finance,6, 379-406.

[12] Fackler, P. F. (2000). Moments of affine diffusions. Unpublished working paper, North Carolina State University.

[13] Fama, E. F. e Bliss R.R. (1987). The information in long-maturity forward rates. American Economic Review, 77, 4, 680-692.

[14] Fontaine J.S. e R. Garcia (2007). Bond Liquidity Premia. Working Paper, Department of Economics, Université de Montréal.

[15] Frankel, J.A. e Lown, C.S. (1994). An indicator of future inflation extracted from the steepness of the interest rate yield curve along its entire length. Quarterly Journal of Economics 109, 517-530.

[16] Hamilton, J. D. (1994). Times series analysis. Capítulo 13. Princeton University Press.

[17] Hull J. e White A, Pricing interest-raté derivative securities, The Review of Financial Studies, Vol 3, No. 4 (1990) pp. 573–592.

[18] Longstaff F.A. (2000) The term structure of very short-term rates: New evidence for the expectations hypothesis, Journal of Financial Economics, Volume 58, Issue 3, December 2000, Pages 397-415.

[19] Marçal E. e Valls P. (2007) A Estrutura a Termo das Taxas de Juros no Brasil: testando a hipóteses de Expectativas.

[20] Nyholm K. (2008), Strategic Asset Allocation in Fixed Income Markets: A Matlab Based User's Guide, John Wiley.

[21] Nelson C. e A. Siegel (1987). Parsimonious Modeling of Yield Curves. Journal of Business, 60, 4, 473-489.

[22] Vasicek, O. A. e Fong, H. G. Term structure modeling using exponential Splines, The Journal of Finance, 37, 339-348, 1982.

[23] Vicente, J. e Tabak, B. (2007). Forecasting bond yields in the Brazilian fixed income market. International Journal of Forecasting, 24(3):490–497.

APÊNDICES

Tabela 6 - Estatísticas descritivas dos Betas estimados no modelo de DL.

Beta	Mínimo	Máximo	Média	Mediana	Desvio Padrão
1	0,119630	0,340600	0,178153	0,168468	0,041457
2	-0,073787	0,074180	0,006946	0,009475	0,026755
3	-0,091696	0,066315	-0,004256	-0,008746	0,032241

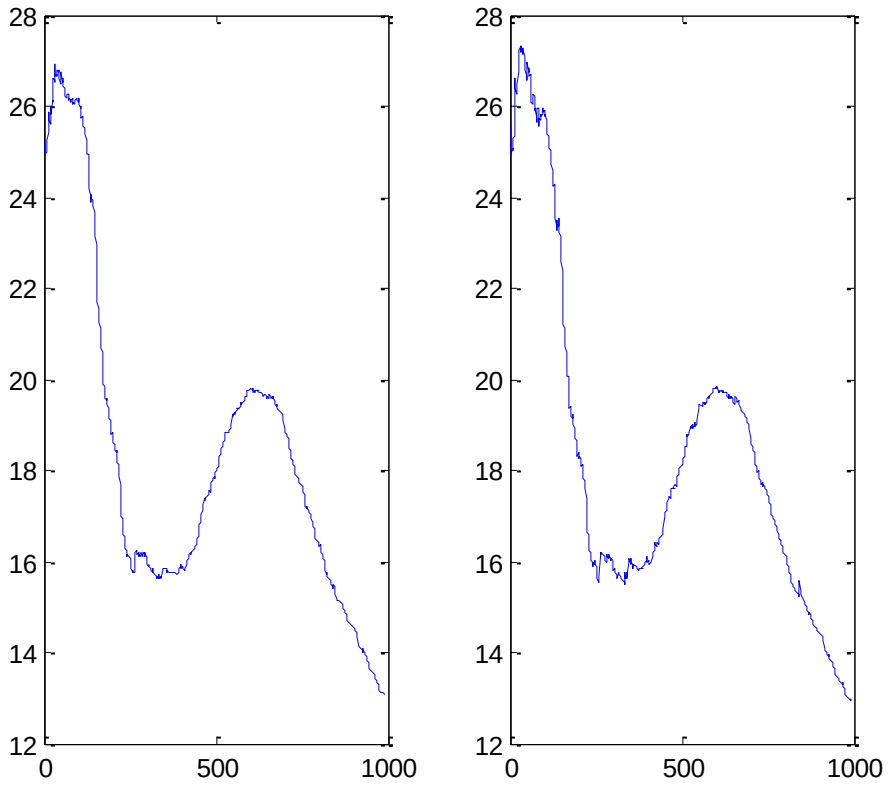

Figura 18 - Taxas ao longo do tempo na amostra. Prazos 21 e 42 dias úteis.

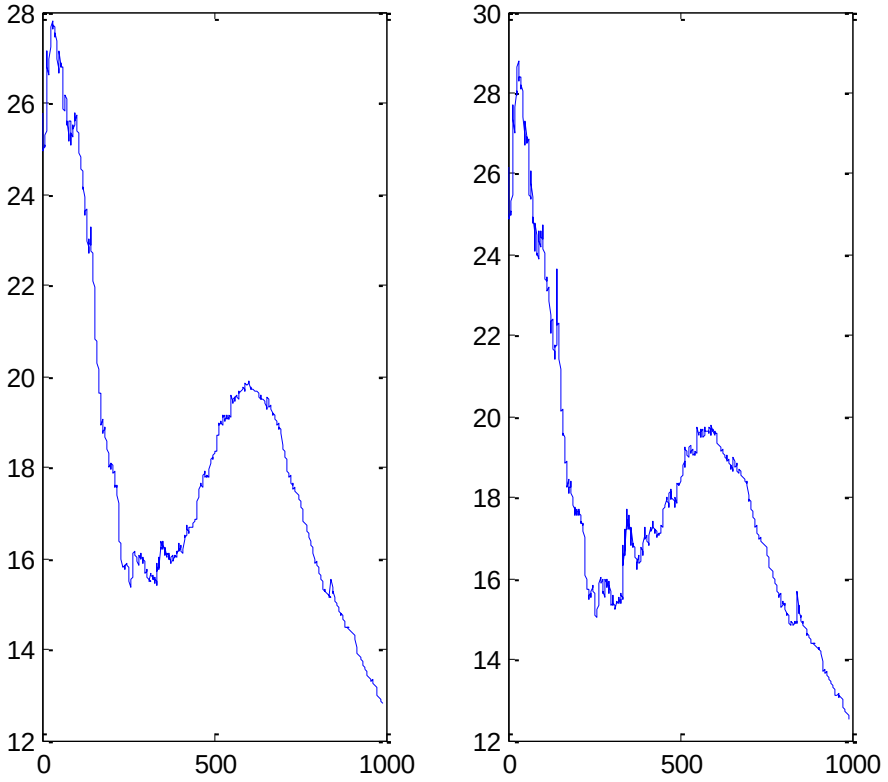

Figura 19 - Taxas ao longo do tempo na amostra. Prazos 63 e 126 dias úteis.

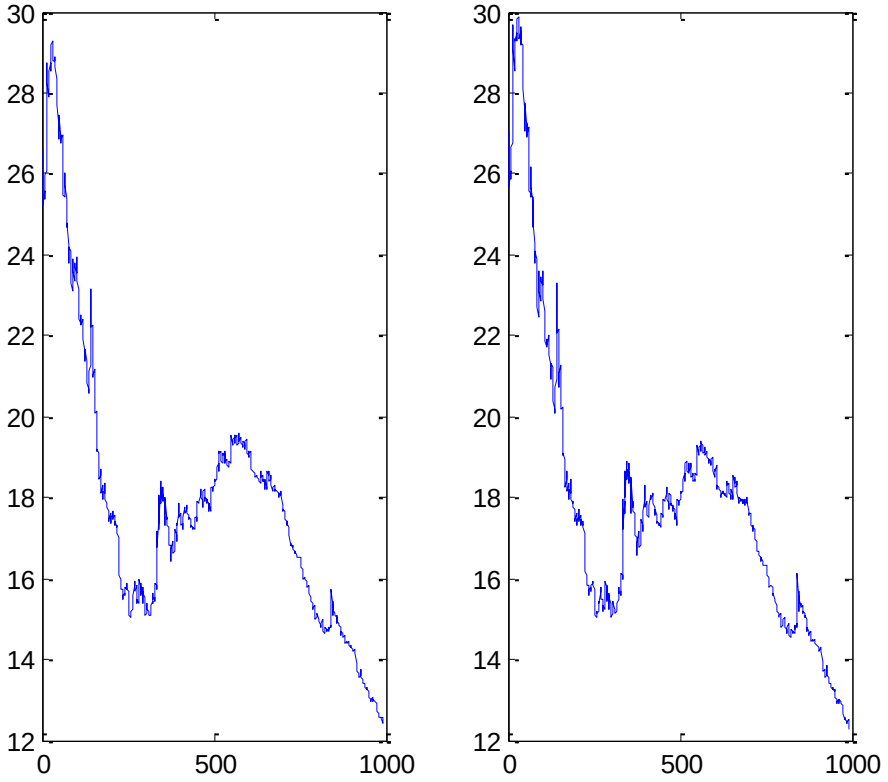

Figura 20 - Taxas ao longo do tempo na amostra. Prazos 189 e 252 dias úteis.

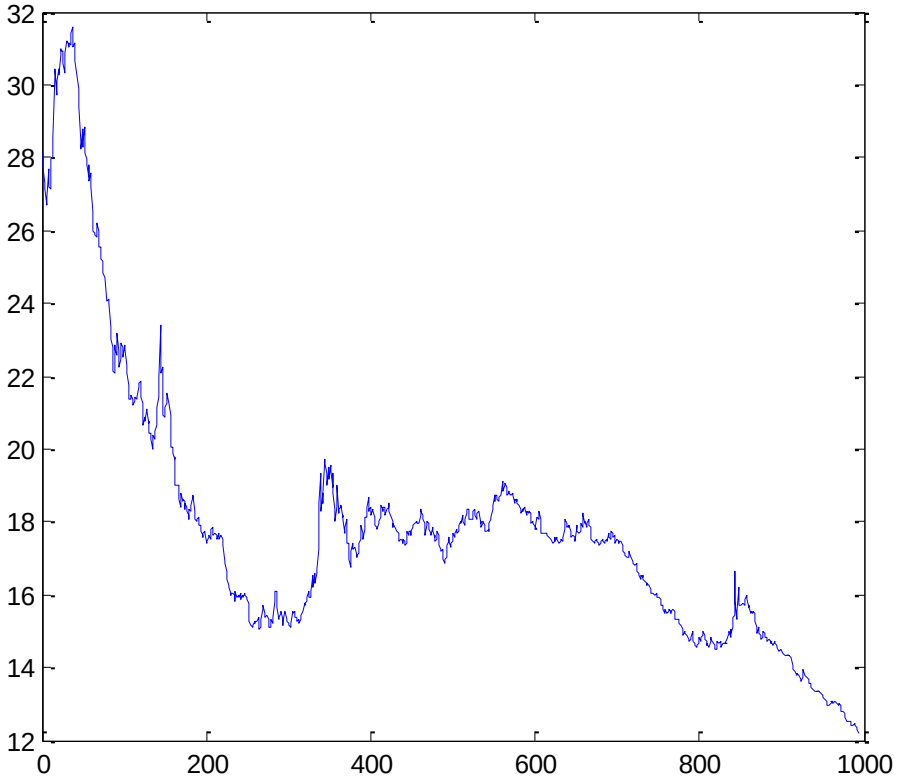

Figura 21 - Taxas ao longo do tempo na amostra. Prazo 378 dias úteis.

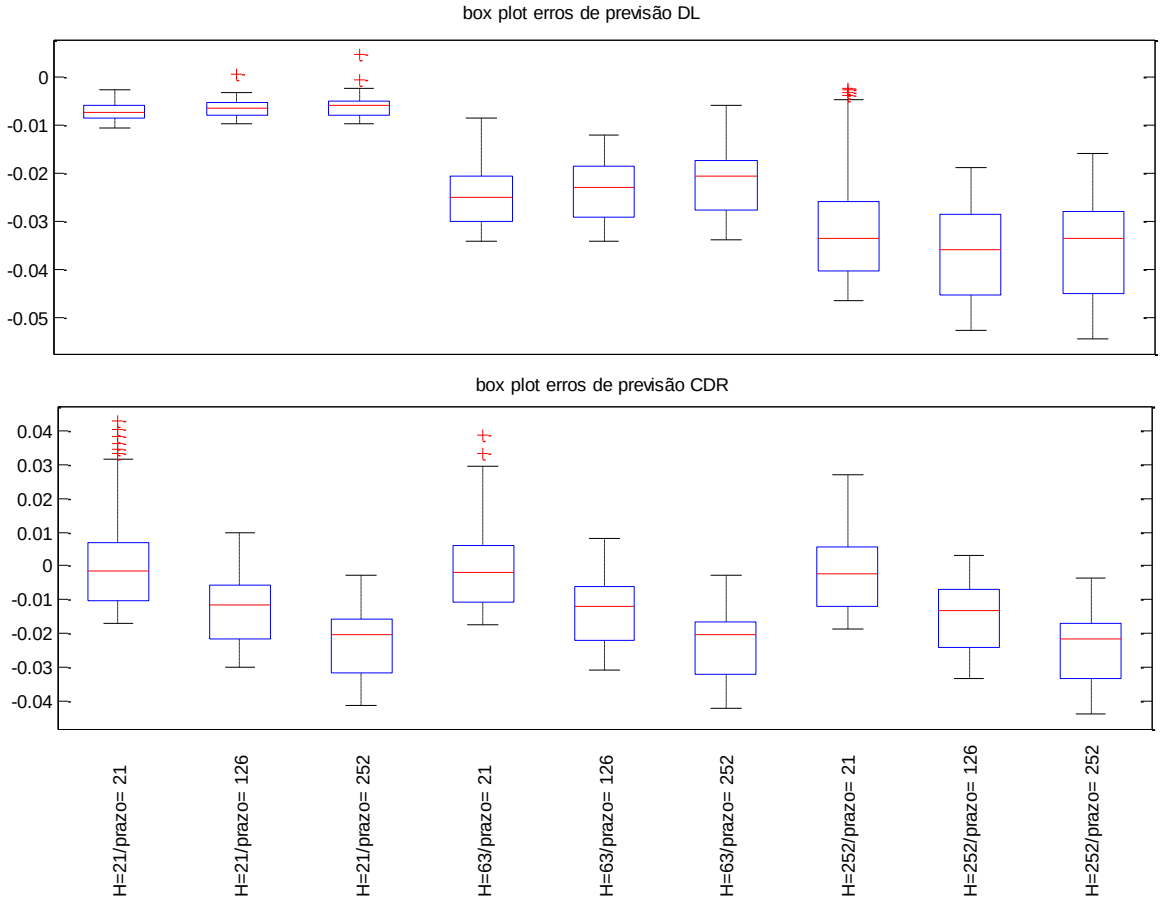

Figura 22 - *Box plot* dos erros de previsão fora da amostra.

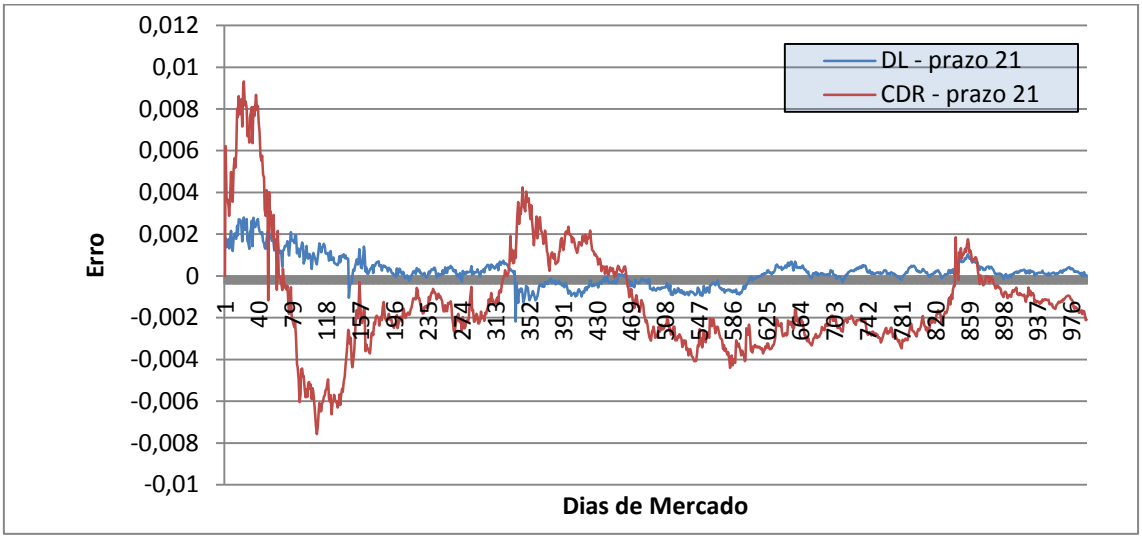

Figura 23 - Erros dentro da amostra (Prazo 21 dias úteis)

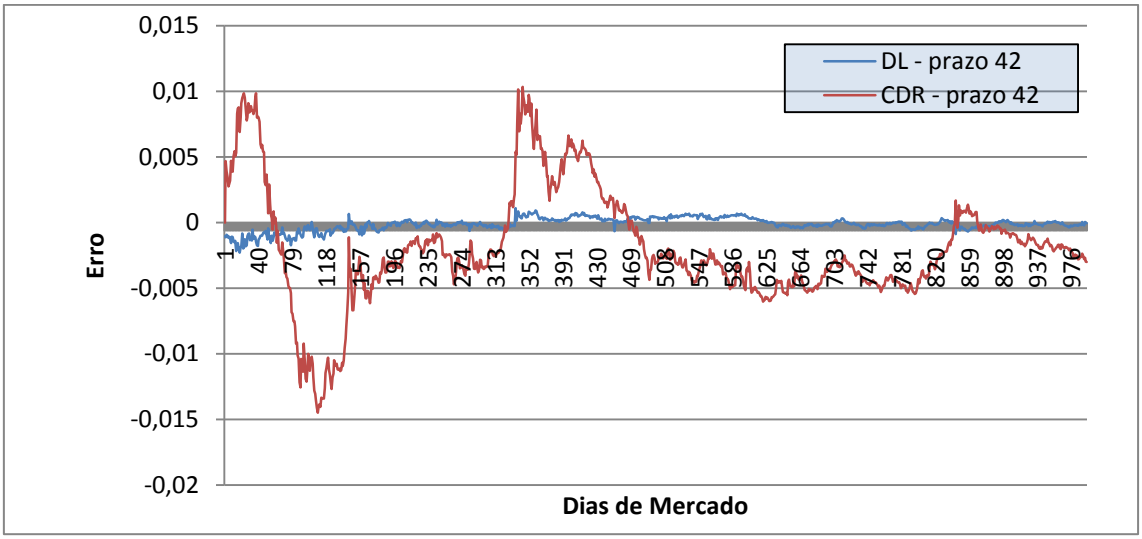

Figura 24- Erros dentro da amostra (Prazo 42 dias úteis)

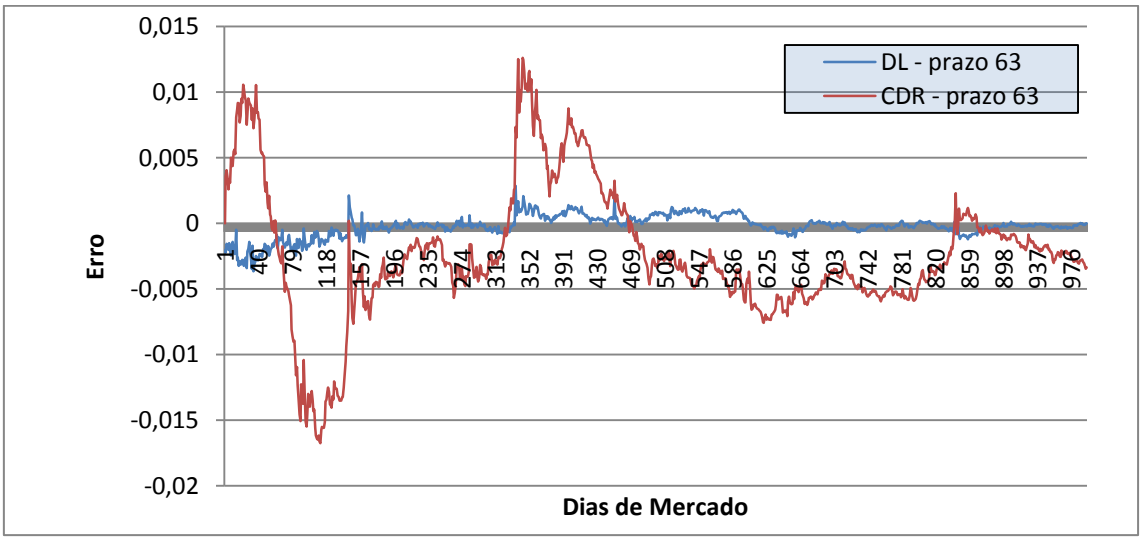

Figura 25 - Erros dentro da amostra (Prazo 63 dias úteis)

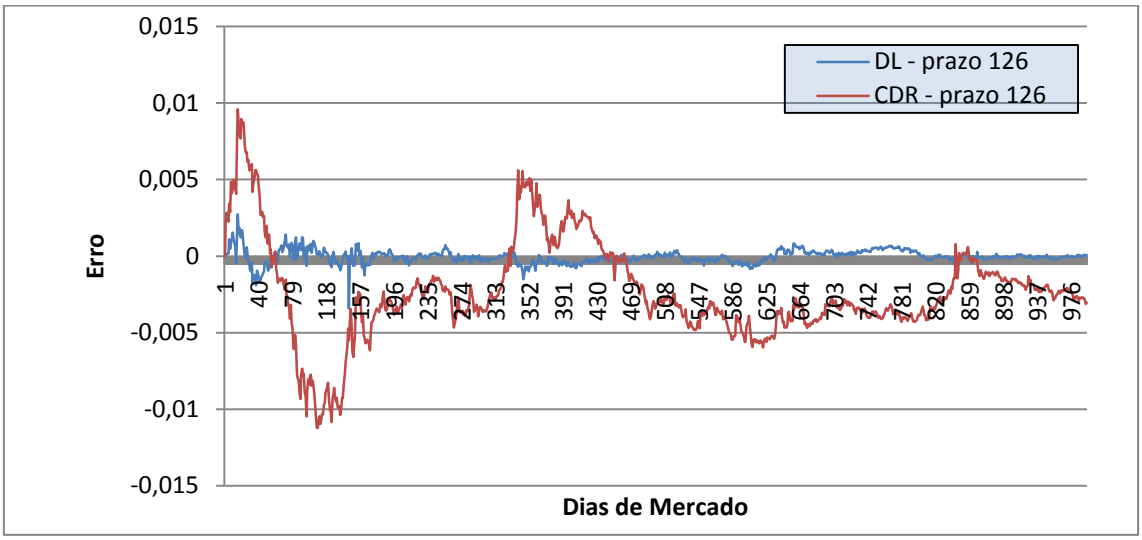

Figura 26- Erros dentro da amostra (Prazo 126 dias úteis)

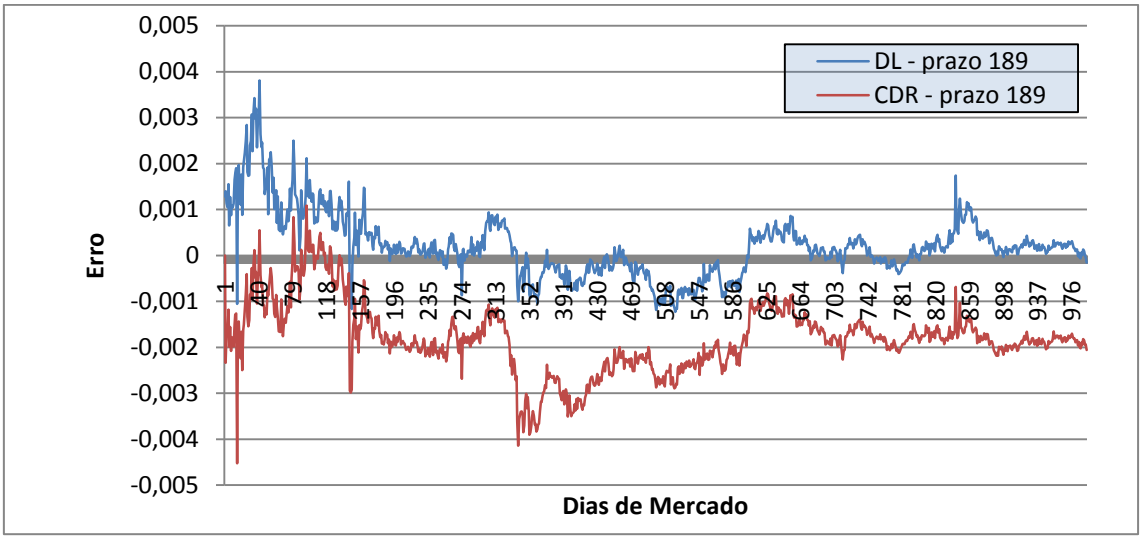

Figura 27- Erros dentro da amostra (Prazo 189 dias úteis)

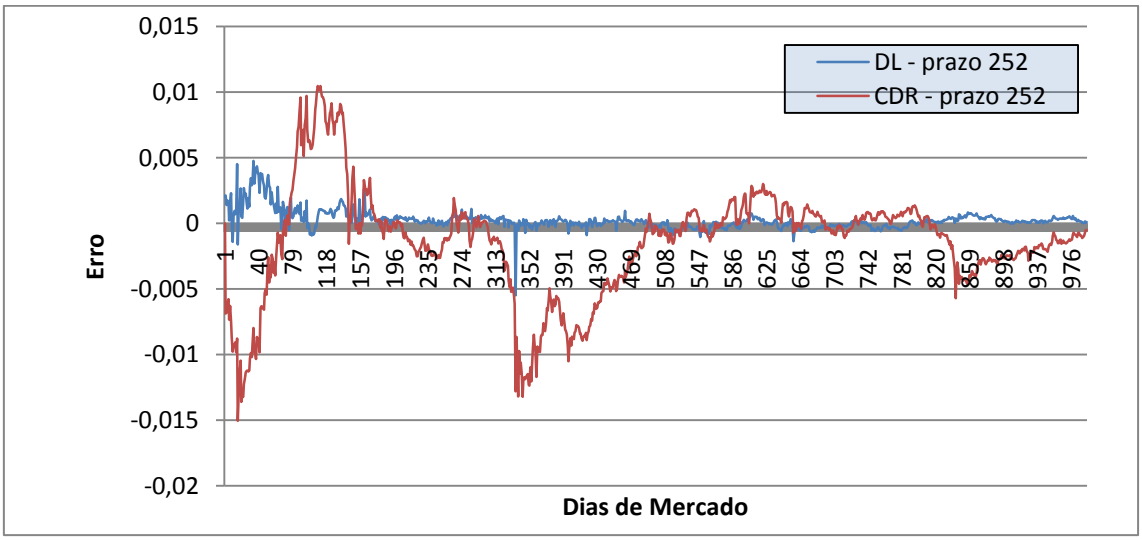

Figura 28 - Erros dentro da amostra (Prazo 252 dias úteis)

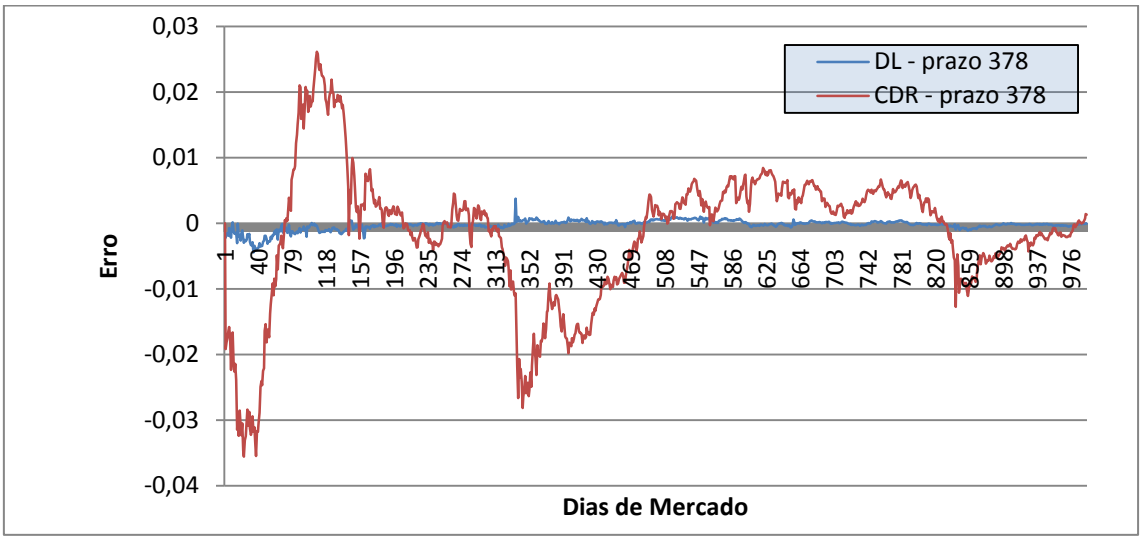

Figura 29- Erros dentro da amostra (Prazo 378 dias úteis)