

Inspere
Ciências Econômicas

Pedro Martins Amorim de Lima

Estimação de um modelo conjunto de fatores latentes da curva de juros e variáveis
macroeconômicas no Brasil

São Paulo

2020

Pedro Martins Amorim de Lima

Estimação de um modelo conjunto de fatores latentes da curva de juros e variáveis
macroeconômicas no Brasil

Monografia apresentada ao programa de
Graduação em Economia como requisito para
obtenção do título de Bacharel em Economia.

Orientador: Profa. Dra. Adriana Bruscatto Bortoluzzo

São Paulo

2020

de Lima, Pedro Martins Amorim de Lima

Estimação de um modelo conjunto de fatores latentes da curva de juros
e variáveis macroeconômicas no Brasil

Pedro Martins Amorim de Lima - São Paulo, 2019

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Insper, 2020

Orientador: Profa.Dra. Adriana Bruscato Bortoluzzo

1. Curva de juros. 2. economia 3. modelos state-space.

4. Nelson-Siegel .

I. Pedro Martins Amorim de Lima

Pedro Martins Amorim de Lima

**Estimação de um modelo conjunto de fatores latentes da curva de juros e
variáveis macroeconômicas no Brasil**

Monografia apresentada ao programa de Graduação em Economia como requisito para
obtenção do título de Bacharel em Economia.

Examinadores

Profª. Dra. Adriana Bruscatto Bortoluzzo
Orientadora

Prof. Me. Sérgio Ricardo Martins
Examinador

Agradecimentos

Aos meus pais por sempre estarem presentes com seu apoio e compreensão.

Agradeço minha orientadora, Profa. Dra. Adriana Bruscatto Bortoluzzo, pelo apoio e estímulo no desenvolvimento deste trabalho.

RESUMO

O presente trabalho busca entender a relação entre a curva de juros e a economia brasileira usando o modelo de Nelson-Siegel. A partir da metodologia de Diebold, Rudebusch e Aruoba (2006), foi estimado os fatores latentes do modelo Nelson-Siegel via filtro de Kalman e, em seguida, estimado um VECM composto por variáveis latentes referentes à curva de juros e variáveis relacionadas à economia (CDI, medida de inflação e capacidade utilizada). O trabalho focará no período de 2007 a 2019. Esse trabalho vêm com o intuito de aprofundar a literatura sobre a relação da curva de juros com a economia e como esta relação se dá, tanto na questão de causalidades até a constatação de uma relação bilateral entre economia e curva de juros.

Palavras-chave: curva de juros, economia, modelos state-space, Nelson-Siegel

ABSTRACT

The present work seeks to understand the relationship between the yield curve and the Brazilian economy using the Nelson-Siegel model. Based on the Diebold, Rudebusch and Aruoba (2006) methodology, the latent factors of the Nelson-Siegel model were estimated via the Kalman filter, and then a VECM composed of latent variables related to the yield curve and variables related to the economy (CDI, measure of inflation and capacity used) was estimated. The work will focus on the period from 2007 to 2019. This work comes in order to deepen the literature on the relationship of the yield curve with the economy and how this relationship occurs, both in terms of causalities and the finding of a bilateral relationship between economy and the yield curve.

Keywords: yield curve, economy, state-space models, Nelson-Siegel

Lista de siglas

VAR – Vetor Autor regressivo

MQO – Mínimos Quadrados Ordinários

CDI – Certificado de Deposito Interbancário

IPCA – Índice de Preços ao Consumidor Amplo

TLC – Teorema do Limite Central

Lista de gráficos

Gráfico 1 - Componentes do modelo Nelson-Siegel

Gráfico 2 - Taxas ao longo do tempo, por vértice

Gráfico 3 - Curva de juros mediana

Gráfico 4 - Curva de juros em 31/10/2016

Gráfico 5 - Gráfico dos resíduos

Gráfico 6 - Comparação da série filtrada do β_1 e a proxy de nível

Gráfico 7 - Comparação da série filtrada do β_2 e a proxy de inclinação

Gráfico 8 - Comparação da série filtrada do β_3 e a proxy de curvatura

Gráfico 9 - Comparação da série filtrada do β_1 e a taxa de longo prazo

Gráfico 10 - Comparação da série filtrada do β_1 e β_2 com a taxa de curto prazo

Lista de tabelas

Tabela 1 - Estatísticas das variáveis

Tabela 2 - Análise descritiva dos fatores

Tabela 3 - Correlações dos fatores

Tabela 4 - Q-Statistic para correlação serial

Tabela 5 - Teste ADF para raiz unitária

Tabela 6 - Teste de Johansen

Tabela 7 - Critério de informação para seleção de lags

Tabela 8 - Teste de correlação serial

Tabela 9 - Teste de Wald para causalidade no curto prazo

Tabela 10 - Modelo VEC com variáveis macroeconômicas e latentes

Lista de figuras

Figura 1 - Teste CUSUM para a estabilidade do sistema

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
2	REVISÃO DE LITERATURA	15
2.1	Importância da curva de juros	15
2.2	Hipótese das expectativas	17
2.3	Modelo Nelson-Siegel	21
2.4	Estimações da curva	23
3	METODOLOGIA	26
3.1	Dados	27
3.2	Modelagem	28
3.3	Modelo com fatores da curva de juros e variáveis macro	34
4	Conclusão	40
5	REFERÊNCIAS	41
6	APÊNDICE A – Outras variações do modelo de Nelson-Siegel	44

1 INTRODUÇÃO

A curva de juros é um instrumento importante utilizado por participantes do mercado, o que estimula os mesmos a estudá-la de diversos pontos de vista com o objetivo de retirar informações sobre o mercado e a economia. A curva de juros mostra a relação entre retornos em diferentes maturidades, podendo ser positivamente inclinada, horizontal e com inclinação negativa. Cada um desses formatos trazem, de alguma forma, informações do sistema financeiro e da economia.

Há dois fatores que influenciam diretamente a inclinação da curva de juros: a política monetária do Banco Central e os investidores. O primeiro afeta mais as taxas de maturidades de curto prazo, assim com verificado por Janot e Mota (2012) em que uma surpresa na decisão do Copom no Brasil afeta significativamente na taxa de juros de 1 mês, enquanto as expectativas dos investidores afetam os retornos de maturidades mais longas, assim como explorado na revisão de literatura acerca da teoria das expectativas mais à frente.

Dadas as relações acima destacadas, diversos trabalhos foram realizados com o intuito de investigar as mesmas. Jorion e Mishkin (1991) e Mishkin (1990) estudam a relação da curva de juros com as taxas de inflação. Em relação à previsibilidade do ciclo de atividade econômica alguns trabalhos como Bernanke (1990), Estrella e Hardouvelis (1991) e Hamilton e Kim (2002) abordam o assunto. Evans e Marshall (1998) também estudam a curva de juros e sua relação com a política monetária, mais especificamente como a política monetária afeta a curva de juros.

Outro ponto muito estudado acerca da curva de juros é a teoria das expectativas. Essa sugere as que taxas de longo prazo na curva de juros são a média ponderada das expectativas acerca da taxa futura de curto prazo, Mankiw e Miron (1986, p.224). Diversos trabalhos exploram essa teoria e que serão explorados na próxima seção, como Fama (1990), Mankiw e Summers (1984), Fama (1984), Campbell, Shiller e Schoenholtz (1983), Campbell e Shiller (1991), Fama e Bliss (1987) e Mankiw e Miron (1986). Alguns autores exploraram a teoria das expectativas no Brasil, como Marçal e Pereira (2007), Britto, Duarte e Guillien (2004), Lima e Isler (2004) e Tabak e Andrade (2003).

Nesse presente trabalho, utilizarei o trabalho de Diebold, Rudebusch e Aruoba (2006), intitulado *“The macroeconomy and the yield curve: a dynamic latent factor approach”*, como principal referência. Diebold, Rudebusch e Aruoba (2006) utilizam o modelo de

interpolação paramétrica, desenvolvido em Nelson e Siegel (1987) e a interpretação de Diebold e Li (2006) sobre o modelo de Nelson-Siegel, e montam um VAR contendo variáveis macroeconômicas (de economia real, política monetária e inflação). Com essa abordagem, utilizam dados dos EUA para avaliar o efeito da curva de juros nestas variáveis e o efeito de feedback dessas variáveis na curva. Além disso, investigam a teoria das expectativas à luz dos dados e resultados encontrados.

Um trabalho essencial é Diebold e Li (2006), que faz a interpolação da curva de forma paramétrica usando o modelo de Nelson e Siegel (1987), mas a contribuição mais importante deste trabalho para a literatura está na interpretação dos parâmetros em que os autores utilizam a interpretação de nível, inclinação e curvatura, que será explicado na próxima seção com mais profundidade.

O objetivo deste trabalho é fazer as estimações realizadas em Diebold, Rudebusch e Aruoba (2006) para o contexto brasileiro e analisar os resultados, verificando como as variáveis macroeconômicas são afetadas por mudanças nos fundamentos da curva de juros brasileira e como as variáveis macroeconômicas afetam a curva. Esse estudo será feito para o período entre 2007 e 2019.

O trabalho segue a seguinte estrutura: a seção 2, de revisão de literatura, explora as publicações sobre o tema; a seção 3 explora a metodologia, a seção 4 detalha a estimação, a seção 5 com a interpretação dos resultados e a seção 6 com as conclusões finais acerca das estimações.

2 REVISÃO DE LITERATURA

2.1 Importância da curva de juros

A literatura que analisa a importância da curva de juros para a inferência de movimentos em variáveis macroeconômicas é vasta. Trabalhos analisam desde a previsibilidade de ciclos e atividade econômica, como Estrella e Hardouvelis (1991), Evans e Marshall (1998), Hamilton e Kim (2002) e Bernanke (1990), até a previsibilidade de taxas de inflação, como Mishkin (1990) e Jorion e Mishkin (1991).

Estrella e Hardouvelis (1991) estudam se a curva de juros tem poder preditivo sobre a atividade econômica real e, se sim, qual a fonte desse processo. Os autores partem da seguinte equação econométrica:

$$Y_{(t,t+k)} = \alpha_0 + \alpha_1 SPREAD_t + \sum \beta_i * X_{it} + \epsilon_t$$

Estrella e Hardouvelis (1991,pg.558)

Onde $Y_{(t,t+k)}$, é mudança percentual do produto de um trimestre para o outro, o $SPREAD$ é o *spread* entre a taxa de 10 anos e a taxa de três meses e X_{it} é um vetor com outras variáveis controle. Estrella e Hardouvelis (1991) indicam, a partir dos resultados, que uma curva mais inclinada positivamente implica em uma taxa real de crescimento mais acelerada. Porém em casos de um *spread* negativo, nem sempre significará uma queda do produto dado que a constante α_0 é positiva. Além disso, Estrella e Hardouvelis (1991) acham evidências de que a curva consegue prever movimentos no produto real até quatro anos. Outro ponto que os autores estudam é se a curva de juros reflete os efeitos da atual e futura política monetária ou há outros fatores, além da política monetária, que afetam a curva. Segundo Estrella e Hardouvelis (1990), os resultados apontam que as informações passadas pela inclinação da curva de juros são de outras variáveis que não se relacionam com a atual política monetária.

O trabalho de Hamilton e Kim (2002) confirma o poder preditivo do *spread* para a atividade econômica, constatado por Estrella e Hardouvelis (1991), mas tentam descobrir as razões dessa previsão acontecer. Como mostrado no trabalho dos autores, esse *spread* na curva de juros conseguiu prever sete recessões desde o segundo trimestre de 1953. Mas também confirmam outra interpretação de Estrella e Hardouvelis (1991): nem sempre

um spread negativo resultará em recessões, dado que houve casos em que a recessão não ocorreu. Hamilton e Kim (2002) dividem o efeito preditivo do spread em dois: o primeiro, no efeito de expectativas e, o segundo, o efeito do prêmio da curva. Os autores constatam que ambos são estatisticamente relevantes com o efeito de expectativas ser o mais relevante.

Evans e Marshall (1998) estudam como impulsos exógenos da política monetária afetam a estrutura a termo e analisam o impacto no prêmio da taxa longa sobre a taxa curta e o impacto na taxa real de juros *ex-ante*. Os resultados indicam o seguinte: “O impacto de curto prazo vem na forma de um efeito de liquidez, ou seja, uma contração monetária aumenta as taxas de juros e reduz a inflação esperada futura provocando um aumento das taxas de juros reais”, Evans e Marshall (1998, p.104). Portanto, a política monetária afeta primordialmente a parte de curto prazo da curva de juros e, segundo os autores, o efeito de liquidez gerado pela política monetária se dissipa entre seis a doze meses do impulso inicial.

Bernanke (1990) aprofunda o que Stock e Watson (1989) fizeram ao ver que dois tipos de *spread*, tanto a diferença entre os *commercial papers* e *treasury bills*, e também a diferença entre as taxas de dez anos e um ano para títulos do governo eram boas variáveis para prever ciclos. Bernanke (1990) testa esses *spreads* para previsão de dez variáveis relacionadas à atividade econômica real: produção industrial, taxa de desemprego, capacidade instalada, emprego, consumo, mercado imobiliário, vendas no varejo, renda pessoal, bens duráveis e inflação. Ainda, Bernanke (1990) chega no resultado que o spread entre *commercial papers* e *treasury bills* faz uma melhor previsão sobre as variáveis estudadas, mas faz a ressalva que esse poder preditivo teve queda até o momento do estudo e, reitera esse resultado com a seguinte explicação sobre o porquê de o spread entre *commercial papers* e *treasury bills* ser o melhor (Bernanke, 1990, p. 66):

The commercial paper–Treasury bill spread predicts well because it registers developments in both the nonmonetary and monetary sectors of the economy

Segundo Bernanke (1990), o fato desse spread conter informações tanto de setores

mais ligados à política monetária quanto de setores não dependentes faz dele um melhor spread para previsão dessas variáveis ligadas à economia real.

Mishkin (1990) também estuda o que a curva de juros traz em relação ao futuro da inflação e da taxa real de juros em diferentes períodos de estudo que abrangem de fevereiro de 1964 até 1986. A conclusão é basicamente que para maturidades de até seis meses, a estrutura não traz quase nenhuma informação sobre a inflação, mas oferece informação sobre o caminho da taxa de juros real. Porém isso tende a reverter quando se olha maturidade maiores, onde começa a se obter informação sobre futuras taxas de inflação. O trabalho de Mishkin parte da seguinte equação, que regride a variação dos juros na variação da taxa de inflação:

$$\pi_t^m - \pi_t^n = \alpha_{(m,n)} + \beta_{(m,n)}[i_t^m - i_t^n] + \eta_t^{(m,n)}$$

Mishkin (1990,pg.78)

A partir dos resultados, que confirmam o trabalho de Fama (1990), apesar de usar metodologias diferentes, Mishkin (1990) mostra que para o curtíssimo prazo a curva a termo não oferece informação alguma sobre futuras taxas de inflação, porém Mishkin (1990) nota que este cenário muda a partir de 9 meses, o que para Fama (1990) somente acontece depois de dois anos.

Jorion e Mishkin (1991) usam dados da curva de juros para maturidades de um a cinco anos para Estados Unidos, Reino Unido, Alemanha Ocidental e Suíça para previsão de mudanças na taxa de inflação e usam a metodologia de Mishkin (1990). Os autores acham evidências de previsibilidade da curva de juros para taxas de inflação para maturidades mais longas, porém essa previsibilidade é fraca para maturidades curtas.

2.2 Hipótese das expectativas

A hipótese das expectativas explica que as taxas de juros de maturidades longas na curva de juros são as médias ponderadas das expectativas acerca das futuras taxas de juros de curto prazo, como colocado por Mankiw e Summers (1984). Se, por exemplo, é esperado que as futuras taxas de juros de curto prazo sejam maiores, então a taxa de maturidades mais longas vão exceder as taxas de curto prazo mais o prêmio de risco por deixar capital alocado por mais tempo. A importância dessa teoria como guia de expectativas acerca de

mudanças estruturais na economia incentivou diversos autores a estudarem a mesma.

Fama (1984) testa se as taxas *forward*¹ variam ao longo do tempo e qual a composição do prêmio e da expectativa futura da taxa spot nas taxas *forward*. O que Fama acha é evidência de que ambos componentes das taxas *forward* variam ao longo do tempo. Segundo o autor, a grande parte da variação das taxas *forward* é explicada pela variação do prêmio de risco e não pelas expectativas e isso o leva a rejeitar a hipótese das expectativas no período de agosto de 1973 a dezembro de 1982.

Mankiw e Summers (1984) estudam se taxas em maturidades mais longas na curva de juros tendem a refletir a expectativa futura de taxas spot. Mankiw e Summers (1984) seguem testando duas hipóteses acerca da teoria das expectativas. A primeira, se a hipótese das expectativas, dado que as taxas mais longas são uma média das expectativas dos players do mercado, então esse corte de maturidades mais longas deveria ser uma série mais suave que um corte de curto prazo. A segunda, dado que a teoria das expectativas é válida exceto por um prêmio de liquidez aleatório. Na primeira hipótese os autores enxergam, que os participantes do mercado não têm expectativas racionais quando tentam prever futura taxas de juros. E em relação à segunda hipótese, mesmo retirando o prêmio, faz com que as taxas no curto prazo da curva de juros expliquem muito pouco do spread entre taxa de maturidades longas e taxa de maturidades curtas.

Outro estudo muito importante acerca da hipótese das expectativas, em linha com Mankiw e Summers (1984), é o estudo de Fama e Bliss (1987) que investiga o quanto de informação as taxas *forward* contêm sobre uma futura taxa de juros de curto prazo. Esse é motivado por testes antigos que comprovaram a ineficiência dessas taxas de prever a futura taxa de juros. Os autores concluem que para maturidades curtas as taxas *forward* não conseguem prever a taxa de curto prazo e que esse poder preditivo aumenta conforme a maturidade aumenta.

Shiller e Campbell (1983) testam a hipótese das expectativas usando um modelo linear com um prêmio de risco variando com o tempo. Chegam a um resultado oposto de Fama (1984) e Fama e Bliss (1987), no qual apesar de os autores acharem que as taxas *forward* são capazes de prever taxas de juros em horizontes mais longos, eles argumentam que essa previsão somente foi possível em intervalo de tempo muito específico.

Fama (1990) traz o resultado de que a previsão da taxa de juros spot no prazo de

¹Taxas *forward* é a taxa juros de um contrato com início futuro.

um a dois anos não é possível pela curva de juros, mas que isso muda quando olhamos para horizontes mais longos. O mesmo parte da proposição de Fama e Bliss (1987), que concluem que a taxa spot esperada de um ano pode ser explicada em termos do retorno real e da taxa de inflação esperada (ambos para o prazo de um ano). Fama (1990) chega a duas conclusões nesse trabalho, em relação a taxa de curto prazo e ao horizonte de previsão: a primeira, é de que a taxa spot de curto prazo não pode ser prevista com significância, pois resultados mostram que a inflação esperada de um ano e o retorno real de títulos de um ano se movem em direções opostas, e Fama (1990, pg.60) indica que estes chegam muitas vezes a se anular, isso ocorre para períodos de até dois anos. A segunda conclusão de Fama (1990) é de que esta previsibilidade começa a ter significância para horizontes maiores e, portanto, o *spread* entre a taxa de cinco e um ano teria informação sobre o futuro das variáveis estudadas.

Campbell e Shiller (1991) avançam na teoria das expectativas a fim de ver se o *spread* entre longo e curto prazo tem poder preditivo na mudança de taxas de juros futuras e qual o tamanho desse poder. Usando dados de 1952 a 1987, Campbell e Shiller (1991) chegam em um “paradoxo” em que a inclinação da curva de juros, na maior parte dos casos, mostra a direção errada da mudança da taxa de juros no curto prazo mas que a inclinação passa a prever movimentos corretos na taxa de juros de curto prazo futura em maturidades mais longas. Com esse “paradoxo” os autores estimam um VAR para testar a questão das expectativas em diversas maturidades, porém o que os autores encontram é que a hipótese das expectativas não é provada para quase nenhuma maturidade.

Mankiw e Miron (1986) testam a hipótese das expectativas para maturidades mais longas, com séries a partir de 1890 até 1979. E nesse período dividem em vários regimes para testar a robustez dos resultados de outros estudos. Mankiw e Miron (1986) aprovam a teoria de expectativas, mas para um período anterior, principalmente anterior ao *Federal Reserve*, onde a inclinação da curva de juros consegue prever o caminho dos juros.

No Brasil, o estudo da hipótese das expectativas é relativamente recente e alguns trabalhos foram essenciais para entender como a hipótese das expectativas funciona nos dados brasileiros. Trabalhos estes como Marçal e Pereira (2007), Brito, Duarte e Guillén (2004), Lima e Isler (2004) e Tabak e Andrade (2003).

Tabak e Andrade (2003) usam dados diários no período de 1995 a 2001 para vértices da curva de juros de 2 a 12 meses. Os autores fazem dois tipos de testes, o primeiro,

regridem a mudança na taxa de curto prazo frente ao spread e analisam se o mesmo consegue prever mudança em taxas curtas e, no segundo, adicionam a volatilidade das taxas de juros para ver se risco país influencia de fato essas taxas de curto-prazo. Os autores discorrem sobre a importância de adicionar a volatilidade das taxas de juros no trecho:

The intuitive reason for including a measure of interest rates volatility is straightforward: the more volatile interest rates are, the riskier a long-term bond is compared to a short-term one. Thus, according to modern portfolio theory, the higher must be the expected return of a longer-term bond relative to a short-term one.

Tabak e Andrade (2003) concluem que a hipótese das expectativas não funciona porque o prêmio de risco da curva varia ao longo do tempo e, segundo a hipótese das expectativas, este prêmio deveria ser constante.

Lima e Isler (2004) utilizam a metodologia de Campbell e Shiller (1987), de valor presente, para testar a hipótese e constroem um VAR(2) para as diferenças de juros de curto prazo e o spread. Porém, por conta da não estacionariedade, os autores passam a testar se o spread de juros é igual ao spread teórico, spread esse que causaria a correta inferência acerca das taxas de juros. O resultado que Lima e Isler (2004) chegam é que, para o período de 1995 a 2001, a hipótese das expectativas não funciona no período de 180 até 360 dias, porém os autores não podem rejeitar a hipótese das expectativas para taxas de juros de longo prazo, uma vez que o “spread efetivo” não é significativamente diferente do teórico.

Brito, Duarte e Guillen (2004) fazem testes em relação à hipótese das expectativas para o Brasil e utilizam dados de 1996 até 2001. Chegam em um resultado inconclusivo no que tange ao poder de estimativa do movimento em taxa curtas para taxa mais longas. Para estimar esses efeitos é utilizado o método de MQO para estimar o efeito dos spreads das taxas de longo prazo com as taxas de curto prazo e o efeito dos spreads na mudança das taxas de longo prazo. Apesar de os autores não conseguirem rejeitar a hipótese das

expectavas, os mesmos reconhecem que isso pode ser por conta da metodologia utilizada como mostrada no trecho abaixo:

By summarizing the evidence of regressions performed so far, it is not possible to reject the REH. However, it may be suspected that non-rejection is due to the low power of these test procedures, which consist in analyzing coefficients estimated with large standard errors

Marçal e Pereira (2007) fazem testes que foram implementados em outros artigos acerca da hipótese das expectativas para o mercado brasileiro, com dados diários e mensais no período de 1995 a 2002. O primeiro teste segue Campbell e Shiller (1991) que regridem o *spread* no *spread* teórico (*spread* que faria a previsão perfeita) e chegam em resultados contrário à hipótese das expectativas. Para corrigir alguma inconsistência dos estimadores, os autores utilizam variáveis com *lag* dos *spreads* como instrumento. O resultado em que chegam não necessariamente rejeita a hipótese das expectativas, mas eles o tomam com cautela dado que os estimadores têm desvios-padrões grandes. Outro método de teste é um VAR com cinco defasagens para os vértices de 1 dia e 2, 3, 6, 9 e 12 meses, mas neste teste ele não consegue rejeitar a hipótese, mesmo o efeito sendo fraquíssimo.

2.3 Modelo Nelson-Siegel

O presente trabalho é baseado na pesquisa de Diebold, Rudebusch e Aruoba (2006), e os mesmo usam o trabalho de Diebold e Li (2006) como base para suas estimações de efeito da curva de juros sob variáveis macroeconômicas e efeitos de feedback. O principal modelo econométrico que é usado em ambos os trabalhos foi desenvolvido por Nelson e Siegel em “*Parsimonious Modeling of the Yield Curve*”. Esta seção apresenta o modelo paramétrico de Nelson-Siegel e a interpretação que foi dada aos parâmetros por Diebold e Li (2006), dado que ambos são especialmente importantes para as estimações deste trabalho.

O trabalho de Nelson e Siegel (1987) procurou desenvolver um modelo que explicasse a curva de juros em termos de parâmetros e que conseguisse capturar os diversos formatos da curva de juros ao longo do tempo. O modelo que ficou conhecido como Nelson-Siegel é dado por (1):

$$y_t(\tau) = \beta_{1t} + \beta_{2t} \frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} + \beta_{3t} \frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} - e^{-\lambda_t \tau} (1)$$

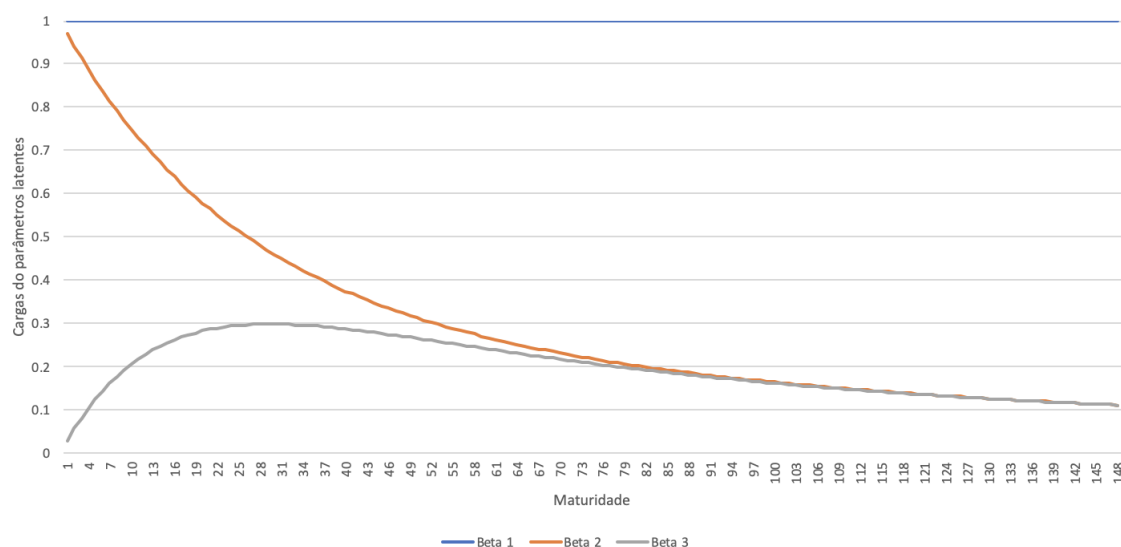
A variável reposta, $y_t(\tau)$, é a taxa de juros de zero cupom para a maturidade τ , os parâmetros da equação acima β_{1t} , β_{2t} e β_{3t} são fatores latentes, o que significa que não são diretamente observáveis e o λ_t é o parâmetro que controla o decaimento exponencial da função acima, ou seja, valores baixos de λ_t produzem um decaimento mais devagar. Como Diebold e Li (2006) atestam, a taxa de longo prazo pode ser interpretada como β_{1t} e a taxa de curtíssimo prazo pode ser interpretada como $\beta_{1t} + \beta_{2t}$.

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} y(\tau) = \beta_{1t} \quad (2)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} y(\tau) = \beta_{1t} + \beta_{2t} \quad (3)$$

Em Nelson e Siegel (1987), na construção do modelo os autores mostram as cargas colocadas em cada um dos parâmetros latentes como mostrado no gráfico 1, que foi elaborado tomando como base o trabalho original:

Gráfico 1 - Componentes do modelo Nelson-Siegel



Fonte: Elaboração própria com base em Diebold e Li (2006)

Diebold e Li (2006) fazem uma interpretação diferente sobre os parâmetros da equação original de Nelson e Siegel (1987), que visa compreender a curva de juros sob diversas formas. Eles modificam os parâmetros β_{1t} , β_{2t} , β_{3t} para L_t , S_t , C_t , como descrito em (4):

$$y_t(\tau) = L_t + S_t \frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} + C_t \frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} - e^{-\lambda_t \tau} (4)$$

Os autores acham que o β_{1t} é altamente correlacionado com o fator latente de nível, assim como o β_{2t} é com o fator de inclinação e β_{3t} com o fator de curvatura. O modelo de Nelson-Siegel acabou sendo precursor de várias outras variações de modelos, muito por ser um modelo relativamente simples porém com uma alta capacidade de explicar os diversos formatos da curva de juros, como destaca De Pooter (2007, p.1): “They demonstrated that their proposed model is capable of capturing many of the typically observed shapes that the yield curve assumes over time”. Outras variações do modelo incluem Litterman e Scheinkman (1991), Björk e Christensen (1999), Bliss (1997) e Svensson (1994). Litterman e Scheinkman (1991) usam apenas dois fatores com a justificativa que o terceiro fator adiciona pouco sobre a explicação das taxas. Björk and Christensen (1999) estimam o modelo com quatro fatores e cinco fatores e Bliss (1997) usa um modelo parecido com o original Nelson e Siegel (1987), porém adiciona dois parâmetros de decaimento, ao invés de somente um. Svensson (1994) adiciona um quarto fator que ajuda a melhorar o fit do modelo nas diversas formas da curva de juros, com todos esses modelos presentes no apêndice A.

2.4 Estimações da curva

Estudos que buscaram entender as relações da curva de juros tiveram que estimá-la de alguma forma. O presente trabalho estima a curva brasileira com os efeitos das variáveis macroeconômicas, assim como feito por Diebold, Rudebusch e Aruoba (2006). Este último estudo faz parte de uma gama de trabalhos que tentaram fazer essa aproximação da estrutura da curva de juros com a economia e seus efeitos. Há diversas maneiras de estimar a curva de juros, que vai de modelos com variáveis latentes e com condições de não-arbitragem (Duffie e Kan (1996) e Dai Singleton (2000)), que adicionam variáveis latentes com variáveis macroeconômicas olhando movimentos unidirecionais (Ang e Piazzesi (2003) e Wu (2002)) e, por último, modelos com variáveis latentes, macroeconômicas e que analisa movimentos bidirecionais (Diebold, Rudebusch e Aruoba (2006)).

Diebold, Rudebusch e Aruoba (2006) fazem estimações com um VAR composto por variáveis latentes e variáveis que simbolizam a economia, com variáveis de economia real,

política monetária e inflação. Diebold, Rudebusch e Aruoba (2006) destacam que os trabalhos que mais se aproximam do deles é Dewachter e Lyrio (2002) e Rudebusch e Wu (2003).

Dewachter e Lyrio (2002) estudam como variáveis macroeconômicas afetam os movimentos na curva de juros. Em relação ao termo de nível, os autores observam, que é bem explicado pela expectativa de inflação de longo prazo, a inclinação é explicada por variáveis ligadas ao ciclo econômico e a curvatura ligada a política monetária. Assim postulado por Diebold, Rudebusch e Aruoba (2006), Dewachter e Lyrio (2002) discute que grande parte das modelagens da curva de juros falha em tentar conectar essa estrutura com variáveis econômicas. Rudebusch e Wu (2004) adicionam ao debate que apesar de muitos modelos, com condição de não-arbitragem, conseguirem explicar muito bem movimentos na curva, esses modelos acabam não adicionando muito na inferência de impactos da curva sobre a economia, como explicitado abaixo por Rudebusch e Wu (2004, p.1):

However, while these popular affine no-arbitrage models do provide useful statistical descriptions of the term structure, they offer little insight into the economic nature of the underlying latent factors or forces that drive movements in interest rates. To provide such insight, this paper combines a canonical affine no-arbitrage model of the term structure with a standard macroeconomic model.

Rudebusch e Wu (2004) colocam variáveis macroeconômicas em seus modelos, mas colocam essas variáveis juntamente com variáveis latentes em um modelo de não-arbitragem. Assim como Dewachter e Lyrio (2002), Rudebusch e Wu (2004) relacionam variáveis latentes com variáveis macroeconômicas e concluem que o fator de nível é mais próximo da expectativa de inflação-meta do Banco Central e para o fator de inclinação esse é mais próximo da variação da inflação e do hiato do produto.

Um outro tipo de vertente é incorporar variáveis latentes de países diferentes para avaliar co-movimentos de curva de juros de diferentes países. Caldeira e Stona (2017) avaliam o impacto de movimento de indicadores americanos e de fatores latentes da curva

americana na curva brasileira. Com estimações de VAR com variáveis macroeconômicas brasileiras e fatores latentes da curva brasileira e outra estimação com fundamentos da economia americana com fatores latentes brasileiros, os autores chegam a conclusão que a curva de juros brasileira é dependente de fatores latentes da curva americana, principalmente em horizontes longos, uma vez que o fator de curvatura americano é responsável por 30 % da variância do fator de curvatura e inclinação brasileiro.

Bernz (2014) faz estimações que se relacionam fortemente com o intuito deste trabalho. O autor estima para a economia brasileira a curva de juros por dois processos: tanto pelo filtro de Kalman quanto por dois estágios semelhante ao empregado por Diebold e Li (2006). Por fim, o autor analisa o quanto variáveis relacionadas à economia brasileira explica a curva de juros estimada.

3 METODOLOGIA

Como mencionado anteriormente, esse trabalho tem como objetivo analisar o efeito da curva de juros sob variáveis macroeconômicas e seu efeito feedback sobre a curva de juros. A metodologia a ser usada será a mesma apresentada em Diebold, Rudebusch e Aruoba (2006), os autores fizeram esse estudo com base em dados americanos e utilizando variáveis da economia real (capacidade utilizada), política monetária (taxa do fed funds) e taxa de inflação com as séries dos fatores latentes do modelo Nelson Siegel: L_t, S_t, C_t , descrito na equação 4.

Para a estimação dos parâmetros em cada período de tempo há duas metodologias disponíveis: a primeira, é fazer uma regressão de MQO de cada período de estudo e construir a série conforme foi proposto por Diebold e Li (2006). A segunda, e a qual usaremos no trabalho, é estimar esses fatores latentes por meio do filtro de Kalman, esse último foi proposto em Diebold, Rudebusch e Aruoba (2006). O porquê do uso do Filtro e Kalman em detrimento do proposto em Diebold e Li (2006) é explicado por Diebold, Rudebusch e Aruoba (2006, p.313):

In addition, the one-step Kalman filter approach of this paper is preferable to the two-step Diebold–Li approach, because the simultaneous estimation of all parameters produces correct inference via standard theory. The two-step procedure, in contrast, suffers from the fact that the parameter estimation and signal extraction uncertainty associated with the first step is not acknowledged in the second step.

Dado que a superioridade do filtro de Kalman vem da melhor inferência, esse será o método escolhido para estimação dos fatores latentes que compõem o modelo de Nelson-Siegel e que fará parte da estimação do modelo.

Outro ponto a ser discutido é a estimação do parâmetro de decaimento, λ_t . Nesse ponto, esse trabalho vai seguir Diebold e Li (2006), em que os autores fixam um valor fixo para o parâmetro de decaimento. Para a obtenção do λ_t iremos seguir Bernz (2014), onde pegaremos o valor de λ_t , que minimiza o carregamento de médio-prazo para a maturidade

média de nossa amostra. Diebold e Li (2006), para os dados americanos fixam o valor de 0,0609.

3.1 Dados

A base de dados para o estudo contém as taxas de swap pré-DI² (proxy para a curva de juros), taxa CDI, IPCA e capacidade utilizada (CU). Para os swaps pré-DI serão obtidos dados mensais (começo de mês) para os vértices de 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 30, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120 meses assim como feito por Diebold, Rudebusch e Aruoba (2006) no período de 2007 a 2019. Os dados do CDI e do IPCA também serão coletados mensalmente, além disso, o uso do IPCA como índice de inflação se dá pelo mesmo ser o índice oficial de inflação do Brasil. Os dados mencionados foram coletados da Bloomberg. Para variável de produto utilizaremos o índice IBC-Br dessazonalizado, divulgado mensalmente pelo Banco Central do Brasil.

A última variável a compor a base de dados será a capacidade utilizada (CU) e será estimada seguindo o entendimento de Feijó (2006) sobre a variável :

$$CU = Y/Y^* \quad (5)$$

Em que Y é o produto e Y* é o produto potencial. Para construção da variável CU será necessário estimar o produto potencial mensalmente no país e para isso será utilizado o filtro de Hodrick-Prescott.

A partir dos dados, espera-se observar qual o impacto da curva de juros na economia e se há o efeito de *feedback*. Diebold, Rudebusch e Aruoba (2006) encontram um efeito forte de variáveis relacionadas a macroeconomia na curva de juros, porém um efeito menor da curva nas variáveis macro. Além disso, seguindo os resultados Dewachter e Lyrio (2002), mostrados anteriormente, é esperado uma maior relação do fator de nível (L_t) com inflação, do fator de inclinação (S_t) com a variável ligada ao ciclo econômico que neste trabalho é CU e por fim, o fator de curvatura (C_t) com o CDI.

²Swap pré-DI é um acordo entre duas partes na troca de fluxo de caixas de uma operação, de flutuante para fixo, por exemplo.

3.2 Modelagem

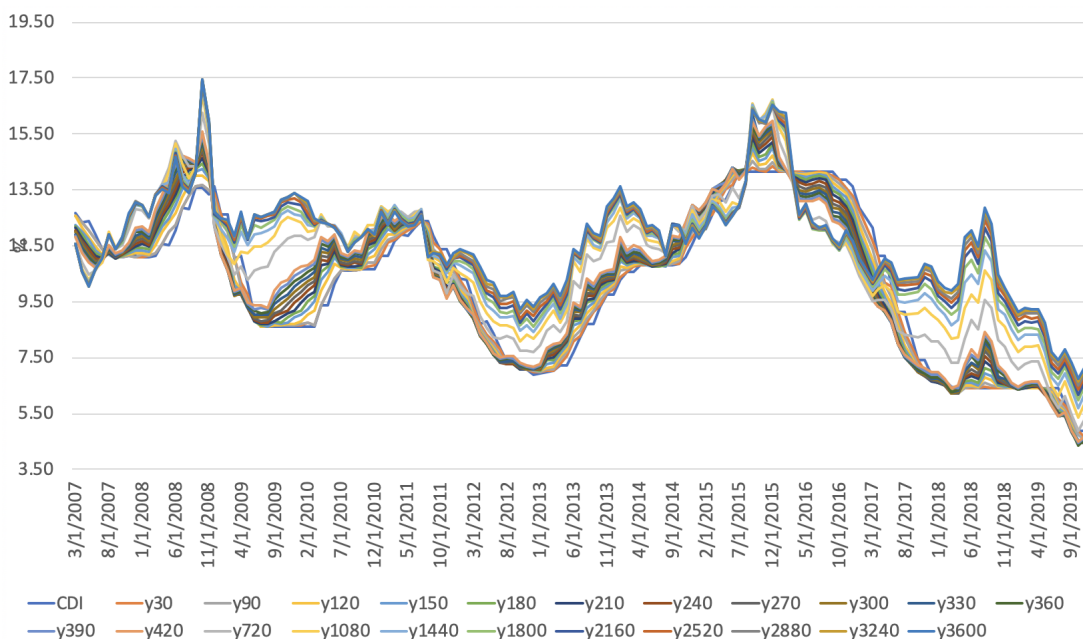
Após a coleta dos dados é essencial compreender as dinâmicas de cada variável, uma vez que as mesmas serão a base do trabalho e inferência a seguir. Um primeiro aspecto a ser notado, na tabela 1, é que taxas de maturidade mais curta são mais voláteis, uma vez que taxas mais longas assim como encontrado por Diebold e Li (2006) e isso pode ser explicado pelo fato de taxas longas, pela teoria das expectativas, serem a média ponderada de futura taxas de curto prazo.

Tabela 1 - Estatísticas das variáveis

	CDI	y30	y90	y120	y150	y180	y210	y240	y270	y300	y330	y360	y390	y420	y720	y1080	y1440	y1800	y2160	y2520	y2880	y3240	y3600	IPCA	CU
Média	10,16	10,14	10,13	10,16	10,18	10,20	10,22	10,25	10,27	10,31	10,34	10,37	10,41	10,45	10,87	11,17	11,35	11,45	11,53	11,59	11,66	11,70	11,74	0,45%	1,05
Desvio Padrão	2,63	2,64	2,66	2,69	2,70	2,71	2,72	2,72	2,72	2,72	2,72	2,71	2,70	2,69	2,49	2,29	2,15	2,06	2,00	1,95	1,92	1,89	1,87	0,0027	0,04
Mínimo	4,4	4,405	4,425	4,338	4,315	4,324	4,323	4,348	4,37	4,396	4,433	4,367	4,469	4,487	4,873	5,337	5,715	5,983	6,171	6,344	6,497	6,626	6,731	-0,27%	0,96
Máximo	14,14	14,33	14,54	14,84	15,02	15,22	15,41	15,59	15,66	15,73	16,21	15,81	16,02	15,97	16,53	16,97	17,25	17,39	17,4	17,42	17,44	17,45	17,45	1,35%	1,15
Skew	-0,19	-0,18	-0,17	-0,17	-0,17	-0,16	-0,16	-0,16	-0,16	-0,16	-0,15	-0,17	-0,16	-0,17	-0,17	-0,12	-0,10	-0,08	-0,05	-0,02	0,02	0,06	0,08	0,62	0,02
Curtose	-1,04	-1,03	-1,01	-0,97	-0,95	-0,92	-0,9	-0,86	-0,83	-0,8	-0,75	-0,74	-0,7	-0,68	-0,25	0,21	0,535	0,741	0,869	0,956	1,043	1,103	1,154	0,9511	-0,48

Correlações	
CDI	1,000
y30	0,997 1,000
y90	0,994 0,999 1,000
y120	0,987 0,995 0,997 1,000
y150	0,978 0,989 0,993 0,999 1,000
y180	0,970 0,982 0,988 0,996 0,999 1,000
y210	0,962 0,976 0,982 0,992 0,997 0,999 1,000
y240	0,953 0,968 0,976 0,988 0,994 0,998 0,999 1,000
y270	0,945 0,961 0,970 0,983 0,991 0,995 0,998 1,000 1,000
y300	0,937 0,954 0,963 0,978 0,987 0,992 0,996 0,998 1,000 1,000
y330	0,929 0,947 0,956 0,973 0,982 0,989 0,993 0,996 0,998 1,000 1,000
y360	0,922 0,940 0,950 0,968 0,978 0,985 0,990 0,994 0,997 0,999 1,000 1,000
y390	0,914 0,933 0,944 0,962 0,974 0,981 0,987 0,992 0,995 0,997 0,999 1,000 1,000
y420	0,907 0,927 0,938 0,956 0,969 0,977 0,984 0,989 0,993 0,996 0,998 0,999 1,000 1,000
y720	0,847 0,869 0,881 0,905 0,921 0,933 0,943 0,952 0,960 0,967 0,972 0,977 0,981 0,985 1,000
y1080	0,806 0,827 0,840 0,864 0,881 0,894 0,906 0,917 0,926 0,934 0,942 0,948 0,954 0,959 0,992 1,000
y1440	0,783 0,802 0,814 0,838 0,855 0,868 0,881 0,892 0,901 0,910 0,918 0,925 0,932 0,938 0,980 0,996 1,000
y1800	0,761 0,779 0,791 0,815 0,832 0,845 0,858 0,869 0,879 0,888 0,897 0,904 0,911 0,918 0,967 0,990 0,998 1,000
y2160	0,744 0,762 0,774 0,797 0,814 0,827 0,840 0,852 0,862 0,871 0,880 0,887 0,895 0,902 0,955 0,983 0,995 0,999 1,000
y2520	0,729 0,747 0,759 0,782 0,799 0,813 0,826 0,838 0,848 0,857 0,867 0,874 0,882 0,889 0,946 0,977 0,991 0,997 0,999 1,000
y2880	0,717 0,735 0,747 0,770 0,787 0,801 0,814 0,826 0,837 0,846 0,856 0,864 0,872 0,879 0,938 0,971 0,987 0,994 0,998 1,000 1,000
y3240	0,708 0,725 0,738 0,761 0,778 0,792 0,805 0,817 0,828 0,838 0,848 0,855 0,864 0,871 0,931 0,967 0,984 0,992 0,997 0,999 1,000 1,000
y3600	0,700 0,717 0,729 0,753 0,770 0,784 0,797 0,810 0,820 0,830 0,840 0,848 0,856 0,864 0,926 0,962 0,980 0,990 0,995 0,998 0,999 1,000 1,000
IPCA	0,287 0,306 0,323 0,342 0,358 0,371 0,381 0,391 0,398 0,404 0,408 0,414 0,417 0,421 0,432 0,424 0,417 0,407 0,401 0,398 0,400 0,401 0,400 1,000
CU	-0,284 -0,289 -0,292 -0,295 -0,299 -0,304 -0,309 -0,313 -0,319 -0,323 -0,327 -0,333 -0,338 -0,343 -0,370 -0,361 -0,348 -0,340 -0,331 -0,323 -0,315 -0,308 -0,302 -0,217 1,000

Gráfico 2 - Taxas ao longo do tempo, por vértice



A curva mediana é positivamente inclinada em grande parte das vezes como demonstrado no gráfico 3, e que em alguns momentos pode se tornar negativamente inclinada como o gráfico 4 de 31/10/2016 em que os participantes do mercado tinham expectativas de uma taxa alta no curto prazo mas que seria revertida no futuro.

Gráfico 3 - Curva de juros mediana

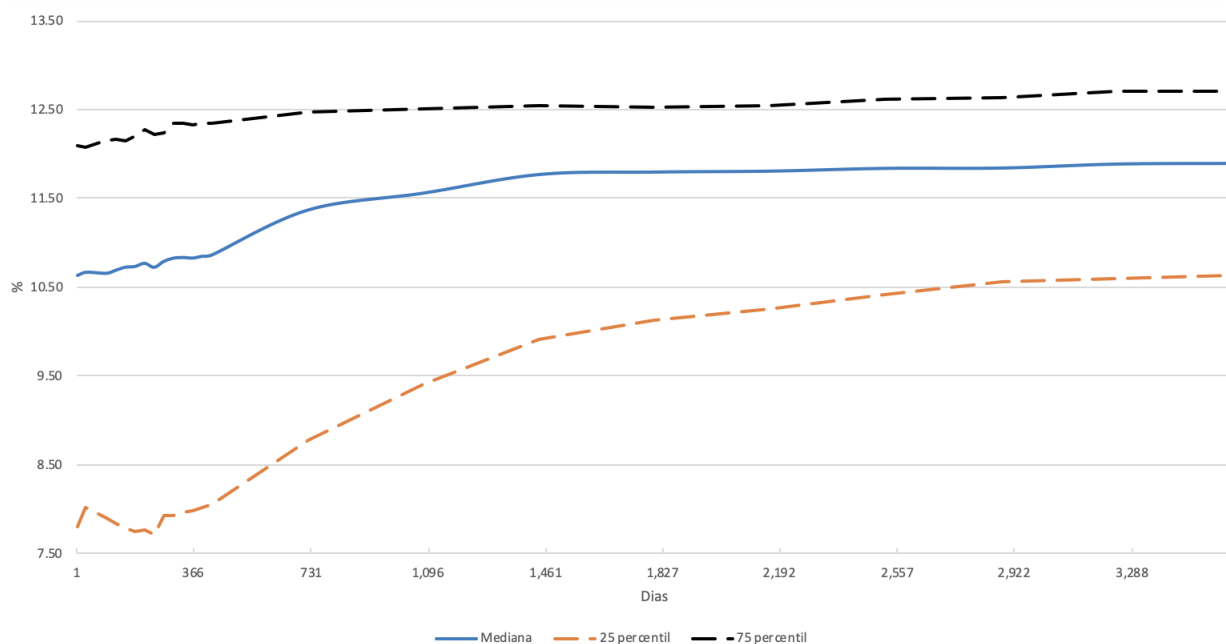
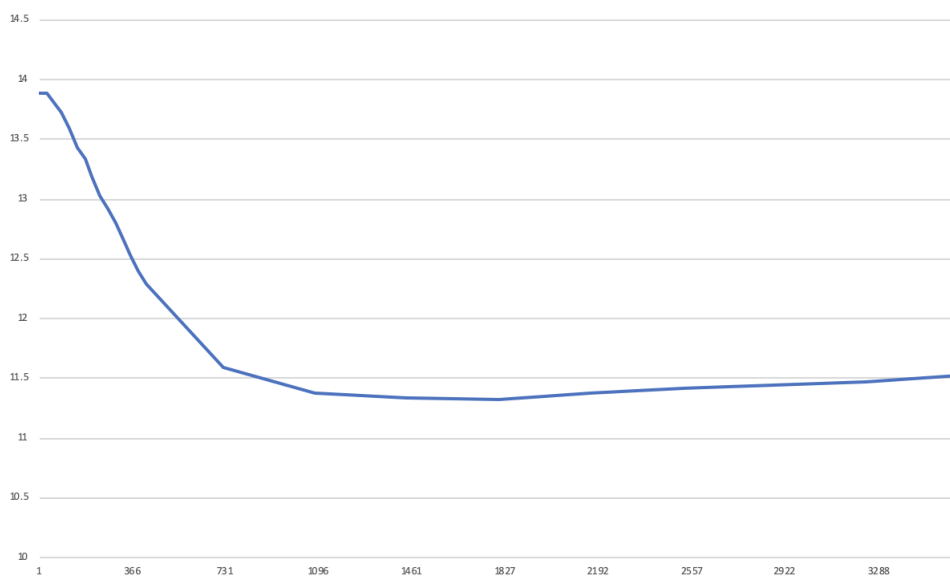


Gráfico 4 - Curva de juros em 31/10/2016



Uma parte importante do trabalho é analisar os fatores presentes no modelo de Nelson

Siegel, demonstrado na equação 4. Para isso, foi utilizada a metodologia de filtro de Kalman, presente em Nelson e Kim (1999), e após a estimação foi obtido os seguintes resultados abaixo, nas tabelas 2 e 3.

Assim com Diebold e Li (2006), uma questão essencial para essa metodologia é o valor do λ a ser utilizado e neste trabalho foi utilizada a mesma metodologia que os autores utilizam, onde eles utilizam o λ que maximiza a carga do β_2 e no caso dos dados brasileiros, o valor utilizado foi de 0,0704.

Assim como explitado a metodologia para encontrar as séries de β_1 , β_2 e β_3 será o filtro de Kalman como feito por Diebold, Rudebuschand Aruoba (2006). Como o modelo abaixo de *state – space*, retirado de Diebold, Rudebuschand Aruoba (2006):

Equação de transição

$$\begin{pmatrix} L_t - \mu_L \\ S_t - \mu_S \\ C_t - \mu_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{t-1} - \mu_L \\ S_{t-1} - \mu_S \\ C_{t-1} - \mu_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_t(L) \\ \eta_t(S) \\ \eta_t(C) \end{pmatrix}$$

Fonte: Diebold, Rudebuschand Aruoba (2006),pg. 312

Equações do modelo

$$\begin{pmatrix} y_t(\tau_1) \\ y_t(\tau_2) \\ \vdots \\ y_t(\tau_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1 - e^{-\tau_1\lambda}}{\tau_1\lambda} & \frac{1 - e^{-\tau_1\lambda}}{\tau_1\lambda} - e^{-\tau_1\lambda} \\ 1 & \frac{1 - e^{-\tau_2\lambda}}{\tau_2\lambda} & \frac{1 - e^{-\tau_2\lambda}}{\tau_2\lambda} - e^{-\tau_2\lambda} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{1 - e^{-\tau_N\lambda}}{\tau_N\lambda} & \frac{1 - e^{-\tau_N\lambda}}{\tau_N\lambda} - e^{-\tau_N\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_t \\ S_t \\ C_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_t(\tau_1) \\ \varepsilon_t(\tau_2) \\ \vdots \\ \varepsilon_t(\tau_N) \end{pmatrix}$$

Distribuição de erros

$$\begin{pmatrix} \eta_t \\ \varepsilon_t \end{pmatrix} \sim WN \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix} \right],$$

$$E(f_0 \eta'_t) = 0,$$

$$E(f_0 \varepsilon'_t) = 0.$$

Fonte: Diebold, Rudebuschand Aruoba (2006),pg. 313

Após a estimação das séries dos betas os seguintes reultados são apresentados nas tabe-

las 2 e 3 e se observa um resultado particularmente importante para questões de modelagem que a correlação entre os fatores e aqui vemos que eles não são muito correlacionados entre si, um resultado similar ao encontrado por Diebold e Li (2006).

Tabela 2 - Análise descritiva dos fatores

Fator	Média	Desvio Padrão
Beta 1 - Nível	11,56315	1,708885
Beta 2 - Inclinação	-2,059349	2,657149
Beta 3 - Curvatura	1,373018	1,781849

Tabela 3 - Correlações dos fatores

	Beta 1 - Nível	Beta 2 - Inclinação	Beta 3 - Curvatura
Beta 1 - Nível	1,000000		
Beta 2 - Inclinação	-0,094508	1,000000	
Beta 3 - Curvatura	0,742273	0,020873	1,000000

Os gráficos adiante mostram, assim como feito em Diebold, Rudebusch e Aruoba (2006), a comparação entre as séries filtradas pelo filtro de Kalman e as *proxies de mercado* colocadas em Diebold, Rudebusch e Aruoba (2006). Abaixo está as proxies utilizada pelos autores:

$$nível_{proxy} = \frac{yield_{3meses} + yield_{2anos} + yield_{10anos}}{3} \quad (6)$$

$$inclinação_{proxy} = yield_{3meses} - yield_{10anos} \quad (7)$$

$$curvatura_{proxy} = 2 * yield_{2anos} - yield_{10anos} - yield_{3meses} \quad (8)$$

Comparando as séries filtradas com essas *proxies* foi obtido resultado parecido com Diebold, Rudebusch e Aruoba (2006), em que se obteve um bom ajuste para o fator de nível e inclinação mas no fator de curvatura não se observa um bom ajuste e isso também ocorre em Diebold, Rudebusch e Aruoba (2006). Com as estimações do modelo vemos um resultado parecido com os autores de conexão fraca entre o fator de curvatura e variáveis macroeconômicas. Abaixo estão o diagnóstico do modelo, apresentando ausência de correlação serial, gráfico dos resíduos do ajuste e a normalidade é assumida via TLC.

Tabela 4 - Q-Statistic para correlação serial

Q-Stat	p-value
	0,095

Gráfico 5 - Gráfico dos resíduos

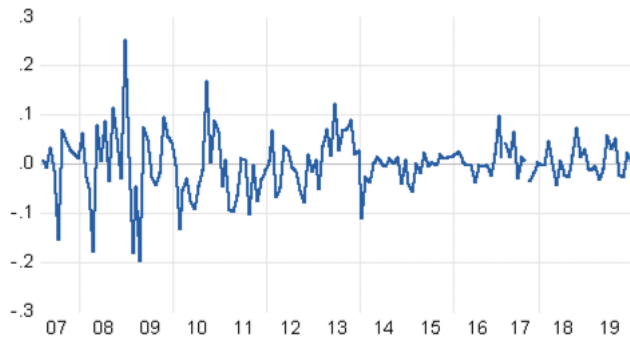


Gráfico 6 - Comparação da série filtrada do β_1 e a proxy de nível

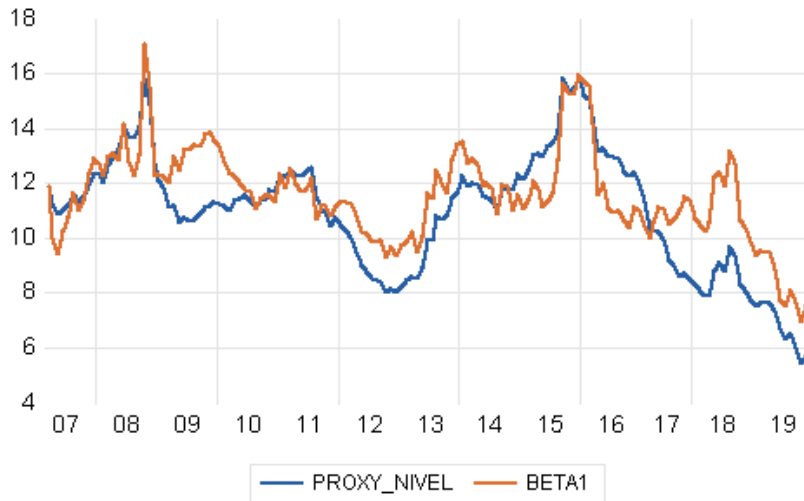


Gráfico 7 - Comparação da série filtrada do β_2 e a proxy de inclinação

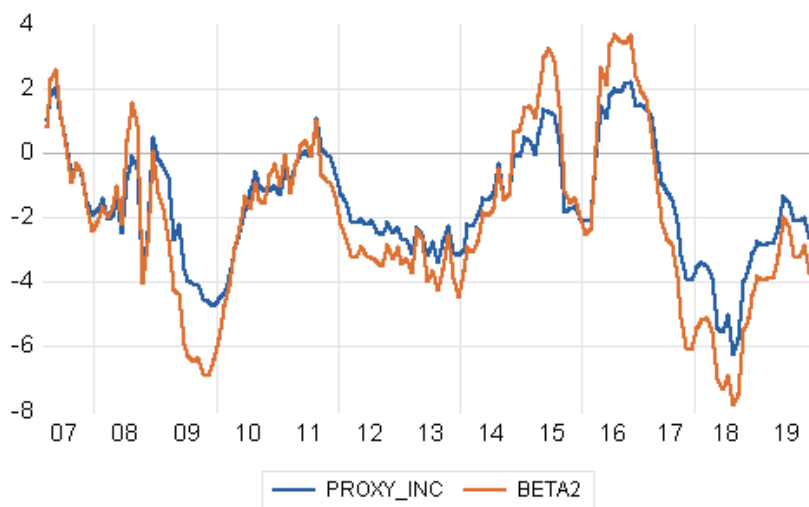
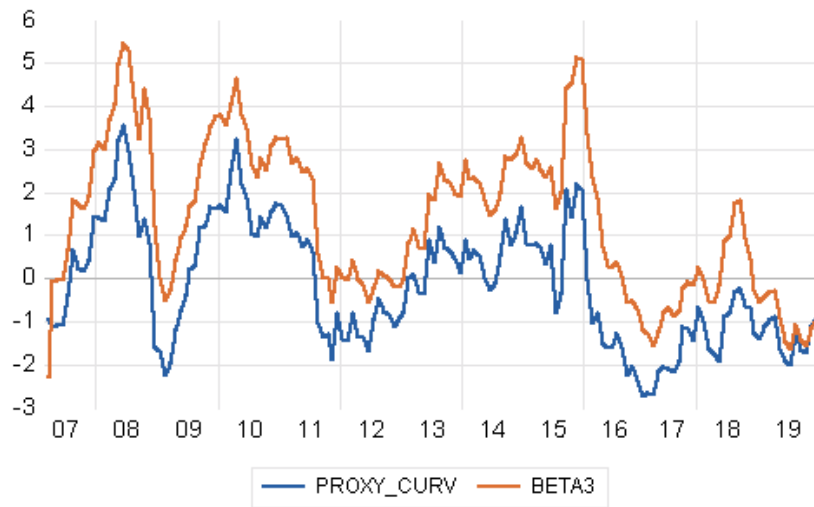


Gráfico 8 - Comparação da série filtrada do β_3 e a proxy de curvatura



Como salientado na revisão de literatura do modelo Nelson Siegel, com base no trabalho de Diebold e Li (2006), a seguinte interpretação pode ser feita, a partir das equações 2 e 3. Onde o beta 1 no limite é igual a taxa de longo prazo (gráfico 9) e a soma do beta 1 com o beta 2, no limite, é igual a taxa de curto prazo (gráfico 10).

Gráfico 9 - Comparação da série filtrada do β_1 e a taxa de longo prazo

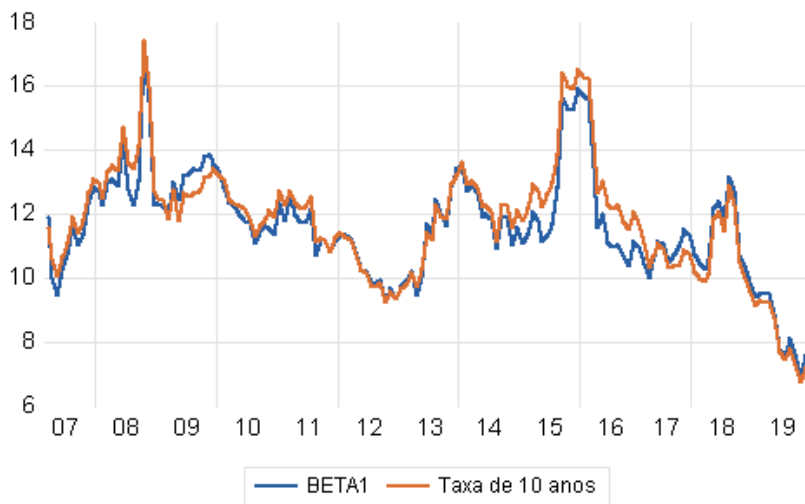
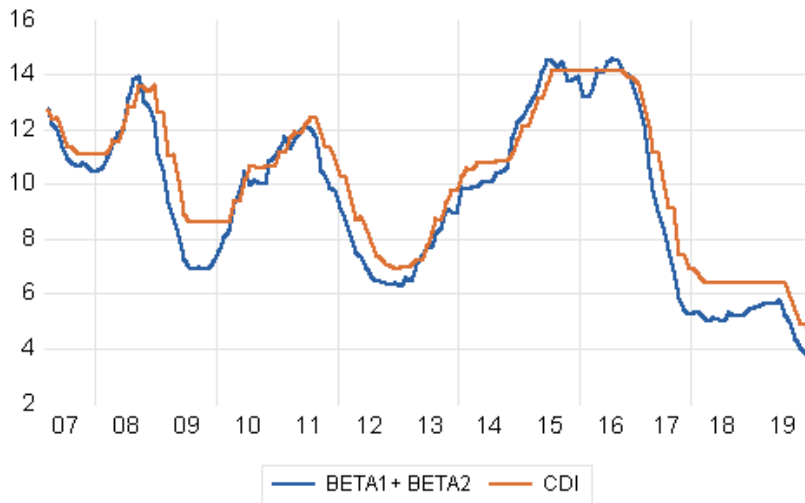


Gráfico 10 - Comparação da série filtrada do β_1 e β_2 com a taxa de curto prazo



Na próxima seção os fatores estimados por filtro de Kalman serão analisados conjuntamente com as variáveis macroeconômicas um pouco diferente da metodologia de Diebold, Rudebusch e Aruoba (2006), dado que para os dados brasileiros o VECM é o modelo mais adequado. Portanto, foi estimado um VECM composto pelas séries dos betas além das variáveis econômicas como inflação, taxa juros de curto prazo e atividade econômica.

3.3 Modelo com fatores da curva de juros e variáveis macro

Para analisar as dinâmicas entre os fatores da curva de juros de "nível" (β_1), "inclinação" (β_2) e "curvatura" (β_3) e variáveis macroeconômicas, o trabalho baseará na metodologia presente em Diebold, Rudebusch e Aruoba (2006), em que utilizam um VAR com as variáveis de fatores latentes do modelo Nelson-Siegel juntamente com variáveis macroeconômicas que como já colocado foi utilizado a capacidade utilizada (CU), a taxa CDI e a taxa de inflação oficial no Brasil (IPCA).

Observando o teste ADF de raiz unitária é possível concluir que quase todas variáveis possuem a raiz, e fazendo o teste de cointegração de Johansen também se observa a presença de cointegração entre as variáveis, ou seja, existe uma relação de longo prazo nas variáveis estudadas, em equilíbrio e indica três cointegrações em um nível de confiança de 95%. Então ao contrário de Diebold, Rudebusch e Aruoba (2006), para os dados brasileiros o modelo ideal escolhido foi um VECM, com dois lags entre variáveis, ao invés de um VAR utilizado pelos autores.

Tabela 5 - Teste ADF para raiz unitária

H0: Série tem raiz unitária		
	ADF	PP
Série	p-valor	p-valor
Beta 1	0,1123	0,1111
Beta 2	0,1494	0,0642
Beta 3	0,0884	0,0399
CU	0,9581	0,0000
CDI	0,1134	0,6041
IPCA	0,0000	0,0000

Tabela 6 - Teste de Johansen

Hypothesized				
No. of CE(s)	Eigenvalue	Trace Statistic	Critical Value	Prob.**
Nenhum	0,416951	176,9687	95,75366	0,0000
No máximo 1	0,263581	96,58543	69,81889	0,0001
No máximo 2	0,159313	50,99789	47,85613	0,0246
No máximo 3	0,080413	25,14098	29,79707	0,1565
No máximo 4	0,068129	12,65027	15,49471	0,1283
No máximo 5	0,014238	2,136727	3,841465	0,1438

Tabela 7 - Critério de informação para seleção de lags

Lag	LogL	LR	FPE	AIC	SC	HQ
0	-608,3375	NA	0,000205	8,532465	8,656207	8,582747
1	78,43286	1306,771	2,43e-08	-0,506012	0,360184*	-0,154039*
2	129,4700	92,85917*	1,98e-08*	-0,714861*	0,893788	-0,061197
3	154,2890	43,08867	2,32e-08	-0,55957	1,791532	0,395785

Para a ordenação apropriada das variáveis se seguiu Diebold, Rudebusch e Aruoba (2006), em que ordenam as variáveis latentes antes das variáveis macro por serem de datas anteriores as das variáveis econômicas. Para as variáveis macro, a ordenação se deu igual a Carvalho et al. (2016), que por sua vez se baseou em Christiano et al. (1999), Minella (2003), Dedola and Lippi (2005) e Tomazzia and Meurer (2009) em que colocam a proxy de atividade econômica primeiro e seguido pela inflação e taxa de juros. O racional, segundo os autores, é que a *proxy* da produção é escolhida anteriormente e não responde contemporaneamente a nenhuma variável, a inflação, segundo Carvalho et al. (2016) pode ser afetada pela circunstâncias de oferta e demanda contemporânea e a taxa de juros é a última uma vez que é definida pelos Bancos Centrais que utilizam os indicadores de preço

e atividade para impor a taxa.

Na tabela 10 se encontra as estimativas para o VECM com os fatores latentes e variáveis macroeconômicas, dado que o VECM é o modelo mais apropriado neste caso.

Para diagnóstico do modelo não foi constatado autocorrelação serial nos lags 1 e 2 dado um p-valor maior que 5% e a normalidade do vetor de erros é assumida normal via TLC³. Além disso, o modelo é estável, com nível de confiança de 95%, como constatado na figura 1 com o teste CUSUM, teste que verifica se os coeficientes estão mudando de maneira sistemática ou não.

Para avaliar a causalidade no curto prazo foi utilizado o teste de Wald em cada equação no modelo VECM para avaliar se conjuntamente os lags nas variáveis são significativos para explicar as dinâmicas de curto prazo no modelo.

Tabela 8 - Teste de correlação serial

H0: Sem correlação serial do lag 1 ao h

Lag	LRE* stat	df	Prob.	Rao F-stat	df	Prob.
1	39.27189	36	0.3254	1.095779	(36, 538.5)	0.3260
2	86.87304	72	0.1117	1.220949	(72, 636.9)	0.1129

Tabela 9 - Teste de Wald para causalidade no curto prazo

Beta 1	Chi-Square	Prob,	CU	Chi-Square	Prob,
Beta 2	0,945030	0,6234	Beta 1	0,436533	0,8039
Beta 3	0,591867	0,7438	Beta 2	0,510869	0,7746
CU	1,544258	0,4620	Beta 3	1,135797	0,5667
IPCA	2,973821	0,2261	IPCA	1,755466	0,4157
CDI	0,048521	0,9760	CDI	2,959938	0,2276

Beta 2	Chi-Square	Prob,	IPCA	Chi-Square	Prob,
Beta 1	0,502821	0,7777	Beta 1	3,772088	0,1517
Beta 3	0,504772	0,7769	Beta 2	3,910057	0,1416
CU	0,893901	0,6396	Beta 3	6,057022	0,0484
IPCA	4,760284	0,0925	CU	2,241719	0,3260
CDI	0,011444	0,9943	CDI	2,443236	0,2948

Beta 3	Chi-Square	Prob,	CDI	Chi-Square	Prob,
Beta 1	3,603345	0,1650	Beta 1	1,316108	0,5179
Beta 2	4,237081	0,1202	Beta 2	1,622462	0,4443
CU	3,130271	0,2091	Beta 3	1,163515	0,5589
IPCA	0,212623	0,8991	CU	4,017524	0,1342
CDI	0,551396	0,7590	IPCA	0,791101	0,6733

Usando um nível de significância de 10%, é possível ver que no curto prazo há causalidades muito limitadas no curto prazo de todos os lados, tanto das variáveis macroeconômicas

³O Teorema do limite central diz que para amostras aleatórias simples de tamanho n de uma população μ e variância finita σ^2 , a distribuição amostral da média da amostra se aproxima de uma distribuição normal

nos fatores latentes quanto dos fatores latentes nas variáveis macroeconômicas.

Tabela 10 - Modelo VEC com variáveis macroeconômicas e latentes

VECM	D(BETA1)	D(BETA2)	D(BETA3)	D(C_U)	D(CDI)	D(IPCA)
ECT1	0,353558 (0,41552) [0,85088]	-0,496509 (0,48128) [-1,03164]	-0,224026 (0,29461) [-0,76041]	0,014959 (0,01476) [1,01363]	0,836926 (0,11459) [7,30350]	0,035185 (0,11320) [0,31083]
ECT2	0,239374 (0,31574) [0,75812]	-0,316964 (0,36571) [-0,86670]	-0,205308 (0,22387) [-0,91708]	0,010828 (0,01121) [0,96559]	0,659798 (0,08708) [7,57724]	0,015423 (0,08601) [0,17931]
ECT3	-0,160242 (0,09804) [-1,63438]	0,271676 (0,11356) [2,39235]	-0,143131 (0,06952) [-2,05899]	-0,007703 (0,00348) [-2,21225]	-0,019962 (0,02704) [-0,73826]	-0,018148 (0,02671) [-0,67946]
D(BETA1(-1))	-0,092472 (0,50835) [-0,18191]	0,371426 (0,58880) [0,63082]	0,281861 (0,36043) [0,78202]	-0,011014 (0,01805) [-0,61002]	-0,098942 (0,14019) [-0,70576]	-0,073025 (0,13848) [-0,52732]
D(BETA1(-2))	0,064064 (0,37588) [0,17044]	0,213546 (0,43536) [0,49050]	0,501286 (0,26650) [1,88097]	-0,005572 (0,01335) [-0,41741]	0,068960 (0,10366) [0,66525]	0,168014 (0,10240) [1,64083]
D(BETA2(-1))	-0,01939 (0,38252) [-0,05069]	0,254668 (0,44306) [0,57480]	0,150875 (0,27121) [0,55630]	-0,008261 (0,01359) [-0,60804]	-0,042833 (0,10549) [-0,40603]	-0,01587 (0,10421) [-0,15229]
D(BETA2(-2))	0,282960 (0,30348) [0,93239]	-0,042546 (0,35151) [-0,12104]	0,442581 (0,21517) [2,05686]	-0,005463 (0,01078) [-0,50683]	0,090369 (0,08369) [1,07976]	0,155593 (0,08267) [1,88202]
D(BETA3(-1))	0,131071 (0,19857) [0,66009]	-0,155938 (0,22999) [-0,67802]	0,270932 (0,14079) [1,92441]	0,004643 (0,00705) [0,65837]	-0,042589 (0,05476) [-0,77774]	0,124459 (0,05409) [2,30084]
D(BETA3(-2))	0,032785 (0,14300) [0,22927]	-0,007832 (0,16563) [-0,04729]	-0,024717 (0,10139) [-0,24379]	-0,004922 (0,00508) [-0,96912]	-0,021457 (0,03944) [-0,54411]	0,012055 (0,03895) [0,30945]
D(CU(-1))	3,250685 (2,65808) [1,22294]	-2,787137 (3,07875) [-0,90528]	3,260165 (1,88464) [1,72986]	-0,377112 (0,09440) [-3,99464]	1,391601 (0,73305) [1,89838]	-0,668465 (0,72411) [-0,92315]
D(CU(-2))	1,018513 (2,39295) [0,42563]	-0,611358 (2,77166) [-0,22057]	2,022938 (1,69666) [1,19231]	-0,33468 (0,08499) [-3,93795]	0,264584 (0,65993) [0,40093]	0,360544 (0,65189) [0,55308]
D(CDI(-1))	-0,055294 (0,29312) [-0,18864]	-0,035123 (0,33951) [-0,10345]	-0,147585 (0,20783) [-0,71013]	0,014341 (0,01041) [1,37754]	-0,226669 (0,08084) [-2,80407]	-0,087233 (0,07985) [-1,09245]
D(CDI(-2))	0,018710 (0,25616) [0,07304]	0,001675 (0,29670) [0,00565]	-0,064798 (0,18162) [-0,35677]	-0,006636 (0,00910) [-0,72936]	-0,095864 (0,07064) [-1,35702]	0,060899 (0,06978) [0,87270]
D(IPCA(-1))	0,627268 (0,39229) [1,59900]	-0,955263 (0,45437) [-2,10238]	0,079595 (0,27814) [0,28617]	-0,018354 (0,01393) [-1,31734]	0,039632 (0,10819) [0,36633]	0,003103 (0,10687) [0,02903]
D(IPCA(-2))	0,091825 (0,34533) [0,26591]	-0,23108 (0,39998) [-0,57773]	-0,04005 (0,24485) [-0,16357]	-0,006796 (0,01226) [-0,55413]	-0,048361 (0,09523) [-0,50781]	-0,063833 (0,09407) [-0,67855]
C	-0,009983 (0,07103) [-0,14055]	-0,022096 (0,08227) [-0,26858]	0,019699 (0,05036) [0,39115]	0,000734 (0,00252) [0,29076]	-0,070497 (0,01959) [-3,59885]	0,008740 (0,01935) [0,45170]

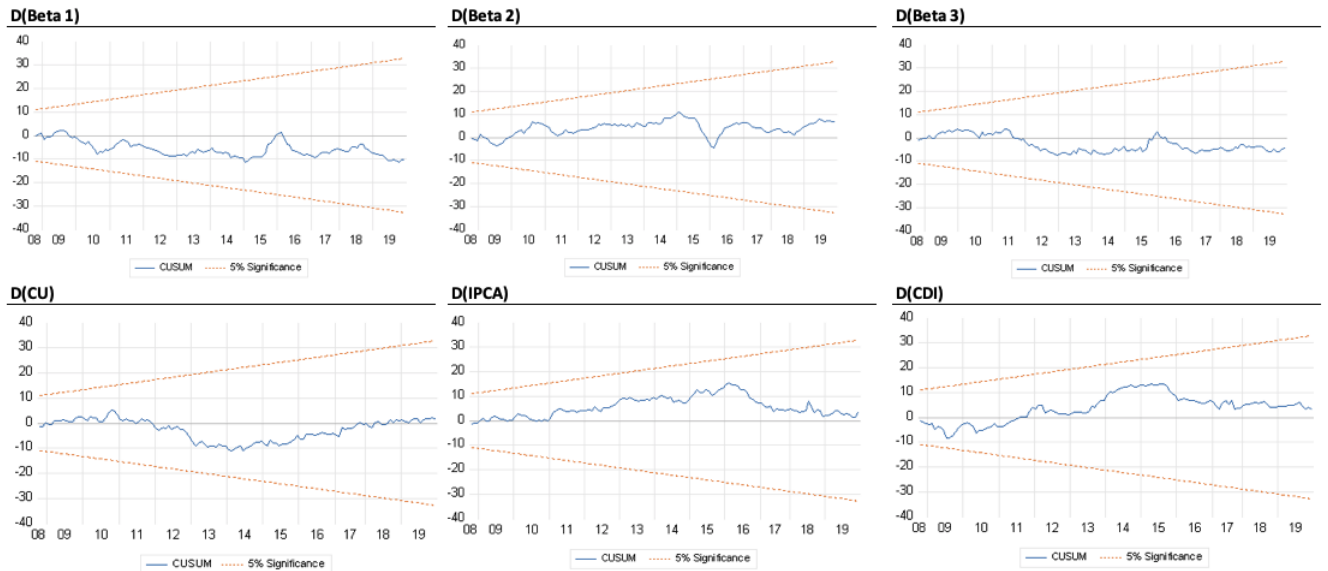
$$ECT_{1,t-1} = [1.00 * \beta_1(-1) + 95.29 * CU(-1) + 1.86 * CDI(-1) - 41.67 * IPCA(-1) - 111.65] \quad (9)$$

$$ECT_{2,t-1} = [1.00 * \beta_2(-1) - 120.06 * CU(-1) - 3.54 * CDI(-1) + 52.48 * IPCA(-1) + 140.27] \quad (10)$$

$$ECT_{3,t-1} = [1.00*\beta_3(-1)+49.78*CU(-1)+0.44*CDI(-1)-11.11*IPCA(-1)-53.17] \quad (11)$$

* Em negrito estão as variáveis significantes em um nível de confiança de 10%

Figura 1 - Teste CUSUM para a estabilidade do sistema



Nas dinâmicas de curto prazo, observa via os testes de Wald na tabela 9, que há impacto limitado no curto prazo de ambas as direções, tanto variáveis macroeconômicas quanto via fatores latentes. As duas exceções são impactos do IPCA no fator latente β_2 e o fator latente β_3 no IPCA. No curto prazo, portanto, nota-se uma ausência de causalidade.

Na questão de impactos de longo prazo, há sim um efeito das variáveis macro na curva de juros indicando que as causalidades de longo prazo são mais fortes que no curto prazo. Isso é um resultado encontrado por Diebold, Rudebusch e Aruoba (2006) que encontram um efeito forte de variáveis relacionadas a macroeconomia na curva de juros, porém um efeito menor da curva nas variáveis macro. Nesse conjunto de dados, portanto, há evidência de uma resposta bidirecional, apesar de fraca em ambas direções no curto prazo. O resultado é similar ao de Diebold, Rudebusch e Aruoba (2006), onde encontraram um efeito fraco das variáveis latentes nas variáveis macroeconômicas, porém, neste trabalho isto é constatado no curto prazo.

Como explitado em seções anteriores era esperado de acordo com os resultados Dewachter e Lyrio (2002), uma maior relação do fator de nível (L_t) com inflação, do fator de inclinação (S_t) com a variável ligada ao ciclo econômico que neste trabalho é CU e por fim, o fator de curvatura (C_t) com o CDI. Essa expectativa é o que acontece para as dinâmicas de longo prazo nos dados brasileiros, em que um aumento da inflação, em média, *ceteris paribus*, causa um aumento no

fator de nível (β_1), um aumento na capacidade utilizada, em média, *ceteris paribus*, causa um aumento no fator de inclinação (β_2) e quanto ao fator de inclinação se tem um resultado diferente, dado que um aumento no CDI, em média, *ceteris paribus*, causa um queda pequena no fator de curvatura (β_3).

Um efeito importante também capturado em Diebold, Rudebusch e Aruoba (2006) na capacidade utilizada mostra a resposta através de um aumento da taxa de juros em linha. Dewachter e Lyrio (2002), os autores conseguem capturar uma relação do fator de nível com inflação, de inclinação com a variável ligada a ciclo econômico e o fator de curvatura com a variável ligada a política monetária. Após a estimação do modelo, esse efeito somente é significativo nas dinâmicas de longo prazo indicadas pelas equações de correção de erros: (9), (10) e (11).

Uma relação interessante parece ser a questão da mudança da taxa de juros no fator de inclinação, na equação (10) e isso também é observado em Diebold, Rudebusch e Aruoba (2006) que colocam duas potenciais interpretações dessa relação. A primeira, adaptando a interpretação para as especificidades do Brasil, é que o Copom na verdade estaria reagindo as taxas de juros, que neste *framework*, foram do começo do mês para mudar a taxa de política monetária e afetando a variável utilizada neste trabalho (CDI). Como explicitado no trecho: "On the other hand, the Fed may be reacting to yields in setting the funds rate". Mas também colocam outra hipótese, que na verdade as taxas estão reagindo de informações da economia, antecipando a decisão da nova taxa de juros.

Um choque relevante que está presente em Diebold, Rudebusch e Aruoba (2006) é que uma inflação acima do esperado provoca um aumento em todos os fatores do modelo Nelson Siegel, há um aumento do nível quando há esse choque e os autores destacam que isso significa que as expectativas de inflação não estavam bem ancoradas e que isso irá gerar uma maior taxa de longo prazo dada uma maior expectativa de inflação. Nas dinâmicas de curto prazo no modelo estimado, e seguindo os testes de Wald para verificar causalidade no curto prazo, isso não acontece mas quando se olha para as dinâmicas de longo prazo, a inflação causa um aumento em todos os fatores latentes exceto o de inclinação (β_2).

Em contraste com Diebold, Rudebusch e Aruoba (2006), em que todos os fatores macroeconomicos afetaram significativamente a inclinação do modelo Nelson Siegel, porém no modelo deste trabalho, somente a inflação parece ter essa significância no curto prazo, em Diebold, Rudebusch e Aruoba (2006) tanto a capacidade utilizada quanto a taxa de juros de curto prazo também afetam positivamente a inclinação e que, segundo os autores, essas reações seriam compatíveis com a política monetária que aumenta a parte curta da curva de juros em resposta a uma surpresa tanto na capacidade utilizada e de inflação.

4 Conclusão

As ligações entre variáveis econômicas e curva de juros é amplamente estudada, desde a previsibilidade de inflação no longo prazo em Mishkin (1990) até a ligação com crescimento econômico em Estrella e Hardouvelis (1991) e Hamilton e Kim (2002). Com a importância dos diversos trabalhos empíricos que foram feitos para averiguar ligações e determinar causalidades entre variáveis macroeconômicas e curva de juros, desde Duffie e Kan (1996) e Dai Singleton (2000), com restrições de não arbitragem até o trabalho utilizado como base, Diebold, Rudebusch e Aruoba (2006) que não faz uso de tais restrições.

Utilizando a metodologia de Diebold, Rudebusch e Aruoba (2006), para os dados brasileiros foi estimado um VECM ao invés de um VAR com variáveis macroeconômicas e variáveis latentes do modelo Nelson Siegel, com adaptações para variáveis brasileiras no período entre 2007 e 2019, foi possível captar algumas ligações e contribuir para a literatura nesse sentido. Outro ponto importante foi a constatação de uma relação bilateral, considerando dinâmicas de longo prazo e curto prazo.

O presente estudo apresenta limitações e que servem de sugestão para estudos futuros. A primeira é utilizar outra proxy para as taxas a fim de capturar um período maior e obter uma maior quantidade de dados para melhorar a robustez do modelo. Outro ponto importante de melhora é utilizar outras variáveis macro para adaptar o trabalho de Diebold, Rudebusch e Aruoba (2006) para o mercado brasileiro e capturar outras relações que talvez não tenham sido capturadas neste modelo. Assim verificar algumas ligações e tentar englobar outras, uma vez em algumas não foi atingido o nível de significância para constatar causalidade no curto prazo em quanto nas dinâmicas do longo prazo houve constatação de causalidade.

5 REFERÊNCIAS

- ANG, A.; PIAZZESI, M., A no-arbitrage vector autoregression of term structure dynamics with macroeconomic and latent variables. *Journal of Monetary Economics*. n.50, p.745–787, 2003.
- BACCIOTTI, R. R. M.; ORAIR, R. O., Hiato do produto na economia brasileira: estimativas da IFI pela metodologia de função de produção. *Instituição Fiscal Independente: estudo especial*, n. 4, 2018
- BERNANKE, B. On the predictive power of interest rates and interest rates spreads. *New England Economic Review*, Federal Reserve Bank of Boston, v.Nov, p.51-68, 1990.
- BERNZ, Bruno M. Modelo Nelson-Siegel dinâmico da estrutura a termo da taxa de juros com fatores exógenos macroeconômicos: uma aplicação ao mercado brasileiro. *Dissertação de mestrado*. Fundação Getúlio Vargas, 2014.
- BJÖRK, T. and B. CHRISTENSEN, Interest Rate Dynamics and Consistent Forward Rate Curves, *Mathematical Finance*, p. 323–348, 1999.
- BLISS, R. R., Testing Term Structure Estimation Methods, *Advances in Futures and Options Research*, v.9, p. 197–231, 1997.
- BODIE, Zvi.; KANE, Alex; MARCUS, Alan. *Investimentos*. Revisão técnica: Samy Dana. Tradução: Beth Honorato. 10.ed. Porto Alegre: AMGH, 2015. cap. 3, p. 431-477.
- BRITO, R.D.; DUARTE, A.J.M.; GUILLEN, O.T.C. Overreaction of yield spreads and movements of Brazilian interest rate. *Brazilian Review of Econometrics*, v. 24, n. 1, p. 1-55, 2004.
- CALDEIRA, J.F.; STONA, F. The yield curve dynamics in a small emerging country and its interactions. *ANPEC*. p. 1-12.
- CARVALHO, L.; DINIZ, A.; PEDROSA, I.; ROSSI, P. Fiscal costs of monetary policy: indirect effects of an interest rate shock on Brazilian public net debt. *Brazilian Journal of Political Economy*, v.36, n.3, 2016
- CAMPBELL, J.; SHILLER, R. Cointegration and tests of present value models. *Journal of Political Economy*, 95:1062-1088, 1987.
- CAMPBELL, J.Y.; SHILLER, R.J. Yield spreads and interest rate movements: a bird's eye view. *Review of Economic Studies*, v.58, n.3, p. 495-514, 1991.
- CAMPBELL, J.Y.; SHILLER, R.J.; SCHOENHOLTZ, K.L. Forward rates and Future Policy: Interpreting the Term Structure of Interest Rates. *Brookings Papers on Economic Activity*, v.14, n.1, p.173-224, 1983.
- DAI, Q.; SINGLETON, K. J. Specification analysis of affine term structure models. *The Journal of Finance*, v. 55, n. 5, p. 1943-1978, out., 2000.

- DE POOTER, M. Examining the Nelson-Siegel Class of Term Structure Models. Tinbergen Institute Discussion Paper. v.43, n.4, 2007.
- DEWACHTER, H., LYRIO, M. Macroeconomic factors in the term structure of interest rates. Discussions Paper Series, 2002.
- DIEBOLD, F.X. LI, C. Forecasting the term structure of government bonds yields. Journal of Econometrics, v.130, p. 337-364, 2006.
- DIEBOLD, F.X. RUDEBUSCH, G.D. ARUOBA, B. The macroeconomy and the yield curve: a dynamic latent factor approach. Journal of Econometrics, v.131, p. 309-338, 2006.
- DUFFIE, D.; KAN, R. A Yield Factor Model of Interest Rates. Mathematical Finance, v. 6, n.4, p. 379-406, 1996.
- ENGEL R. F.; GRANGER, C. W. J. Co-Integration and Error Correction: Representation, Estimation, and Testing. Econometrica, v.55, n. 2, p.251-276, 1987.
- EVANS, C.L., MARSHALL, D. Monetary policy and the term structure of nominal interest rates: evidence and theory. Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy, v.49, n.1, p.53-111, 1998.
- ESTRELLA, A. HARDOUVELIS, G.A. The Term Structure as a Predictor of Real Economic Activity. The Journal of Finance, v.46, n.2, p. 555-576, 1991
- FAMA, E.F. Forward and spot rates. Journal of Monetary Economics, v.14, p. 319-338, 1984
- FAMA, E.F.; BLISS, R.R. The Information in Long-Maturity Forward Rates. The American Economic Review, v.77, n.4, p. 680-692, 1987.
- FAMA, E.F. Term-structure forecasts of interest rates, inflation, and real returns. Journal of Monetary Economics, v.25, n.1, p. 59-76, 1990.
- FEIJÓ, C. A., A medida de utilização de capacidade conceitos e metodologias. Revista de Economia Contemporânea, v.10, n.3, 611-629, 2006.
- HAMILTON, J.D.; KIM, D.H. A reexamination of the predictability of economic activity using the yield spread. Journal of Money, Credit and Banking, v.34, n.2, p. 340-360, 2002.
- JANOT, M. Mota, G. E. S. O Impacto da Comunicação do Banco Central do Brasil sobre o Mercado Financeiro. Banco Central do Brasil, n. 265, p.1-33, 2012.
- JOHANSEN, S. Estimation and Hypothesis Testing of Cointegration Vectors in Gaussian Vector Autoregressive Models. Econometrica, v.59, n.6, p. 1551-1580, 1991.
- JORION, P. MISHKIN, F. A multi-country comparison of term structure forecasts at long horizons. Journal of Financial Economics, v.29, n.1, p. 59-80, 1991.
- LIMA, A. M. C.; ISSLER, J. V. A Hipótese das Expectativas na Estrutura a Termo de Juros no Brasil: uma Aplicação de Modelos de Valor Presente. Anais do II Encontro Brasileiro de

Finanças, 2002.

LITTERMAN, R.; SCHEINKMAN, J. Common Factors Affecting the Bond Returns, *Journal of Fixed Income* n.1, p. 54-61, 1991.

MANKIW, N.G. SUMMERS, L., S. Do Long-Term Interest Rates Overreact to Short-Term Interest Rates?. *Brookings Papers on Economic Activity*, v.15, n.1, p. 223-248, 1984.

MANKIW, N.G. MIRON, J.A. The Changing Behavior of Term Structure of Interest Rates. *The Quarterly Journal of Economics*, v. 101, n. 2, p. 211-228, 1986.

MARÇAL, E.; VALLS PEREIRA, P. L. A estrutura a termo das taxas de juros no Brasil: testando a hipótese de expectativas racionais. *Pesquisa e Planejamento Econômico*, v. 37, n. 1, 2007.

MISHKIN, F.S. What does the term structure tell us about future inflation?. *Journal of Monetary Economics*. v.25, n.1, p. 77-95, 1990.

NELSON, C.; SIEGEL, A. Parsimonious Modeling of Yield Curves. *Journal of Business*, v.60, n.4 ,p. 473-489, 1987.

SVENSSON, L. E. O., Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992-1994, *NBER Working Paper Series*, n.4871, 1994.

STOCK, J.; WATSON, M. New Indexes of Coincident and Leading Economic Indicators. *NBER Macroeconomics Annual 1989*, The M.I.T. Press. p. 351-394, 1989.

RUDEBUSCH, G.D., WU, T. A macro-finance model of the term structure, monetary policy, and the economy. *Federal Reserve Bank of San Francisco*, 2003.

TABAK, B. M.; ANDRADE, S. C. Testing the expectations hypothesis in the Brazilian term structure of interest rates. *Revista Brasileira de Finanças*, v.1, n.1, p.19-43, 2001.

WOOLDRIDGE.; Jeffrey. *Introductory Econometrics: a modern approach*. 5.ed. Ohio.

WU, T. Monetary policy and the slope factors in empirical term structure estimations. *Federal Reserve Bank of San Francisco Working Paper*, 2002

KIM, Chang-Jin.; NELSON, Charles. *State-Space Models With Regime Switching: Classical and Gibbs Sampling Approaches with Applications*. 1999. cap. 3, p. 19-56.

6 APÊNDICE A – Outras variações do modelo de Nelson-Siegel

4

Modelo com dois fatores

$$y_t(\tau) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} \frac{1 - \exp(-\frac{\tau}{\lambda_t})}{\frac{\tau}{\lambda_t}}$$

Modelo de quatro fatores de Björk e Christensen (1999)

$$y_t(\tau) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} \frac{1 - \exp(-\frac{\tau}{\lambda_t})}{\frac{\tau}{\lambda_t}} + \beta_{3,t} \frac{1 - \exp(-\frac{\tau}{\lambda_t})}{\frac{\tau}{\lambda_t}} - \exp(-\frac{\tau}{\lambda_t}) + \beta_{4,t} \frac{1 - \exp(-\frac{2\tau}{\lambda_t})}{\frac{2\tau}{\lambda_t}}$$

Modelo de três fatores de Bliss (1997)

$$y_t(\tau) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} \frac{1 - \exp(-\frac{\tau}{\lambda_{1,t}})}{\frac{\tau}{\lambda_{1,t}}} + \beta_{3,t} \frac{1 - \exp(-\frac{\tau}{\lambda_{2,t}})}{\frac{\tau}{\lambda_{2,t}}} - \exp(-\frac{\tau}{\lambda_{2,t}})$$

Modelo de quatro fatores de Svensson (1994)

$$y_t(\tau) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} \frac{1 - \exp(-\frac{\tau}{\lambda_{1,t}})}{\frac{\tau}{\lambda_{1,t}}} + \beta_{3,t} \frac{1 - \exp(-\frac{\tau}{\lambda_{1,t}})}{\frac{\tau}{\lambda_{1,t}}} - \exp(-\frac{\tau}{\lambda_{1,t}}) + \beta_{4,t} \frac{1 - \exp(-\frac{\tau}{\lambda_{2,t}})}{\frac{\tau}{\lambda_{2,t}}} - \exp(-\frac{\tau}{\lambda_{2,t}})$$

⁴todas as variações do modelo Nelson Siegel abaixo estão em De Pooter (2007)