

**Insper Instituto de Ensino e Pesquisa
Faculdade de Economia e Administração**

Natalia da Cunha Valverde

**BLACK-LITTERMAN VERSUS MARKOWITZ:
UMA APLICAÇÃO PARA O MERCADO BRASILEIRO**

**São Paulo
2010**

Natalia da Cunha Valverde

**Black-Litterman versus Markowitz: uma aplicação para o
Mercado brasileiro**

Monografia apresentada ao curso de Ciências Econômicas, como requisito final para obtenção do grau de Bacharel do Insper Instituto de Ensino e Pesquisa.

Orientador:
Prof. Marcelo Moura – Insper

**São Paulo
2010**

Valverde, Natalia da Cunha

Black-Litterman versus Markowitz: uma aplicação para
o Mercado brasileiro / Natalia da Cunha Valverde. – São
Paulo: Insper, 2010.

28 f.

Monografia: Faculdade de Economia e Administração.
Insper Instituto de Ensino e Pesquisa.

Orientador: Prof. Marcelo Moura

Natalia da Cunha Valverde

Black-Litterman versus Markowitz: uma aplicação para o Mercado brasileiro

Monografia apresentada à Faculdade de Economia do Insper, como parte dos requisitos para conclusão do curso de graduação em Economia.

EXAMINADORES

Prof. Dr. Marcelo Leite de Moura Silva
Orientador

Prof. Dr. Antonio Zoratto Sanvicente
Examinador

Prof. Sérgio Jurandyr Machado
Examinador

RESUMO

VALVERDE, Natalia da Cunha. Black-Litterman versus Markowitz: uma aplicação para o Mercado brasileiro. São Paulo, 2010. 28p. Monografia – Faculdade de Economia e Administração. Insper Instituto de Ensino e Pesquisa.

O presente trabalho tem como objetivo comparar, para o mercado brasileiro, dois métodos de otimização de carteiras baseados na construção de fronteiras eficientes risco versus retorno. A saber, o trabalho avaliará o desempenho de carteiras selecionadas a partir de dois dos modelos mais famosos na literatura financeira: o modelo de Black-Litterman (1992) e o modelo de Markowitz (1952). Na construção destas carteiras para o mercado brasileiro serão consideradas análise de ações descritas na base de dados Economatica. Portanto, a análise tem como escopo a formação de portfólio de ações. O critério de performance será o de desempenho da carteira, em termos de retorno acumulado e volatilidade, considerando diferentes níveis de risco assumidos *ex-post*. Após observar os resultados empíricos, pode-se concluir qual dos dois modelos de otimização, o Black-Litterman ou o Markowitz, mostra-se mais eficiente quando aplicado ao mercado brasileiro para a seleção de fundos de ações.

Palavras-Chave: Fronteira eficiente, modelo Markowitz, modelo Black-Litterman, mercado brasileiro, avaliação de fundos de ações.

ABSTRACT

VALVERDE, Natalia da Cunha. Black-Litterman versus Markowitz: a study for the Brazilian market. São Paulo, 2010. 28p. Monograph – Faculdade de Economia e Administração. Insper Instituto de Ensino e Pesquisa.

This monograph aims the comparison, for the Brazilian market, of two portfolio optimization methods based on the construction of efficient frontiers risk versus return. This work will estimate the performance of the selected portfolios considering the two most renowned models of the financial literature: the Black-Litterman (1992) model and the Markowitz (1952) model. On the construction of these portfolios for the Brazilian market, it will be considered a stock analysis described on the Economática data basis. Therefore, the analysis has as scope the formation of stock funds. The performance criteria will be the development of the portfolio in terms of accumulated returns and volatility, considering different levels of assumed risk *ex-post*. After observing the empiric results, it will be able to conclude which of the two optimization models, the Black-Litterman or Markowitz, shows to be more efficient when used on the Brazilian market for the selection of stock funds.

Keywords: Efficient frontier, Markowitz model, Black-Litterman model, Brazilian market, stock funds valuation.

SUMÁRIO

1 Introdução	8
2 Revisão Bibliográfica	9
3 Materiais e Métodos	11
3.1 Análise descritiva dos dados	12
3.2 Metodologia de Markowitz	14
3.2.1 Estimação da fronteira eficiente	14
3.3 Metodologia de Black-Litterman	18
3.3.1 Estimação da fronteira eficiente	18
3.4 Comparação dos modelos de Markowitz e Black-Litterman.....	22
3.5 Comparação <i>ex-post</i> dos modelos de Markowitz e Black-Litterman.....	23
3.5.1 Construção do intervalo de confiança para o Índice Sharpe.....	24
4 Conclusão	25
Referências	27

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Estatística descritiva dos retornos mensais.....	12
Tabela 2 – Composição de pesos na carteira.....	16
Tabela 3 – Expectativas de múltiplos e variação dos retornos.....	19
Tabela 4 – Retornos Históricos, Esperados do Mercado e Ajustados.....	19
Tabela 5 – Composição de pesos na carteira.....	21
Tabela 6 – Comparação <i>Ex-Post</i> dos modelos de Markowitz e Black-Litterman.....	23
Tabela 7 – Comparativo dos Índices Sharpe das carteiras <i>Ex-Post</i>	24
Tabela 8 – Intervalo de Confiança dos Índices Sharpe.....	25

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Histograma retornos dos preços das ações.....	13
Figura 2 – Fronteira Eficiente de Markowitz	17
Figura 3 – Fronteira Eficiente de Black-Litterman.....	21
Figura 4 – Comparação das Fronteiras Eficientes de Markowitz e de Black-Litterman.....	22

1 INTRODUÇÃO

A teoria moderna de carteiras desenvolveu-se ao longo dos anos e deu origem a muitos modelos que têm como objetivo alcançar a máxima eficiência, em termos de alocação de ativos, das suas carteiras. No mercado brasileiro, assim como no resto do mundo, observa-se a crescente busca, por parte dos investidores, por métodos mais eficientes de alocações de ativos. O interesse dos investidores está em escolher, dentre os modelos de otimização de carteiras, qual é o que proporciona *ex-post* uma alocação de ativos com maior retorno e um menor risco.

Procurando contribuir para testar o desempenho *ex-post* do melhor modelo de otimização de carteiras, o trabalho aqui exposto pretende comparar dois modelos bastante conhecidos no mercado financeiro.¹

Este trabalho tem como objetivo a análise comparativa dos modelos de Markowitz e de Black-Litterman com a utilização de dados do mercado acionário brasileiro. Estudos como este são pouco explorados em trabalhos acadêmicos voltados para o Brasil e, por isso, mostram-se relevantes no momento atual. O estudo, portanto, pode ser visto como uma orientação aos investidores que procuram por modelos de alta performance relativa, uma vez que busca, através de resultados quantitativos de retornos *ex-post* das carteiras propostas, o melhor método a ser utilizado no caso de fundos compostos por ações brasileiras.

Este projeto está organizado em seis seções, incluído esta introdução. A seção 2 faz um breve resumo da literatura de fronteiras eficientes na seleção de carteiras. A seção 3 apresenta os dados utilizados, descreve a metodologia empregada e apresenta os resultados encontrados. Por fim, a seção 4 apresenta as conclusões do trabalho.

¹ O modelo de Markowitz (1952) é amplamente conhecido por gestores de carteiras, pois foi o primeiro modelo de otimização a ser desenvolvido e é dele que derivam todos os outros modelos.

O modelo de Black-Litterman tornou-se conhecido porque foi um modelo divulgado em 1992 pelo banco Goldman Sachs, que tem grande representatividade e importância mundial. Ver DERDAK (2003).

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A otimização de carteiras surgiu com o desenvolvimento da Teoria Moderna de Portfólio por Markowitz (1952). De acordo com Harry Markowitz (Markowitz, 1952), o objetivo principal da otimização de carteiras é maximizar os retornos e, ao mesmo tempo, minimizar o risco. Fazendo uso do algoritmo MVO – *Mean Variance Optimization*² de otimização de carteiras em sua pesquisa, é possível, através das diversas possibilidades de distribuição de pesos dos ativos na carteira, determinar todos os portfólios “ótimos” dados seus risco e retorno.

Como resultado desse teste empírico observamos a formação de uma fronteira eficiente que trata de representar o melhor conjunto de carteiras possível dado os níveis de risco e retorno. De acordo com Markowitz (1952), com a alocação ótima dos ativos espera-se obter um desempenho melhor comparado ao de outros portfólios não-otimizados e assim usufruir de um rendimento maior dos investimentos.

O modelo original desenvolvido por Markowitz (1952) fundamenta-se em premissas, tais como os investidores são avessos ao risco e racionais, os ativos são divisíveis, ou seja, é possível a compra da fração de uma ação, e os custos de transação são irrelevantes. No entanto, na prática, algumas dessas premissas simplificadoras do modelo não existem, afetando-o de forma a tornar os resultados de carteiras ótimas não tão eficientes. Dadas as limitações da metodologia de Markowitz, outras técnicas de otimização foram desenvolvidas ao longo dos anos para que pudesse ser alcançado o nível máximo de eficiência.

De acordo com o trabalho original elaborado por Best e Grauer (1991), posteriormente discutido por Bernd Scherer (2002), a otimização de portfólio de Markowitz sofre, na prática, de “maximização de erro”. Em seu artigo, Scherer afirma que o modelo de Markowitz não funciona por uma sequência de acumulação de erros de estimação dos parâmetros, que corrobora para a má formação da fronteira eficiente, conseqüentemente prejudicando o resultado da carteira ótima. Primeiramente os parâmetros de retorno dos ativos são calculados através da média histórica, o que significa que a estimação é representada por um único valor e não

² Ver STEINBACH (2001) para mais detalhes sobre o porquê da escolha do modelo de estimação MVO por Markowitz.

Ver CHALFANT (1990) para mais informações sobre a construção e estimação do modelo MVO.

pela sua verdadeira distribuição. Isso, por sua vez, faz com que o algoritmo da fronteira eficiente seja calculado erroneamente. Além disso, o otimizador tende a selecionar os ativos com as características mais atrativas – alto retorno e baixo risco – impactando na distribuição de pesos dos ativos na carteira ótima, trazendo, muitas vezes, soluções extremas. “O algoritmo de otimização é muito poderoso para a qualidade dos *inputs*” (SCHERER, 2002, p.98), o que torna o modelo de Markowitz ineficiente quando aplicado na prática.

Black e Litterman (1992) desenvolveram um novo método de estimação de fronteira eficiente para a otimização de portfólio que é amplamente utilizado no mercado financeiro. Levando em consideração a alta sensibilidade do modelo original com relação aos erros de estimação dos parâmetros de risco e retorno dos ativos – como verificado anteriormente – entre outras falhas do modelo teórico de Markowitz, Black e Litterman elaboraram um modelo de forma a controlar esses comportamentos criando por sua vez portfólios mais estáveis.

O método Black-Litterman (1992) tem como principal característica inovadora a possibilidade de otimizar, através de uma aproximação Bayesiana, a junção de um modelo adaptado de Markowitz com as visões especulativas subjetivas do investidor sobre o comportamento dos ativos. O modelo adaptado de Markowitz pode ser entendido como uma otimização de Markowitz considerando a premissa de mercado eficiente presente no modelo do CAPM – *Capital Asset Pricing Model* desenvolvido por Sharpe (1964). De uma forma intuitiva, Drobetz (2001) explica como é feita a abordagem metodológica do modelo de Black-Litterman (1992). Primeiramente estabelece-se os retornos em equilíbrio esperados de uma otimização por Markowitz. A seguir o investidor elabora suas visões baseadas em opiniões próprias sobre o comportamento dos ativos e estipula um grau de confiança para suas visões subjetivas. Após essas duas etapas, juntam-se as visões do investidor com o equilíbrio de Markowitz e elaboram-se uma “expectativa de retorno revisada” que conseqüentemente dará origem a uma nova alocação de pesos dos ativos na carteira ótima. Uma explicação mais elaborada e revisada sobre a construção do modelo de Black-Litterman pode ser encontrada em Idzorek (2004).

De acordo com o artigo Black-Litterman (1992), a inserção de visões sobre o movimento dos ativos no mercado pelos investidores no modelo permite dar um sentido econômico mais coerente com o cenário real do que aqueles obtidos do modelo de Markowitz puro. Testes empíricos revelam que este modelo tende a

apresentar resultados mais “suaves”, ou seja, uma variação nas expectativas de retorno de um ativo – por exemplo, não causa bruscas mudanças na alocação dos pesos dos ativos nas carteiras, reduzindo a probabilidade de existir soluções extremas. Além disso, uma visão correta sobre o comportamento dos ativos por parte do investidor aumenta a rentabilidade de sua carteira ótima trazendo-lhe maiores benefícios.

Contudo, a análise da literatura demonstra que, apesar das críticas que podem ser feitas ao modelo original de Markowitz (1952), nenhum modelo alternativo foi capaz de provar de forma contundente a superioridade de eficiência na otimização de carteiras. É com base nesse argumento que este trabalho se propõe a verificar, utilizando dados de ações brasileiras, se existe melhor desempenho das carteiras obtidas através do modelo alternativo de Black-Litterman (1992) comparado às obtidas pelo modelo de Markowitz (1952).

3 MATERIAIS E MÉTODOS

As metodologias utilizadas nesta monografia para estimar as fronteiras e carteiras eficientes serão as de Markowitz e a de Black-Litterman. Ambas serão apresentadas juntamente com seu método de aplicação nas subseções: 3.2 Metodologia de Markowitz e 3.3 Metodologia de Black-Litterman, respectivamente.

Nosso objetivo será fazer análises comparativas das duas metodologias estimando-se carteiras baseadas em critérios de indicadores de desempenho das empresas escolhidas. Isso fará com que a seleção do modelo de melhor performance esteja alinhada com práticas de mercado para alocações de ativos em carteira. Para a verificação do modelo mais otimizado, Markowitz (1952) ou Black-Litterman (1992), será comparado o retorno da carteira para cada nível de risco considerado.

O estudo aqui exposto fará essa análise comparativa levando em consideração somente dados do mercado brasileiro e focando na análise de carteiras equiparadas a fundo de ações.

Neste trabalho em particular, utilizaremos dados das ações: Petrobrás PN (PETR4), Vale PN (VALE5), Gerdau PN (GGBR4), Usiminas PN (USIM5),

Companhia Siderúrgica Nacional ON (CSNA3), Lojas Americanas PN (LAME4), Eletrobrás ON (ELET3), Itaú S.A. PN (ITSA4), Embraer ON (EMBR3), AmBev PN (AMBV4). Tais ações foram escolhidas de acordo com os seguintes critérios: estar entre as 30 ações de mais representatividade na composição do índice Bovespa,³ dentre essas, escolher 10 ações que não sejam referentes à mesma empresa, que tenham histórico de preços desde janeiro de 2005 e que possuam na carteira uma diversificação de pelo menos quatro setores da economia. Nesta monografia também será utilizada a série da taxa SELIC, como indicador da taxa livre de risco brasileira.

Coletaremos da base de dados do Economática dados para as cotações mensais das ações escolhidas e da taxa SELIC para o período de janeiro 2005 até março de 2010.

3.1 Análise descritiva dos dados

Apresenta-se a seguir uma tabela com uma breve descrição estatística dos dados dos retornos de cada uma das ações supracitadas.

Tabela 1 – Estatística descritiva dos retornos mensais

	Obs	Média	Mediana	Retornos			Jarque-Bera (probabilidade)*
				Desvio Padrão	Máximo	Mínimo	
Petrobrás PN (PETR4)	62	2,699%	1,855%	10,721%	28,031%	-33,590%	0,000%
Vale PN (VALE5)	62	2,469%	1,540%	9,350%	28,571%	-20,078%	0,000%
Gerdau PN (GGBR4)	62	2,883%	2,777%	12,461%	31,274%	-33,993%	0,000%
Usiminas PN (USIM5)	62	2,884%	3,114%	12,581%	33,027%	-30,881%	0,000%
Companhia Siderúrgica Nacional ON (CSNA3)	62	3,768%	4,603%	12,183%	29,205%	-29,546%	0,000%
Lojas Americanas PN (LAME4)	62	2,959%	2,634%	12,955%	38,675%	-28,623%	0,000%
Eletrobrás ON(ELETR3)	62	1,967%	0,178%	10,828%	37,117%	-28,190%	0,000%
Itaú S.A PN (ITSA4)	62	2,784%	1,916%	8,216%	21,622%	-24,370%	0,000%
Embraer ON (EMBR3)	62	0,205%	0,155%	10,193%	21,667%	-29,687%	0,000%
Ambev PN (AMBV4)	62	2,232%	3,151%	6,684%	16,992%	-13,333%	0,000%
MÉDIA	62	2,485%	2,192%	10,617%	28,618%	-27,229%	0,000%

Fonte: Economática, análise da autora.

³ Informações obtidas do site da BMF&BOVESPA. Acesso em 24/02/2010:
<http://www.bmfbovespa.com.br/indices/ResumoCarteiraTeorica.aspx?Indice=lbovespa&idioma=pt-br>

Analisando brevemente os dados da Tabela 1 podemos observar que nenhuma das séries apresenta distribuição normal,⁴ de acordo com o critério de Jarque-Bera.⁵ O fato de rejeitar a hipótese de distribuição normal neste caso deve-se a fatos estilizados encontrados em séries financeiras, são eles caudas pesadas,⁶ agrupamentos de volatilidade, além de memória longa⁷ e persistência.⁸

Na ilustração a seguir, pode-se visualizar o comportamento dos retornos das séries de todas das ações utilizadas no trabalho.

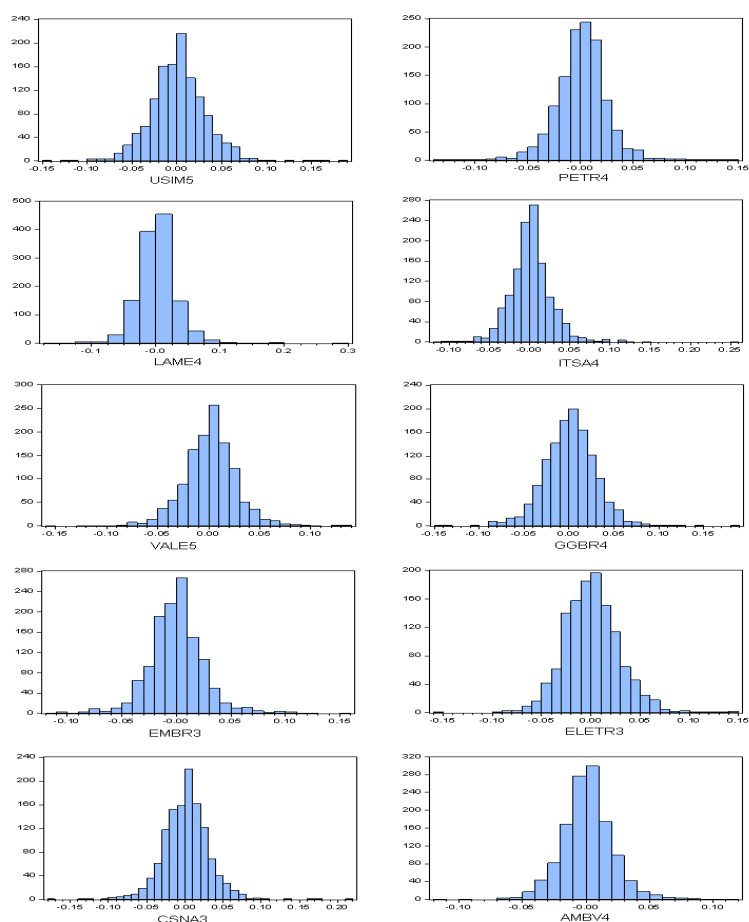


Figura 1 – Histograma retornos dos preços das ações

Fonte: Economática, Análise da autora.

⁴ Importante distribuição dos dados, que se dá em forma de “sino”, ao redor da média.

⁵ Ver JARQUE and BERA (1987) para mais detalhes sobre os critérios de teste de normalidade de Jarque-Bera.

⁶ Pouca concentração de valores próximos a média.

⁷ A previsão da série “em nível” está sob forte influência de sua própria série defasada. Significa depender, por exemplo, de $x(-1)$, $x(-2)$ e $x(-3)$ em sua equação de previsão, onde x representa a variável analisada. Exemplo: $X_t = \dots + \alpha X_{t-1} + \delta X_{t-2} + \mu X_{t-3} + \dots$

⁸ A previsão da série em termos de variância está sob forte influência de sua própria série defasada.

Nesta monografia, para o período de outubro de 2008 a janeiro de 2009, observa-se o aumento da volatilidade dos retornos, explicado pelo reflexo da crise do *subprime*⁹ ocorrida no mesmo período. Essa mudança no comportamento histórico dos retornos explica a grande volatilidade, medida pelo desvio-padrão, observado na Tabela 1 acima. A fim de simplificar o estudo deste trabalho, a oscilação anormal de retornos históricos observada não será estudada separadamente na construção dos modelos de Markowitz e de Black-Litterman.

Na elaboração das metodologias de Markowitz e de Black-Litterman a serem desenvolvidas nas próximas seções, utilizaremos dados mensais de janeiro de 2005 a dezembro de 2008, de tal forma que seja possível uma análise *ex-post* comparativa dos modelos na seção 4 utilizando-se os dados de janeiro de 2009 a março de 2010.

3.2 Metodologia de Markowitz

Esta etapa focará no desenvolvimento da metodologia de Markowitz. Aqui serão fornecidas as ferramentas utilizadas de forma a tornar possível a construção da fronteira eficiente correspondente.

3.2.1 Estimação da fronteira eficiente

Estimaremos a fronteira eficiente de acordo com a metodologia utilizada em Benninga (2008).

A proposta desta metodologia é poder elaborar a fronteira eficiente de Markowitz, através da combinação e ponderação de duas carteiras eficientes, A e B, ao longo da curva.

Primeiramente, utilizando a amostra de retornos das ações escolhidas para a monografia, calcularemos o vetor da média histórica simples:

$$E(R) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (1)$$

a matriz de variância e covariância:

⁹ Ver TORRES FILHO, E. (2008) para mais informações sobre a crise do *subprime*.

$$S = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})^T \quad (2)$$

e dois vetores onde cada um é calculado conforme abaixo:

$$E(R) - c_u \quad (3)$$

Nas fórmulas, x_i simboliza cada retorno mensal do ativo i , x_j simboliza o retorno mensal do ativo j , \bar{x} a média histórica simples dos ativos, n o número de ativos utilizados na amostra e c uma constante qualquer. Neste trabalho consideraremos $c = (0, Rf)$, onde Rf é a média histórica da taxa livre de risco, aqui representada pela taxa SELIC.

De acordo com Benninga (2008), toda carteira viável que está contida na fronteira eficiente, aqui chamada de *Envelope Portfólio*, deve resolver a equação:

$$E(R) - c = Sz, \text{ para } z. \quad (4)$$

Neste trabalho, a carteira A será o *Envelope Portfólio* que resolve a equação acima para $c = 0$ e B será o *Envelope portfólio* que resolve a equação para $c = Rf$

Para encontrar os pesos ótimos das carteiras A e B, para cada valor de c , resolvemos a equação acima para z e, posteriormente aplicamos a fórmula:

$$X_i = \frac{z_i}{\sum_h z_h} \quad (5)$$

onde X_i representa cada *Envelope Portfólio* A e B, sendo $i=(A,B)$.

Tabela 2 – Composição de pesos na carteira

	Pesos	
	Envelope Portfólio A	Envelope Portfólio B
Petrobrás PN (PETR4)	9,63%	38,31%
Vale PN (VALE5)	-33,27%	-126,33%
Gerdau PN (GGBR4)	-32,75%	-59,76%
Usiminas PN (USIM5)	-50,90%	-153,12%
Companhia Siderúrgica Nacional ON (CSNA3)	94,03%	269,21%
Lojas Americanas PN (LAME4)	-19,53%	-17,12%
Eletróbás ON(ELETR3)	11,52%	-7,61%
Itaú S.A PN (ITSA4)	98,88%	228,16%
Embraer ON (EMBR3)	-34,45%	-171,73%
Ambev PN (AMBV4)	56,84%	99,99%
SOMA	100,00%	100,00%

Fonte: Análise da autora.

Observando a tabela 2 acima, podemos constatar a observação de Bernd Scherer (2002) mencionada na seção 2 desta monografia. A otimização de portfólio de Markowitz efetivamente sofre na prática de “maximização de erro”, ou seja, o modelo otimizador tende a selecionar os ativos com as características mais atrativas trazendo soluções extremas para os pesos dos ativos.

O terceiro passo é a elaboração da fronteira eficiente combinando os *Envelope Portfólios* A e B. Obtidos os retornos da carteira A e B:

$$E(X_i) = (X_i)^T * E(R), \quad (6)$$

as variâncias da carteira A e B:

$$Var(X_i) = (X_i)^T * S * X_i, \quad (7)$$

e a covariância das carteiras A e B:

$$Cov(A, B) = A * S * (B)^T, \quad (8)$$

calculamos o desvio padrão e o retorno das combinações das carteiras A e B formando a fronteira eficiente de Markowitz, que neste trabalho chamaremos de fronteira M. Para construir a fronteira M, calcula-se o retorno:

$$E(R_M) = \phi * E(R_A) + (1 - \phi) * E(R_B) \quad (9)$$

e a variância:

$$Var(R_M) = \sum_{i=1}^{10} (\phi)^2 Var(X_i) + 2 \sum_{i=1}^{10} \sum_{i=1}^{10} \phi(1 - \phi) Cov(A, B), \quad (10)$$

onde ϕ simboliza o peso de A nas combinações entre os *Envelope Portfólios* A e B para a construção da fronteira eficiente. Considerando que ϕ é uma variável aleatória, para cada valor de ϕ dado obtemos um retorno e variância associados.

Assim sendo, construímos o gráfico da fronteira eficiente a seguir:

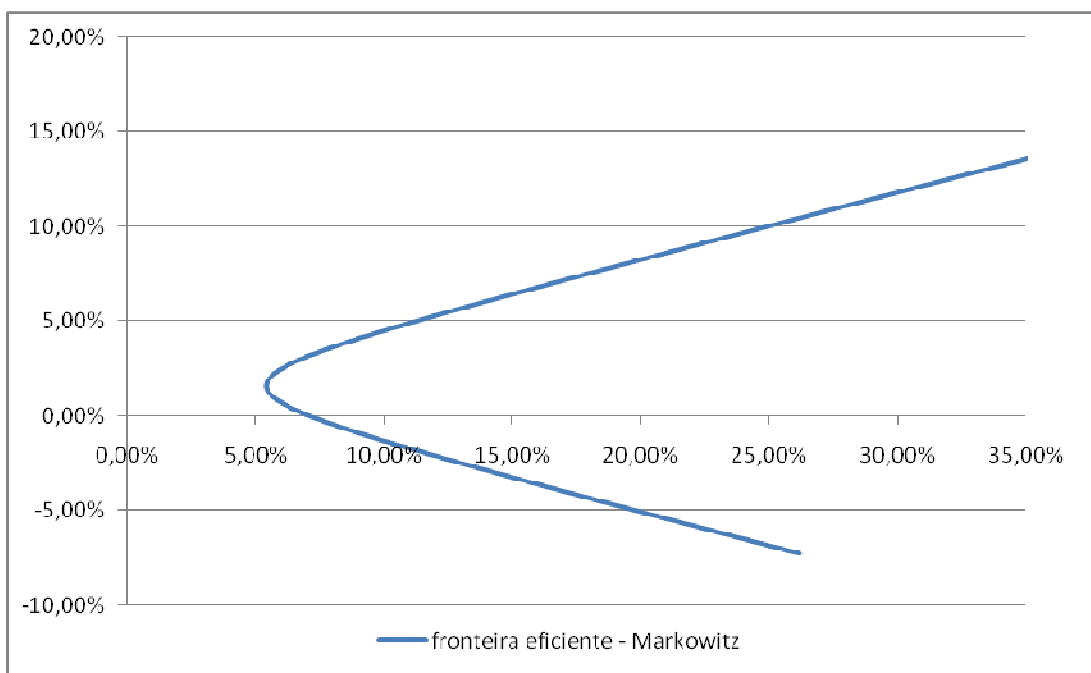


Figura 2 – Fronteira Eficiente de Markowitz

Fonte: Análise da autora.

O gráfico acima representa a fronteira eficiente elaborada pela metodologia de Markowitz. Com base nas combinações das carteiras A e B ao longo da curva, poderemos comparar o desempenho do portfólio calculado pelo método de Markowitz e de Black-Litterman, a ser elaborado na próxima seção.

3.3 Metodologia de Black-Litterman

Esta etapa focará no desenvolvimento da metodologia de Black-Litterman. Aqui serão fornecidas as ferramentas utilizadas de forma a tornar possível a construção da fronteira eficiente correspondente.

Estimaremos a fronteira eficiente de acordo com a metodologia utilizada na seção anterior e em Benninga (2008).

O modelo de Black-Litterman utiliza as mesmas técnicas de otimização de carteiras que o modelo de Markowitz, o MVO – *Mean Variance Optimization*. Diferem, porém, na medida em que o modelo de Black-Litterman baseia a construção da fronteira eficiente de tal modo a combinar as visões dos investidores com o equilíbrio de mercado. Resumidamente, de acordo com Drobetz (2001), para construir o modelo de Black-Litterman juntam-se os resultados obtidos com o modelo de Markowitz e incorpora-se a opinião dos investidores a fim de otimizar o desempenho da carteira.

3.3.1 Estimação da fronteira eficiente

Considerando o modelo de Markowitz elaborado na seção 3.2, nesta etapa incorporaremos as visões dos investidores sobre os retornos das ações Vale PN, Petrobrás PN, Gerdau PN, Usiminas PN e Companhia Siderúrgica Nacional ON, a fim de realizar a otimização de Black-Litterman. Essas ações foram escolhidas de acordo com o seguinte critério: selecionar as cinco ações com mais representatividade na composição do índice Bovespa considerando as ações previamente escolhidas para este trabalho.

Nesta monografia, as visões dos investidores serão baseadas no critério de eficiência operacional Margem *EBITDA*, múltiplo frequentemente utilizado por gestores de carteiras no Brasil para avaliar a performance de empresas.¹⁰

$$MARGEM.EBITDA = \frac{EBITDA_i}{RL_i}, \quad (11)$$

¹⁰ Ver SALIBA, R.(2008) e COELHO, F. (2005) para mais informações sobre múltiplos de mercado mais utilizados no mercado brasileiro.

onde *EBITDA* é um termo contábil que, traduzido para o português, significa “Lucro antes de juros, impostos, depreciação e amortização”. Representa uma aproximação da geração operacional de caixa da companhia sem levar em consideração os ganhos financeiros e a dedução de impostos. E *RL* representa a Receita Líquida da empresa analisada. A tabela a seguir mostra como a mudança das expectativas projetadas do múltiplo Margem *EBITDA*, *ceteris paribus*, corroboraria para a alteração de variação dos retornos das ações escolhidas.

Tabela 3 – Expectativas de múltiplos e variação dos retornos

	Margem <i>EBITDA(2008)</i>	Margem <i>EBITDA(2009*)</i>	variação no retorno
Petrobrás PN (PETR4)	0,22	0,12	-1,94%
Vale PN (VALE5)	0,43	0,35	-0,68%
Gerdau PN (GGBR4)	0,18	0,30	1,73%
Usiminas PN (USIM5)	0,32	0,35	0,36%
Companhia Siderúrgica Nacional ON (CSNA3)	0,40	0,41	0,01%

*esperado

Fonte: HSBC Bank Brasil S.A., HSBC Reseach, Stock Guide dez/2008 – *material não publicado*

Na prática, no entanto, os retornos dos ativos são correlacionados. Portanto, a incorporação de opiniões sobre a variação dos retornos das ações selecionadas acaba por interferir no comportamento de retorno das demais ações. De acordo com Benninga (2008), os retornos ajustados das demais ações são obtidos otimizando-os simultaneamente conforme a fórmula a seguir:

$$r_{i,ajustado} = r_{i,histórico} + \frac{Cov(r_i, r_j)}{Var(r_i)} \delta_j, \quad (12)$$

restringindo os resultados de acordo com os retornos das cinco ações que já incorporaram a opinião dos investidores. Na fórmula acima, δ simboliza a variação esperada dos retornos, ou seja, a opinião dos investidores. Para ser possível a realização do cálculo da otimização dos retornos ajustados, utilizou-se a ferramenta Solver do *software* Microsoft Excel 2007. A tabela a seguir apresenta os resultados obtidos:

Tabela 4 – Retornos Históricos, Esperados do Mercado e Ajustados

	Retornos		
	Históricos	Esperado do Mercado*	Ajustados**
Petrobrás PN (PETR4)	2,47%	0,54%	0,00%
Vale PN (VALE5)	1,53%	0,85%	8,50%
Gerdau PN (GGBR4)	2,17%	3,90%	3,90%
Usiminas PN (USIM5)	1,79%	2,15%	2,15%
Companhia Siderúrgica Nacional ON (CSNA3)	2,66%	2,67%	2,55%
Lojas Americanas PN (LAME4)	2,00%	2,00%	8,46%
Eletróbás ON(ELETR3)	1,57%	1,57%	8,34%
Itaú S.A PN (ITSA4)	2,27%	2,27%	9,74%
Embraer ON (EMBR3)	-0,39%	-0,39%	-0,52%
Ambev PN (AMBV4)	1,75%	1,75%	11,04%

* considerando somente as visões dos investidores sobre as ações que foram analisadas pelo comportamento do múltiplo Margem Ebitda desprezando a correlação entre as ações.

** considerando a correlação entre os ativos.

Obtidos os retornos ajustados com as opiniões dos investidores, utilizamos a mesma metodologia de Markowitz, elaborada na seção 3.2.1, para calcular os novos *Envelope Portfólios A' e B'*.

Com o objetivo de otimizar e suavizar os resultados dos pesos obtidos nos *Envelope Portfólios* com base na visão dos investidores, consideraremos neste trabalho um nível de confiança para a proporção dos ativos na carteira. Consideraremos também o grau de confiança de 60%, pois é um valor habitualmente praticado pelo mercado. Assim, acreditamos que a probabilidade de os pesos estarem ajustados conforme as visões dos investidores e alinhados com a realidade é de 60%.. Desta forma, de acordo com Benninga (2008), calculamos a seguir a nova composição de pesos para as carteiras A' e B' utilizando a fórmula abaixo:

$$Y_i, \text{ajustado.confiança} = (0,4) * X_j + (0,6) * Y_i \quad (13)$$

onde Y_i representa cada *Envelope Portfólio A' e B'*, sendo $i=(A',B')$ e $j=(A,B)$

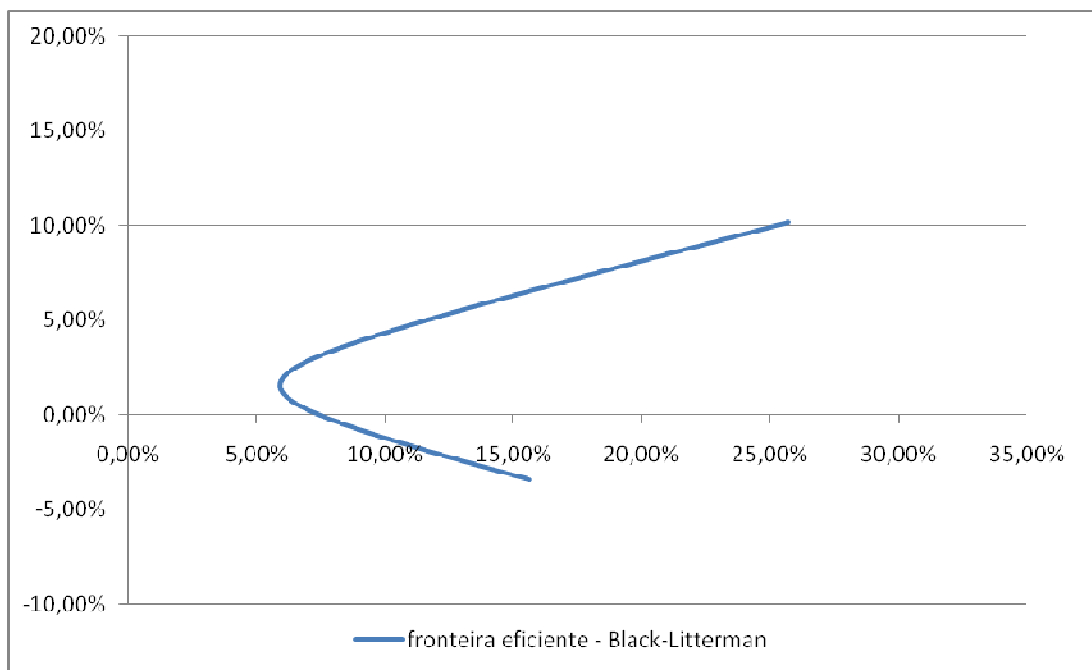
Tabela 5 – Composição de pesos na carteira

	Pesos	
	<i>Envelope Portfolio A'</i>	<i>Envelope Portfolio B'</i>
Petrobrás PN (PETR4)	-14,32%	-5,46%
Vale PN (VALE5)	-2,23%	-38,10%
Gerdau PN (GGBR4)	-24,70%	-35,25%
Usiminas PN (USIM5)	-33,81%	-75,79%
Companhia Siderúrgica Nacional ON (CSNA3)	56,09%	126,73%
Lojas Americanas PN (LAME4)	-22,17%	-21,52%
Eletróbás ON(ELETR3)	11,28%	2,90%
Itaú S.A PN (ITSA4)	81,73%	135,51%
Embraer ON (EMBR3)	-23,76%	-82,01%
Ambev PN (AMBV4)	71,89%	93,00%
SOMA	100,00%	100,00%

Fonte: Análise da autora.

Finalmente, repetindo o mesmo exercício de construção de fronteira eficiente realizado na seção 3.2.1, calcula-se aqui a fronteira eficiente de Black-Litterman com base nas combinações dos *Envelope Portfolios A'* e *B'*, utilizando-se os dados de retorno ajustados pelas visões dos investidores e os pesos dos *Envelope Portfolios A'* e *B'* considerando o nível de confiança.

Assim sendo, construímos o gráfico da fronteira eficiente a seguir:

**Figura 3 – Fronteira Eficiente de Black-Litterman**

Fonte: Análise da autora.

3.4 Comparação dos modelos de Markowitz e Black-Litterman

O objetivo central desta monografia é comparar o desempenho das carteiras elaboradas pelo método de Markowitz e de Black-Litterman através da mensuração dos retornos dado um certo nível de risco.

A ilustração a seguir compara as duas carteiras construídas nas seções anteriores:

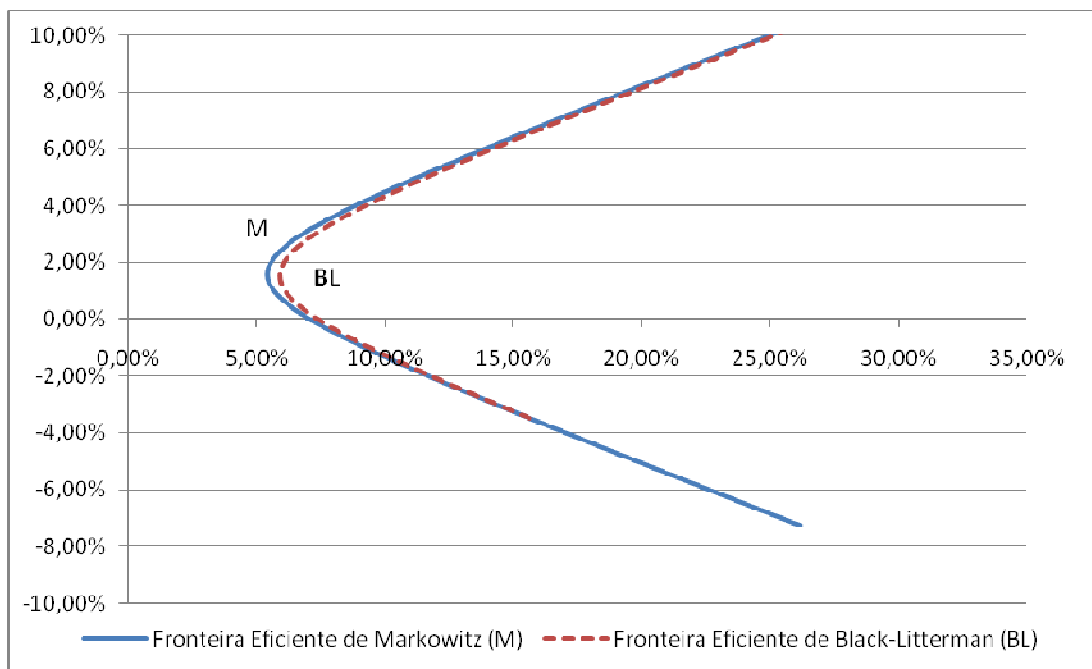


Figura 4 – Comparação das Fronteiras Eficientes de Markowitz e de Black-Litterman

Fonte: Análise da autora.

Ao analisar os gráficos acima de comparação das fronteiras eficientes, concluímos que a fronteira de Markowitz mostrou-se mais eficiente do ponto de vista da carteira de menor risco, pois, comparativamente, apresentou maior retorno. Porém, para comprovar efetivamente a superioridade do modelo de Markowitz em relação ao de Black-Litterman, devemos fazer a comparação *ex-post* dos *Envelope Portfolios* apresentados. Na próxima seção faremos a comparação dos modelos para os dados fora da amostra e também nos utilizaremos da métrica do Índice Sharpe das carteiras para uma melhor avaliação do desempenho das mesmas.

3.5 Comparação *ex-post* dos modelos de Markowitz e Black-Litterman

Nesta seção, faremos uma análise *ex-post* da performance dos modelos de Black-Litterman e de Markowitz. Dessa forma, poderemos analisar qual modelo efetivamente é superior, visto seu desempenho para períodos fora da amostra.

Utilizando a mesma composição de pesos dos Envelope Portfolios A, B, A',B' para $c = (0, R_f)$ e, utilizando o vetor da média histórica simples dos retornos para os dados de janeiro de 2009 a março de 2010, chegamos na seguinte tabela comparativa para os retornos acumulados no período:

Tabela 6 – Comparação *Ex-Post* dos modelos de Markowitz e Black-Litterman

	c = Rf	
	Retorno	Desvio Padrão
modelo de Markowitz	5,41%	1,51%
modelo de Black-Litterman (40%*)	4,20%	0,90%
modelo de Black-Litterman (60%*)	3,59%	0,71%
modelo de Black-Litterman (80%*)	2,99%	0,61%

Fonte: Análise da autora.

Observa-se que, respeitando-se o teorema das carteiras, onde quanto maior o risco, maior o retorno, vemos que as carteiras apresentadas são eficientes deste prisma.

Para poder avaliar qual modelo apresentou-se superior ao outro em termos de risco e retorno, utilizaremos o Índice Sharpe.¹¹ Este índice é muito utilizado no mercado para a avaliação de performance de carteiras, pois informa se a rentabilidade do portfólio é compatível com o risco da mesma. Sabemos se uma carteira é superior a outra quanto maior o valor do índice se apresentar. O índice de Sharpe é calculado de acordo com a fórmula abaixo:

$$SP = \frac{E(R_a) - rf}{\sigma_a} \quad (14)$$

¹¹ Ver BERNSTEIN, P. and FABOZZI, F. (1998) para mais informações sobre o cálculo da metodologia do Índice Sharpe.

Abaixo segue a tabela de comparativos do Índice Sharpe para os resultados das carteiras apresentadas anteriormente:

Tabela 7 – Comparativo dos Índices Sharpe das carteiras *Ex-Post*

	Índice de Sharpe c = Rf Retorno
modelo de Markowitz	3,13
modelo de Black-Litterman (40%*)	3,91
modelo de Black-Litterman (60%*)	4,10
modelo de Black-Litterman (80%*)	3,79

Dentro da metodologia abordada, podemos afirmar, a princípio, que o modelo de Black-Litterman, com 60% de confiança, se mostrou mais eficiente do que o modelo de Markowitz na análise *ex-post*.

Porém, somente a elaboração do Índice Sharpe para medir o desempenho das carteiras não é suficiente. Para podermos efetivamente comprovar a superioridade do modelo Black-Litterman sobre a metodologia de Markowitz faz-se necessária a comprovação de que os Índices Sharpe calculados são significativamente relevantes. Na próxima seção serão elaborados intervalos de confiança que servirão de base para podermos comprovar a eficácia dos valores apresentados na tabela 7.

3.5.1 Construção do intervalo de confiança para o Índice Sharpe

Nesta seção serão elaborados os intervalos de confiança dos Índice Sharpe associados aos modelos de Markowitz e Black-Litterman apresentados anteriormente.

De acordo com LO (2002), para determinar o intervalo de confiança do Índice Sharpe deve-se seguir a fórmula abaixo. Aqui consideraremos 95% de confiança, pois é um valor habitualmente praticado pelo mercado.

$$SP = \pm 1,96 \sqrt{(1 + \frac{1}{2} SP^2) / T} \quad (15)$$

Onde T representa o tamanho da amostra.

Abaixo segue a tabela dos intervalos de confiança do Índice Sharpe para as metodologias apresentadas anteriormente:

Tabela 8 – Intervalo de Confiança dos Índices Sharpe

	Intervalo de Confiança		Índice de Sharpe
	Limite Inferior	Limite Superior	
modelo de Markowitz	2,43	3,83	3,13
modelo de Black-Litterman (40%*)	3,06	4,76	3,91
modelo de Black-Litterman (60%*)	3,21	4,98	4,10
modelo de Black-Litterman (80%*)	2,96	4,61	3,79

Observando a tabela acima, vemos que todos os Índices Sharpe calculados na seção anterior estão dentro do intervalo de confiança, ou seja, todos são significativamente relevantes e portanto os resultados obtidos são confiáveis.

Portanto, embora o modelo de Black-Litterman apresente índices de Sharpe mais elevados, estes não são estatisticamente diferentes do modelo de Markowitz, o que nos leva a concluir que não se comprovou a superioridade do modelo de Black-Litterman sobre o modelo de Markowitz.

4 CONCLUSÃO

Utilizando dados do mercado brasileiro, este trabalho visou construir as fronteiras eficientes pelo modelo de Markowitz (1952) e de Black-Litterman (1992), gerando as suas respectivas carteiras eficientes e analisando o retorno *ex-post* das carteiras sugeridas por cada metodologia.

Levando-se em consideração as características de ambos os modelos de otimização de carteiras aqui analisados, Black-Litterman e Markowitz, antes da manipulação dos dados arriscou-se inferir e esperar que a carteira ótima, a que apresenta maior retorno com um menor nível de risco, fosse proveniente do modelo de Black-Litterman.

Essa expectativa de superioridade do modelo de Black-Litterman quanto ao nível de eficiência provém do fato de que ele é uma evolução e aprimoração do modelo de Markowitz. Como explicado anteriormente no trabalho, o modelo de Black-Litterman permite que os investidores combinem suas expectativas racionais individuais com a performance dos ativos num equilíbrio de mercado. Ou seja, de modo geral internalizam-se as visões dos investidores com o modelo de Markowitz gerando como resultado uma carteira mais intuitiva e diversificada.

A expectativa de superioridade do modelo de Black-Litterman, no entanto, não foi confirmada pelos resultados da nossa análise. Considerando todas as premissas explicitadas ao longo do trabalho concluímos que, para a amostra escolhida, o modelo de Black-Litterman com 60% de confiança das expectativas dos investidores apresentou maior Índice Sharpe do que o modelo de Markowitz quando analisamos a amostra *ex-post*, porém este não se apresenta estatisticamente diferente do Índice de Sharpe encontrado no modelo de Markowitz, não demonstrando efetivamente sua superioridade. Concluímos, portanto, que o modelo de Markowitz apresentou a melhor relação entre risco e retorno para os investidores.

Uma análise mais completa dos resultados seria testar se a carteira do modelo de Black-Litterman também se mostra superior quando os mercados estão em queda e apresentam alta volatilidade. Em um estudo mais detalhado, a análise *ex-post* dos resultados para o período da crise do *subprime* demonstraria se de fato, em qualquer cenário, o modelo de Black-Litterman é mais eficiente e superior ao modelo de Markowitz. Porém, a fim de simplificar o presente trabalho, como mencionado na seção 3.1, este estudo não será realizado de forma a dar mais enfoque para a construção das fronteiras eficientes de Markowitz e de Black-Litterman, ficando, portanto, uma sugestão para os próximos trabalhos acadêmicos a análise *ex-post* para o período do *subprime*.

REFERÊNCIAS

BENNINGA, S. (2008): “**Financial Modeling**”, Massachusetts Institute of Technology, 3ª edição, cap. 8-13.

BEST, M. and GRAUER, R. (1991): “On the Sensitivity of Mean-Variance Efficient Portfolios to Changes in Asset Means: Some Analytical and Computational Results”, **Review of Financial Studies**, Vol. 4/Nº2 (summer), pp. 314-342.

BLACK, F. (1989b): “Universal Hedging: Optimizing Currency Risk and Reward in International Equity Portfolios”, **Financial Analysts Journal**, (July/August), pp.16-22.

BLACK, F. and LITTERMAN, R. (1992): “Global Portfolio Optimization”, **Financial Analysts Journal**, September-October, pp. 28-43.

CHALFANT, J. et al. (1990): “The Mean and Variance of the Mean-Variance Decision Rule”, **American Journal of Agricultural Economics**, Vol. 72, Nº4, pp. 966-974.

COELHO, F. (2005): “EBITDA: A busca de uma melhor compreensão do maior vox populi do mercado financeiro”, Conselho Regional de Contabilidade do Estado do Rio de Janeiro, **Pensar Contábil**, (novembro/dezembro-2004/ janeiro-2005), pp.41-48.

DERDAK, T. (2003): “International Directory of Company Histories”, Vol. 51. Disponível em: <http://www.fundinguniverse.com/company-histories/The-Goldman-Sachs-Group-Inc-Company-History.html>. Acesso em: 15.junho.2009.

DROBETZ, W. (2001): “How to Avoid the Pitfalls in Portfolio Optimization? Putting the Black-Litterman Approach at Work”, **Financial Markets and Portfolio Management**, Vol. 15/ Nº1, pp. 59-75.

IDZOREK, T. (2004): “A Step-by-Step Guide to the Black-Litterman Model”, *manuscrito não publicado*.

JARQUE, C and BERA, A. (1987): “A Test for Normality of Observations and Regression Residuals”, **International Statistical Review**, Vol. 55, Nº2, pp. 163-172

LO, A. (2002): “The Statistics of Sharpe Ratios”, **Financial Analysts Journal** (July/August), Vol 58, Nº 4, pp. 36–52.

MARKOWITZ, H. (1952): “Portfolio Selection”, **The Journal of Finance**, Vol. 7/ Nº1, pp. 77-91.

PEREIRA, O (2006): “Fundos de alocação – Uma aplicação no mercado brasileiro”, Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissionalizante em Economia na Instituição Faculdades IBMEC S.A

SALIBA, R. (2008): “Aplicação de modelos de avaliação por múltiplos no Brasil”, **Revista Brasileira de Finanças**, Vol. 6, Nº 1, pp. 13-47.

SCHERER, B. (2002): “Portfolio Resampling: Review and Critique”, **Financial Analysts Journal**, Vol. 58/ Nº6, pp. 98-109.

SHARPE, W. (1964): “Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium”, **Journal of Finance**, (September), pp. 425-442.

STEINBACH, M. (2001): “Markowitz Revisited: Mean-Variance Models in Financial Portfolio Analysis”, **Society for Industrial and Applied Mathematics**, Vol. 43, Nº1, pp. 31-85.

TORRES FILHO, E. (2008): “Entendendo a crise do subprime”, Visão do Desenvolvimento, BNDES Vol .44. Disponível em: http://www.bndes.gov.br/SiteBNDES/bndes/bndes_pt/Institucional/Publicacoes/Consulta_Expressa/Tipo/Visao_do_Developolvimento/200801_2.html. Acesso em 21.setembro.2009.