IBMEC SÃO PAULO
Faculdade de Economia e Administração

Armênio Dias Westin Neto

ESTIMAÇÃO DO MODELO NELSON-SIEGEL GENERALIZADO LIVRE DE ARBITRAGEM PARA A ESTRUTURA A TERMO DAS TAXAS DE JUROS NO BRASIL

São Paulo
2009

Armênio Dias Westin Neto

Estimação do modelo Nelson-Siegel generalizado livre de arbitragem para a estrutura a termo das taxas de juros no Brasil.

Monografia apresentada ao curso de Ciências Econômicas, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel do Ibmec São Paulo.

Orientador:
Prof. Márcio Poletti Laurini – Ibmec SP

São Paulo
2009

Resumo

WESTIN N., Armênio Dias. Estimação do modelo Nelson-Siegel generalizado livre de arbitragem para a estrutura a termo das taxas de juros no Brasil. São Paulo, 2009. 26p. Monografia – Faculdade de Economia do IBMEC São Paulo.

Neste trabalho é realizada a estimação do modelo Nelson-Siegel generalizado, incorporando cinco fatores latentes, para os dados da estrutura a termo das taxas de juros brasileira presentes no contrato de negociação DI1 da Bolsa de Mercadorias e Futuros (BM&F). Essa estimação vai de encontro com a teoria tradicional de finanças, pois no modelo foi imposta a condição de não-arbitragem. A imposição desse artifício, todavia, acaba deteriorando o ajuste fornecido pelo modelo proposto para as taxas de juros verificadas na estrutura a termo brasileira. Como as maturidades se deslocam no tempo nessa estrutura e os parâmetros de decaimento são fixos, o ajuste gerado pela estimação é ideal somente as taxas de juros de médio e longo prazo, sendo que, quanto às taxas de curto prazo, o modelo não apresenta boa autonomia quanto à qualidade do ajuste.

Palavras-chave: Estrutura a termo das taxas de juros; Fatores latentes; Componentes de médio, curto e longo prazo; Parâmetros de decaimento.

Sumário

Lista de Figuras

1. INTRODUÇÃO

O desempenho de fundos de investimentos está relacionado com a iteração entre o gestor do fundo e os dados de taxas de juros, de modo que, prevê-las, pontualmente, torna-se fundamental para a administração de carteiras de títulos públicos e, ao mesmo tempo, as probabilidades associadas a cada evento previsto são cruciais no gerenciamento do risco e até mesmo na precificação de derivativos. Por isso, a investigação da dinâmica da curva de juros tem despertado grande atenção de acadêmicos, condutores de políticas econômicas, investidores e participantes do mercado, o que levou à ampla variedade de modelos existentes.

Vista a relevância do tema, o propósito deste trabalho será modelar dinamicamente a estrutura a termo das taxas de juros no Brasil, com base na versão proposta por Christensen, Diebold e Rudebruch (2008), onde é combinado o melhor das duas tradicionais técnicas de modelagem da curva de juros: os “affine models” e a versão dinamizada do modelo Nelson-Siegel desenvolvido por Diebold e Li (2006), no qual as taxas de juros para cada maturidade correspondem ao refinamento, conforme o trabalho de Liiterman e Scheikman (1991), composto por três fatores latentes, cuja interpretação é dada por nível, inclinação e curvatura.

Em linhas gerais, este trabalho está estruturado em seis seções, já incluindo esta primeira. Na segunda seção, é feita uma breve revisão de trabalhos relevantes desenvolvidos até agora e que sustentam a abordagem tratada aqui. Na próxima seção, por sua vez, é exposta a metodologia presente neste trabalho assim como as razões pelo critério de escolha. Já na quarta seção, encontra-se a análise descritiva dos dados utilizados e alguns aspectos estilizados da estrutura a termo das taxas de juros no Brasil. Na seção seguinte, a quinta, é realizada a estimação do modelo proposto. Posteriormente, na seção seis, encontra-se o tópico com a análise dos resultados encontrados. Por fim, na seção sete, encontra-se a conclusão do trabalho.

2. LITERATURA

A maioria dos modelos para a estrutura a termo de taxas de juros assume, sem muita justificativa, que nas taxas observadas dos títulos não há oportunidade de arbitragem. Esta hipótese, entretanto, só é consistente quando esses títulos são ampla e simultaneamente líquidos no mercado, como, por exemplo, é o caso dos títulos de dívida do governo dos Estados Unidos. Neste tipo de mercado, então, os agentes racionais observam consistência entre as taxas das diferentes maturidades existentes, ou seja, da curva de juros em qualquer ponto no intervalo de tempo, e esperam que o passado dessas taxas reflita em sua evolução dinâmica.

Segundo Diebold e Li (2006), os últimos 25 anos têm sido de grandes avanços em modelos teóricos para a estrutura a termo das taxas de juros. Duas das principais abordagens populares da estrutura a termo são os modelos calcados na hipótese de não-arbitragem e os na hipótese de equilíbrio geral. Tipicamente, os primeiros acreditam no perfeito ajuste da estrutura a termo em cada ponto do tempo para assegurar que não haja oportunidades de arbitragem, característica esta importante na precificação de derivativos. Os últimos, diferentemente, focam na modelagem dinâmica da taxa instantânea, utilizando tipicamente “affine models”, onde as taxas de juros de diferentes maturidades derivam de condições acerca do prêmio de risco.

Ainda, sob a ótica da previsão referente aos notáveis modelos de taxas de juros, segundo Diebold e Li (2006), apesar dos avanços teóricos, muitas vezes imprecisos, da economia financeira frente à curva de juros, pouca atenção tem sido dedica ao problema prático da previsão da curva de juros. A literatura sobre estrutura a termo dos modelos de não-arbitragem tem pouco a inferir sobre a dinâmica ou a previsão, dada que está focada principalmente no ajuste da estrutura a termo num dado instante de tempo. Já a literatura sobre estrutura a termo dos modelos de equilíbrio geral é focada com a dinâmica resultante da taxa de juros de curto prazo, o que potencialmente a relaciona com a previsão, mas a grande maioria nessa tradição dirige seu estudo apenas para eventos dentro da amostra em análise, corroborando para que as previsões sejam pobres.

De uma forma geral, basicamente, seria conveniente para um bom modelo dinâmico reproduzir o histórico dos fatos estilizados, relacionando-o ao formato médio da curva e às suas diferentes formas no transcorrer do tempo. Assim, como exposto por Diebold e Li (2006), é esperado que os modelos sumarizem alguns dos fatos estilizados mais importantes dentre todas as curvas de juros existentes, que são: (i) o formato médio da curva de juros é crescente e côncavo, certamente associado ao valor médio dos parâmetros estimados para cada fator; (ii) a curva de juros tem formatos variados no tempo, fato relacionado à variação dos parâmetros estimados para cada fator; (iii) as dinâmicas dos juros são persistentes e as dos “spreads”, não, o que, geralmente, reflete a alta persistência do nível da série e a baixa persistência da inclinação da curva de juros, respectivamente; (iv) maior volatilidade da curva de juros no curto prazo; (v) maior persistência paras as taxas de longo prazo.

3. METODOLOGIA

O modelo básico para a estrutura a termo das taxas de juros foi proposto por Nelson e Siegel (1987). Trata-se de um modelo estático amplamente difundido no mercado financeiro e também utilizado por bancos centrais devido a sua facilidade na implementação e ao seu poder preditivo, onde se procede de forma parcimoniosa ao ajuste “cross-section” da curva de juros.

A representação desse tradicional modelo é dada pela equação (1) abaixo:

(1) $$y(\tau) = \beta_0 + \beta_1\left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}\right) + \beta_2\left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}\right)$$

em que $y(\tau)$ é o vetor com as taxas de juros, observadas no instante de tempo t, para as maturidades τ, e β_0, β_1, β_2 e λ são parâmetros do modelo.

Para entender a evolução da curva de juros no decorrer to tempo, ou seja, da estrutura a termo, Diebold, Li e Yue (2008) tornaram o modelo anterior, dado pela equação (1), dinâmico, substituindo os parâmetros por fatores variantes no tempo. Procedendo conforme o estudo de componentes principais desenvolvido por Litterman e Scheikman (1991), os novos parâmetros ou fatores assumiram a interpretação de nível, inclinação e curvatura.

A nova representação, seguindo essa formulação proposta, fica sendo, então, dada pela equação (2) abaixo:

(2) $$y_t(\tau) = l_t + s_t\left(\frac{1-e^{-\lambda_t\tau}}{\lambda_t\tau}\right) + c_t\left(\frac{1-e^{-\lambda_t\tau}}{\lambda_t\tau} - e^{-\lambda_t\tau}\right)$$

em que $y_t(\tau)$ é o vetor com as taxas nominais de um título que não paga cupons conforme as maturidades τ e l_t, s_t, c_t e λ_t são os fatores (ou novos parâmetros), podendo variar no tempo. Dentre eles, l_t, s_t e c_t representam, respectivamente, as componentes de longo, curto e médio prazo das taxas de juros.

Essa variação do modelo Nelson-Siegel com estrutura exponencial de modelagem, período-a-período, da curva de juros, em conformidade com três parâmetros, fornece dinâmica ao modelo. Os três parâmetros podem ser interpretados como fatores, segundo Diebold, Li e Yue (2008), pois a estrutura Nelson-Siegel gera uma estrutura no efeito de cada um desses fatores, o que possibilita uma precisa estimação deles, permitindo, por fim, interpretá-los como fatores latentes (não diretamente observáveis) de nível, inclinação e curvatura, respectivamente.

Em especial, a interpretação atrelada ao fator nível é da média das taxas praticadas para as diferentes maturidades existentes. Já o segundo fator, o de inclinação, mostra se o formato da curva é crescente ou decrescente à medida que se aumenta a maturidade, enquanto que o terceiro, o de curvatura, por sua vez, reflete a velocidade com que a curva está crescendo ou decrescendo. Adicionalmente, λ_t, representa o parâmetro de decaimento médio da curva, podendo variar no tempo de modo a reproduzir o fato estilizado da instabilidade em curvas de países emergentes, como a do Brasil, por exemplo.

Dentre a maioria dos trabalhos que usam a abordagem proposta pela equação (2), verifica-se amplamente que o ajuste é satisfatório apenas para as maturidades mais curtas, ou seja, o modelo consegue captar a estrutura das taxas de curto e de médio prazo. Todavia, para as taxas mais longas, muitas vezes o modelo fornece uma curva de juros que se torna estável no longo prazo, fato que não é consistente com curvas que mudam de formato, não só em sua evolução temporal, mas também conforme as próprias maturidades.

Na procura por solucionar o problema descrito anteriormente, foi proposta uma extensão ao modelo caracterizado pela equação (2). Trata-se do trabalho feito por Svennson (1995), onde é feita uma generalização do modelo proposto Diebold-

Li, no qual é adicionado mais um fator de curvatura para melhor ajustar as taxas de juros para as maturidades de longo prazo.

A representação da versão extendida proposta por Svensson, em 1995, segundo Christensen, Diebold e Rudebruch (2008),é dada pela equação (3) abaixo:

(3) $$y_t(\tau) = l_t + s_t\left(\frac{1-e^{-\lambda_{1t}\tau}}{\lambda_{1t}\tau}\right) + c_{1t}\left(\frac{1-e^{-\lambda_{1t}\tau}}{\lambda_{1t}\tau} - e^{-\lambda_{1t}\tau}\right) + c_{2t}\left(\frac{1-e^{-\lambda_{2t}\tau}}{\lambda_{2t}\tau} - e^{-\lambda_{2t}\tau}\right)$$

em que $y_t(\tau)$ é o vetor com as taxas nominais de um título que não paga cupons conforme as maturidades τ e l_t, s_t, c_{1t}, c_{2t}, λ_{1t} e λ_{2t} são os fatores, podendo variar no tempo. Neste caso, l_t, s_t, c_{1t} e c_{2t} continuam representado, respectivamente, as componentes de longo, curto e médio prazo das taxas de juros.

Christensen, Diebold e Rudebruch (2008) propõem uma versão mais complexa para esse modelo e corrigem também a generalização feita por Svennson (1995), em que é adicionado mais um fator de curvatura para melhor ajustar as taxas das maturidades de longo prazo, mas que, assim como o Nelson-Siegel original, em seu formato dinâmico, acaba não sendo consistente com a restrição de não-arbitragem no tempo. Conforme observaram os primeiros autores, no modelo com a extensão de Svennson, dado pela equação (3), não é possível obter uma aproximação com a restrição de não-arbitragem, pois isso implica que cada fator de curvatura seja pareado com um fator de inclinação, tendo cada par a mesma taxa de reversão à média. Logo, não é possível dizer que esse modelo seja consistente com a hipótese de não-arbitragem porque ele possui um fator para a inclinação e dois para a curvatura.

Desse modo, a versão proposta por Christensen, Diebold e Rudebruch (2008) para a função das taxas de juros fica caracterizada pela equação (4) a seguir:

(4) $$y_t(\tau) = l_t + s_{1t}\left(\frac{1-e^{-\lambda_{1t}\tau}}{\lambda_{1t}\tau}\right) + s_{2t}\left(\frac{1-e^{-\lambda_{2t}\tau}}{\lambda_{2t}\tau}\right) + c_{1t}\left(\frac{1-e^{-\lambda_{1t}\tau}}{\lambda_{1t}\tau} - e^{-\lambda_{1t}\tau}\right) + c_{2t}\left(\frac{1-e^{-\lambda_{2t}\tau}}{\lambda_{2t}\tau} - e^{-\lambda_{2t}\tau}\right)$$

em que $y_t(\tau)$ é o vetor com as taxas nominais de um título que não paga cupons conforme as maturidades τ e l_t, s_{1t}, s_{2t}, c_{1t}, c_{2t}, λ_{1t} e λ_{2t} são os fatores latentes, variantes no tempo, de nível, inclinação para o curto prazo, inclinação para o longo prazo, curvatura para o curto prazo e curvatura para o longo prazo, respectivamente.

Essa especificação tem por objetivo corrigir a falha no ajuste nas maturidades de longo prazo para os modelos da classe Nelson-Siegel. Segundo Christensen, Diebold e Rudebruch (2008), a maioria dos modelos procede corretamente no ajuste apenas para as maturidades de curto prazo, deixando a desejar com relação ao ajuste para as taxas longas. Por isso, a iniciativa de inserir mais fatores latentes, aliás, de parear um fator de inclinação com outro de curvatura, tanto para o curto quanto para o longo prazo, tem por intuito o melhor ajuste nas taxas de curto prazo, que já eram evidenciados, e obter ganhos nas estimações para as longas, pois, na maioria dos modelos de estrutura a termo, a curva se tornava estável para as taxas com maior maturidade.

Segundo Laurini e Hotta (2008), é importante dizer que não será preciso assumir as restrições usuais de estimação e identificação presentes nos demais modelos de estrutura a termo de taxas de juros. Ao invés de fazer a estimação via Mínimos Quadrados Ordinários em Dois Estágios ou via Filtro de Kalman (métodos que impossibilitam a construção de intervalos de confiança tanto para os parâmetros quanto para as previsões devido a problemas com a perda de eficiência no segundo estágio e com máximos globais na função de verossimilhança, respectivamente), a estimação será realizada pela metodologia Bayesiana através do instrumento de simulações Markov Chain Monte Carlo (MCMC), possibilitando obter intervalos de credibilidade exatos tanto para os fatores latentes e para os parâmetros quanto para as previsões geradas acerca do modelo.

4. BASE DE DADOS

Para o procedimento do trabalho proposto, foram coletados os dados do Boletim Diário com o resumo estatístico do pregão da Bolsa de Mercadorias e Futuros (BM&F), localizada na cidade de São Paulo, SP. Dentre os produtos fornecidos e negociados pela instituição, encontra-se um instrumento financeiro importante no mercado do País, que é do Contrato Futuro de DI de Um Dia.

O Contrato Futuro de DI de Um Dia, cujo código de negociação no mercado é DI1, é cotado em taxa de juro efetiva anual, com base em duzentos e cinqüenta e dois dias úteis. Suas maturidades estão distribuídas da seguinte forma: há cotação para os quatro primeiros meses após o mês de realização de uma operação com este tipo de contrato, e, a partir daí, nos meses que são considerados como início de trimestres.

O período que compreende os dados coletados para a análise do modelo vai de 2 de janeiro de 2007 a 30 de setembro de 2009, totalizando seiscentos e setenta e quatro observações diárias. Dentre as causas que levaram a escolha desse intervalo, é importante mencionar que só a partir de 2007 é que existe um maior número de taxas observadas para as maturidades existentes, ou seja, um maior número de vértices do que nos anos anteriores. Este fato estilizado vai de encontro com a evolução recente da economia do País e de suas instituições, o que permitiu que, com o passar dos anos, os investidores tivessem uma maior confiança com os produtos financeiros daqui, impactando no horizonte de negociação das taxas do contrato DI1. Há cerca de dez anos, por exemplo, era possível realizar esse tipo de transação com no máximo dois anos à frente para as maturidades verificadas.

5. ESTIMAÇÃO

Inicialmente, a equação a ser estimada para a modelagem da estrutura a termo das taxas de juros no Brasil, fornecidos conforme o histórico do contrato DI1, é dada pela equação (4). Esta é dada por:

$$y_t(\tau) = l_t + s_{1t}\left(\frac{1-e^{-\lambda_{1t}\tau}}{\lambda_{1t}\tau}\right) + s_{2t}\left(\frac{1-e^{-\lambda_{2t}\tau}}{\lambda_{2t}\tau}\right) + c_{1t}\left(\frac{1-e^{-\lambda_{1t}\tau}}{\lambda_{1t}\tau} - e^{-\lambda_{1t}\tau}\right) + c_{2t}\left(\frac{1-e^{-\lambda_{2t}\tau}}{\lambda_{2t}\tau} - e^{-\lambda_{2t}\tau}\right)$$

Christensen, Diebold e Rudebrusch (2008) assumem que todos os cinco fatores latentes, ou seja, os fatores de carga l_t, s_{1t}, s_{2t}, c_{1t} e c_{2t}, são independentes entre si e seguem um processo autoregressivo de primeira ordem. Dessa forma, a equação de estado é dada pela equação (5) abaixo:

(5)
$$\begin{pmatrix} l_t - \mu_l \\ s_{1t} - \mu_{s_1} \\ s_{2t} - \mu_{s_2} \\ c_{1t} - \mu_{c_1} \\ c_{2t} - \mu_{c_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{t-1} - \mu_l \\ s_{1t-1} - \mu_{s_1} \\ s_{2t-1} - \mu_{s_2} \\ c_{1t-1} - \mu_{c_1} \\ c_{2t-1} - \mu_{c_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_t(l) \\ \eta_t(s_1) \\ \eta_t(s_2) \\ \eta_t(c_1) \\ \eta_t(c_2) \end{pmatrix}$$

Os termos de erro da equação (5) $\eta_t(l)$, $\eta_t(s_1)$, $\eta_t(s_2)$, $\eta_t(c_1)$ e $\eta_t(c_2)$ tem a matriz de variância e covariância condicional dada pela equação (6) a seguir:

(6)
$$Q = \begin{pmatrix} q_{11}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{22}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{33}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{44}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_{55}^2 \end{pmatrix}$$

Adicionalmente, para o procedimento da correção de não-arbitragem, princípio fundamental na teoria de finanças, conforme o Teorema Fundamental da Precificação de Ativos, observa-se que, teoricamente, um mercado só é livre e arbitragem quando existe pelo menos uma medida de probabilidade Q igual a uma medida P de modo que os retornos descontados de um certo ativo, se ajustados para o risco, sejam um semi-martingale para a medida Q.

Isso quer dizer que, em tempo contínuo, a relação da dinâmica entre a medida P e a neutralidade ao risco, sob a condição da medida Q, seja dada pela equação (7), seguindo a linha de exposição dada por Christensen, Diebold e Rudebrusch (2008):

$$\textbf{(7)} \qquad dK_t^Q = dK_t^P + \Pi_t dt$$

onde Π_t representa a especificação de prêmio de risco.

Além disso, com a especificação de Π_t dada por Christensen, Diebold e Rudebrusch (2008) e por Laurini e Hotta (2008), a variação de cada variável de estado (Y_i) sob a condição da medida P é dada pela equação (8) a seguir:

$$\textbf{(8)} \qquad dY_t = K^P[\theta^P - Y_t]dt + \sum dW_t^P$$

Após essas considerações, a curva caracterizada pela equação (4) contém agora um fator de correção para a condição de não-arbitragem, sendo dada pela seguinte expressão da equação (9) abaixo:

$$\textbf{(9)} \qquad \begin{aligned} y_t(\tau) = l_t + s_{1t}\left(\frac{1-e^{-\lambda_{1t}\tau}}{\lambda_{1t}\tau}\right) + s_{2t}\left(\frac{1-e^{-\lambda_{2t}\tau}}{\lambda_{2t}\tau}\right) + c_{1t}\left(\frac{1-e^{-\lambda_{1t}\tau}}{\lambda_{1t}\tau} - e^{-\lambda_{1t}\tau}\right) \\ + c_{2t}\left(\frac{1-e^{-\lambda_{2t}\tau}}{\lambda_{2t}\tau} - e^{-\lambda_{2t}\tau}\right) + \frac{C(t,\tau)}{\tau - t} \end{aligned}$$

onde o fator de correção é função da variância de cada fator latente e dos parâmetros de decaimento do modelo, que, nesta abordagem, são mantidos constantes.

Por fim, a consideração que resta ser exposta é quanto ao tipo de estimação adotada. A opção escolhida neste trabalho foi a estimação bayesiana, porque permite usar toda a informação da estrutura a termo das taxas de juros brasileiras, evitando grandes imposições quando comparada a abordagens tradicionais. De maneira geral, a inferência bayesiana permite encontrar a distribuição a posteriori dos parâmetros dentro da amostra coletada. Esta distribuição é resultante da atualização da distribuição a priori assumida para os parâmetros, conforme a função de verossimilhança.

6. RESULTADOS

Os resultados da estimação bayesiana para os cincos parâmetros que compõem o modelo da equação (9), segundo Christensen, Diebold e Rudebrusch (2008), e já também com a proposta da correção de não-arbitragem, estão expostos nas figuras a seguir. Vale comentar que, para a estimação dos fatores latentes, fixaram-se os valores dos parâmetros de decaimento das componentes de inclinação e curvatura, sendo que $\lambda_{1t} = 0{,}18$ e $\lambda_{2t} = -2{,}4$ para qualquer instante de tempo t dentro do intervalo da amostra em análise para as taxas de juros do DI1.

Primeiramente, na figura (1), encontra-se a evolução do fator nível das taxas do modelo proposto, l_t, também denotado por β_1, representando a componente de longo prazo da estrutura a termo das taxas de juros brasileira. Numa primeira análise do gráfico da figura (1), fica claro quão variante foram os valores assumidos pelo fator responsável pelos valores médios das taxas de juros conforme a evolução na maturidade, o que acaba dificultando sua interpretação se for feita uma comparação com a evolução dos outros quatro fatores.

Entretanto, observando com cuidado o ambiente macroeconômico vivido pelo País no intervalo de tempo em questão da análise aqui desenvolvida, o padrão da evolução do β_1 faz sentido. Inicialmente, chama atenção a queda brusca verificada na metade do intervalo de estudo. Este período foi caracterizado pelo início da Crise Financeira de 2008. Anteriormente a ela, mas no mesmo ano de 2008, o País presenciava altas taxas de crescimento e, ao mesmo tempo, tinha atrelada uma taxa de juros mais elevada em circunstância de uma possível quebra da meta de inflação.

Com o início da crise, todo o cenário de crescimento deu lugar a um cenário de início de recessão, onde não havia crédito e, conseqüentemente, o crescimento verificado anteriormente poderia ser deteriorado com o decrescimento observado ao final do terceiro e durante quarto trimestre. O impacto disso se deu, é claro, na curva de juros do contrato DI1, onde, em sua maioria, as curvas tiveram um deslocamento para baixo, sem alterar, em demasia, os valores iniciais da estrutura. Logo, toda a estrutura de movimento a ser captada pelo modelo saiu da componente de longo-prazo, ou seja, do fator nível, e passou para as componentes de médio e curto prazo, isto é, os fatores de inclinação e curvatura, justificando assim o decrescimento do fator β_1 durante o ano de 2008.

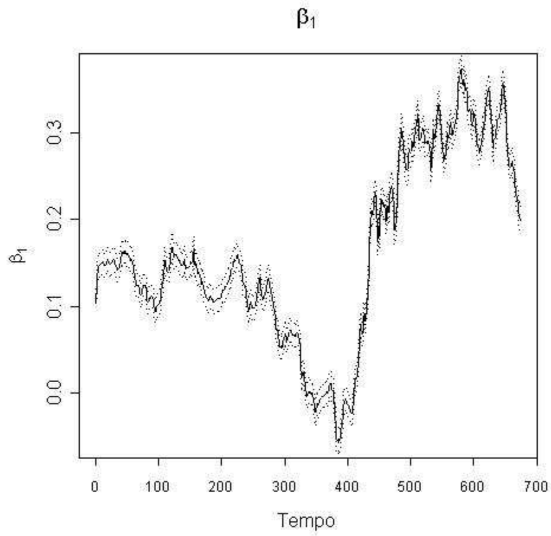


Figura 1. Evolução do Fator Nível Estimado.

Dito isso, a análise da Figura (1) e da Figura (2) permite complementar ainda mais os aspectos relevantes observados anteriormente. No período anterior à crise, especialmente no ano de 2007, a curva não se mostra muito volátil, sem fortes variações tanto na forma quanto no aspecto, tendo seu formato médio dado pela curva do mês de julho de 2007. Essa estabilidade faz com que a carga de explicação do fator nível seja maior nesse período do que a carga verificada no segundo semestre do ano de 2008, o que é verificado na evolução de β_1, conforme a Figura (1).

Adicionalmente, no período posterior à fase mais crítica da crise financeira, principalmente a partir do segundo trimestre de 2009, o País conseguiu verificar crescimento econômico devido às políticas governamentais e, ao mesmo tempo, ao dinamismo da autoridade monetária e à inflação saudável, que implicaram em uma taxa de juros básica situada em níveis poucas vezes verificados anteriormente, conforme pode se verificar na curva fornecida pela Figura (2). Por isso, a componente de longo prazo assume valores mais intensos na explicação da estrutura a termo das taxas de juros nos contratos DI1, haja vista que há indícios de atualmente estar em curso o início de uma estabilidade duradoura dos juros praticados no País.

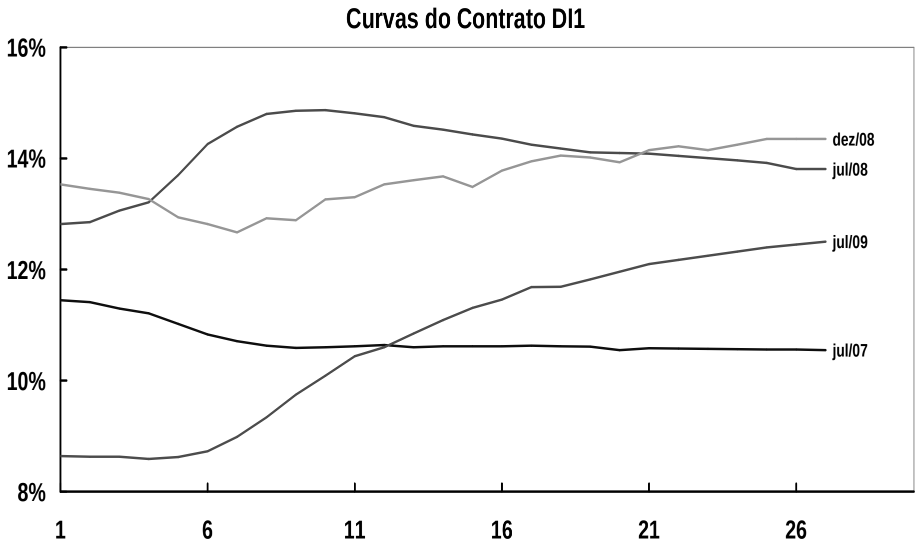
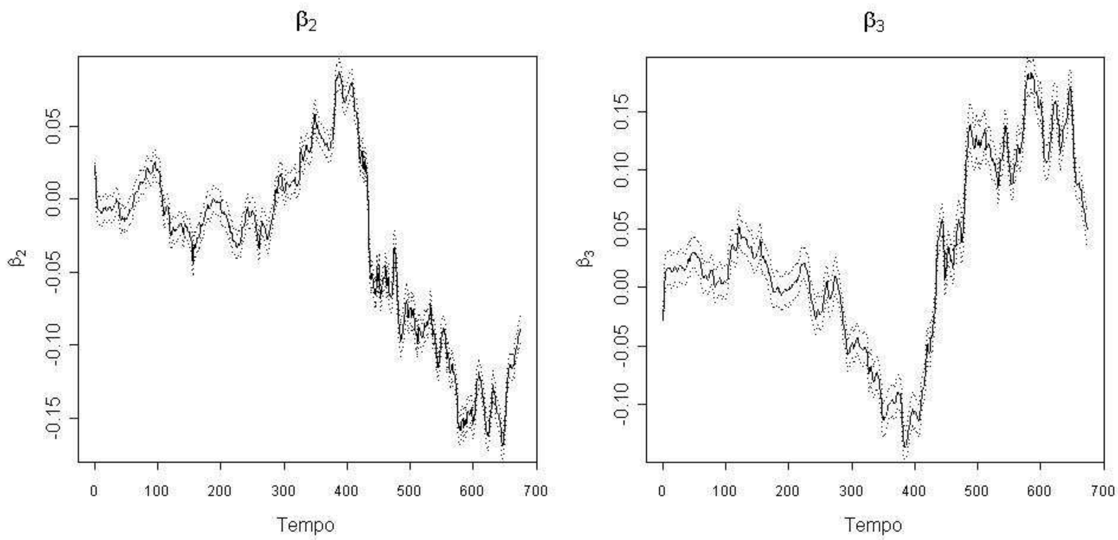


Figura 2. Curvas da Estrutura a Termo do País.

Na seqüência, dando continuidade à exposição de como evoluiram os fatores de cargas do modelo, a Figura (3) é composta por dois gráficos onde é exposta a evolução dos dois fatores de inclinação estimados, conforme o modelo da equação (9). A análise de ambas as imagens permite notar que os dois fatores captam a inclinação da estrutura a termo de maneira diferente entre si, afinal, em certos momentos, quando a carga de um fator é elevada, a outra carga, por sua vez, é baixa. Essa complementaridade dos fatores atribui qualidade ao ajuste do modelo.

Especificamente, vale notar que os fatores de inclinação β_2 e β_3 representam as componentes de curto prazo da estrutura a termo e estão associados, respectivamente, aos parâmetros de decaimento médio da curva de juros λ_1 e λ_2, que são iguais a -0,18 e a -2,40. De uma forma geral, nota-se que uma tendência de decrescimento da carga verificada para o fator β_2, com exceção do período referente à crise financeira, onde as curvas apresentaram variações fortes em relação ao padrão verificado dentro da amostra observada. Ao mesmo tempo, a carga verificada do fator de inclinação β_3 e apresentou uma tendência de crescimento, além das peculiaridades comuns devido ao fato da crise.

Assim, a conclusão que se faz pertinente quanto aos fatores de inclinação é que, em virtude da alteração do formato médio da curva de juros brasileira, que passou de decrescente e convexa para crescente e côncava, conforme as maturidades, o fator de inclinação relacionado a um parâmetro de decaimento menor tenderia a diminuir sua carga, ao passo que o fator do mesmo tipo, mas relacionado a um parâmetro de decaimento maior, tenderia a aumentar. Essa descrição é exatamente o que ocorre com β_2 e β_3 na Figura (3).

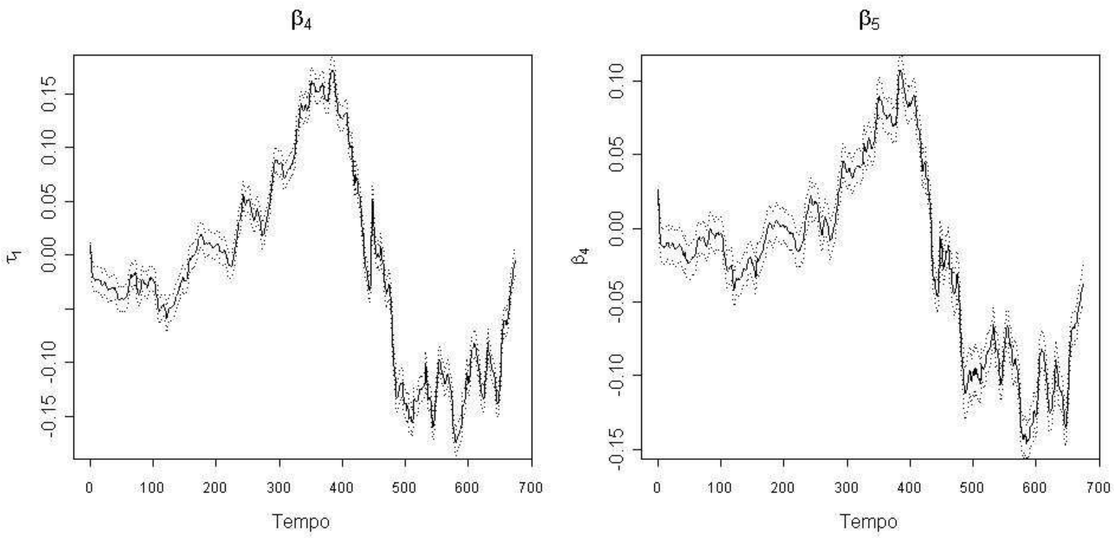


(A) Evolução do 1º Fator de Inclinação. **(B) Evolução do 2º Fator de Inclinação.**

Figura 3. Evolução dos Fatores de Inclinação Estimados.

Referente aos fatores de curvatura, que refletem as componentes de médio prazo para a estrutura a termo, percebe-se, a partir da Figura (4), que ambos os fatores apresentaram uma evolução similar no ajuste para a amostra, diferenciando-se apenas com relação ao valor da carga, o que decorre em circunstância de cada fator estar relacionado a parâmetros de decaimento médio que possuem intensidades variadas, como visto anteriormente nesta mesma seção.

Em linhas gerais, a evolução inicial de ambos os fatores de inclinação mostra que a estrutura a termo estava se modificando velozmente conforme a evolução crescente e côncava durante o primeiro semestre de 2008. Com a crise e, conseqüentemente, o turbilhão na evolução da estrutura a termo, os fatores de inclinação exibiram inversão em seu comportamento, mostrando que a curva estava adquirindo uma forma mais linearizada e, ao mesmo tempo, reiterando o aumento das cargas verificadas pelos fatores de inclinação.



(C) Evolução do 1º Fator de Curvatura. **(D) Evolução do 2º Fator de Curvatura.**

Figura 4. Evolução dos Fatores de Curvatura Estimados.

Verificada a evolução dos fatores que compõem a estrutura do modelo dinâmico, o próximo passo é a análise, através dos gráficos gerados, do ajuste fornecido pelo modelo proposto. A partir da Figura (5), inicialmente, observa-se o retrato do ajuste do modelo para dois casos de curvas tipicamente presentes na literatura da estrutura a termo: curvas de juros crescentes e côncavas. Conforme o gráfico, pode-se notar que o modelo ajusta bem para as taxas de médio e de longo prazo na estrutura a termo fornecida pelo DI1, ao passo que, com relação às taxas de curto prazo, que são igualmente relevantes para os agentes financeiros, as observações ficam fora até mesmo do intervalo de confiança de 95% criado pela estimação (linha central).

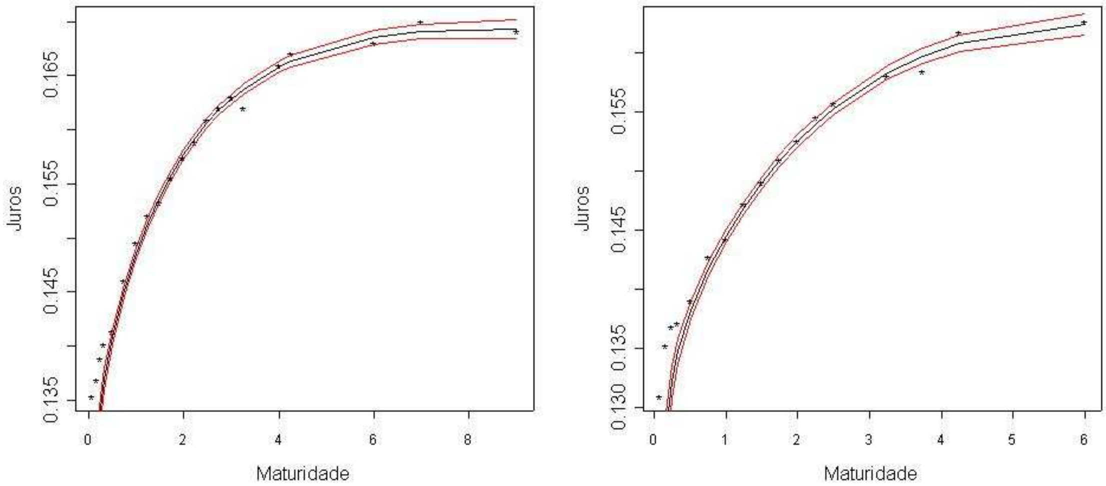


Figura 5. Ajuste do Modelo para duas curvas crescentes e côncavas no contrato DI1.

Para as curvas de juros comuns à estrutura a termo brasileira, que apresenta mais de uma mudança na curvatura e também variação forte na inclinação, o modelo proposto, com a correção de não-arbitragem, fornece novamente um bom ajuste para as taxas de maturidades de médio e de longo prazo. Já para as taxas curtas, nem dentro do intervalo de confiança o ajuste procede. Observe a Figura (6).

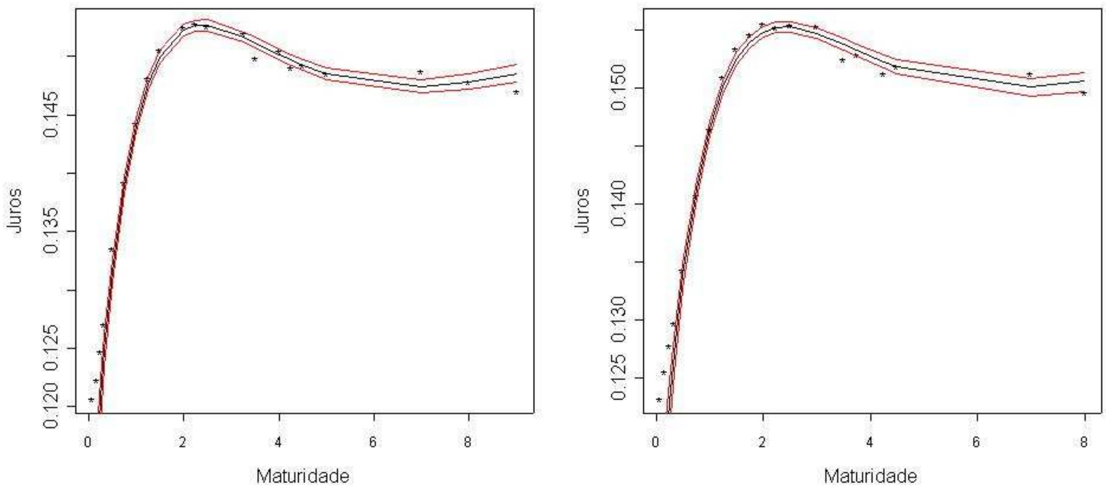


Figura 6. Ajuste do Modelo para duas curvas do DI1 típicas da estrutura brasileira.

No caso de curvas ainda mais complexas, verificadas dentro da amostra, a análise da Figura (7) reforça o fato verificado de que o modelo proposto ajusta bem as taxas para as maturidades de médio e longo prazo, deixando a desejar quando se trata de taxas curtas.

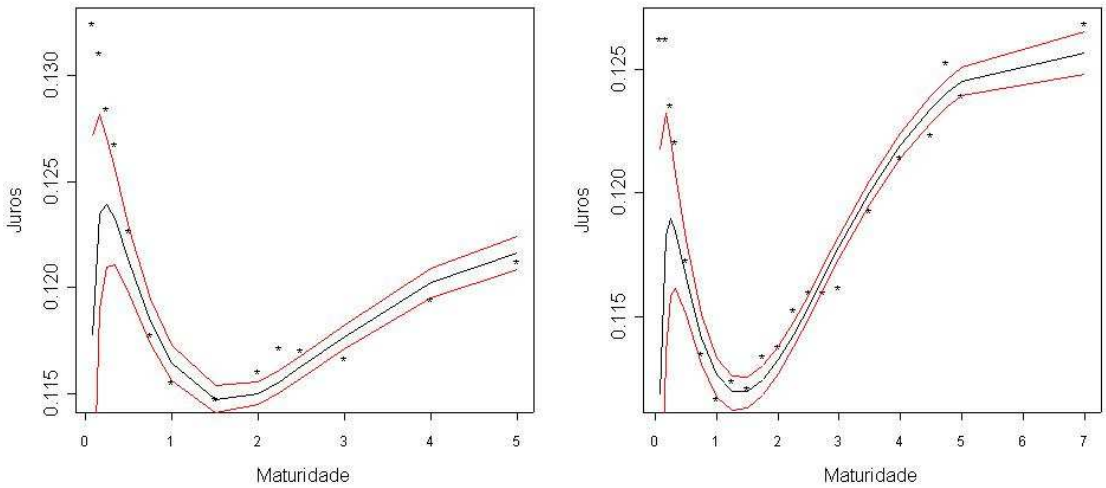


Figura 7. Ajuste do Modelo para curvas do DI1 decrescentes e convexas.

Com as análises expostas anteriormente, de imediato, a percepção que pode ser tirada do estudo é a de que o modelo generalizado livre de arbitragem não funciona no começo da amostra, isto é, no ajuste "cross-section", para as maturidades de curto prazo. A suspeita que fica, então, é a de que, como a maturidade da curva de juros fornecida pelo instrumento financeiro DI1 da BM&F se desloca à medida que há evolução temporal, certamente isso pode estar afetando a correção de não-arbitragem, pois se assumiu aqui que ambos os parâmetros de decaimento média da curva são fixos, assim como no artigo original, onde utiliza-se títulos do tesouro americanos, cuja maturidade, por sua vez, não se deslocam no tempo.

Para efeito de comparação, nas Figuras (8) e (9) são expostos gráficos contendo o ajuste do modelo com a restrição de não-arbitragem, dado pela linha contínua, e o ajuste do mesmo formato de modelo, porém, agora, sem a condição citada, dado pela linha pontilhada. De um modo genérico, é importante notar que o ajuste para as taxas de médio e de longo prazo de ambos os modelos, se não for o mesmo, pelo menos é quase idêntico, afinal, ambas as linhas parecem estar em sobreposição no ajuste fornecido para os prazos médio e longo nas figuras (8) e (9), respectivamente. Entretanto, curiosamente, para as taxas de curto prazo, os ajustes fornecidos pelo modelo sem a correção de não-arbitragem se mostraram melhores, captando tanto a forma da curva quanto a inclinação nesses trechos. E, em reforço ao que foi já exposto, os gráficos (8) e (9) corroboram para a hipótese de que, provavelmente, o ajuste para as taxas de curto prazo na abordagem deste trabalho foi afetada pelo fato estilizado de as taxas da estrutura a termo brasileira terem suas maturidades deslocáveis no tempo.

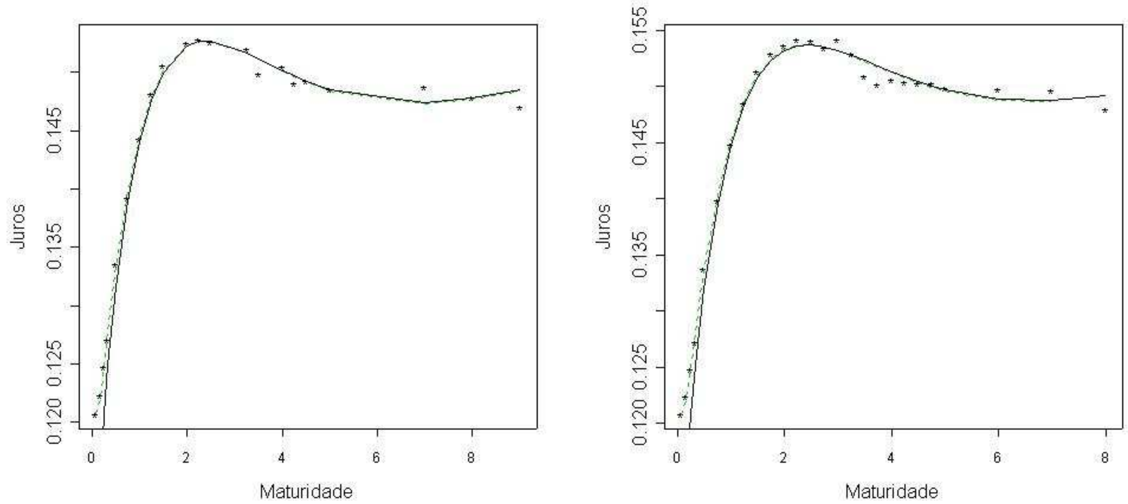


Figura 8. Ajuste dos modelos com (linha contínua) e sem (linha pontilhada) a restrição de arbitragem.

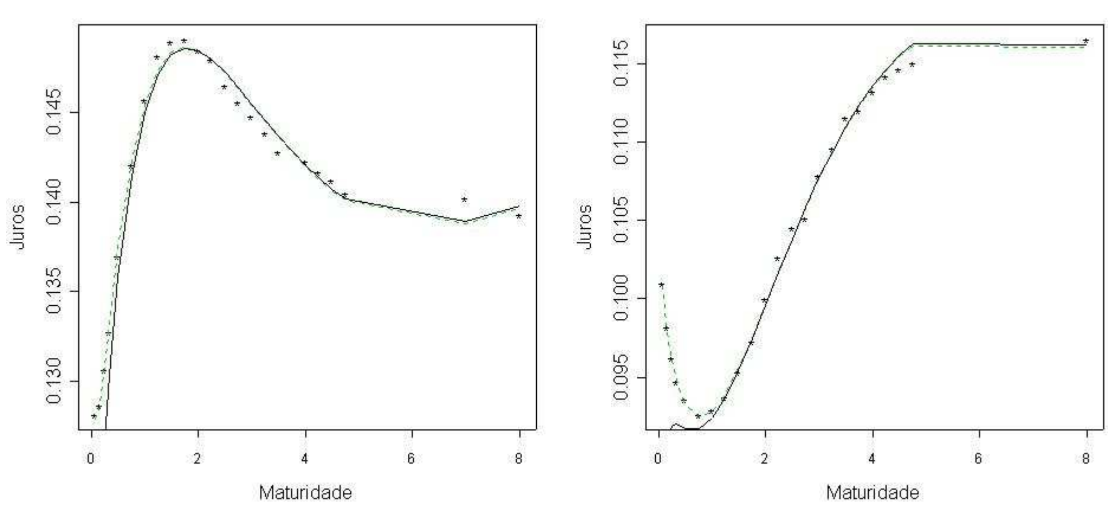


Figura 9. Ajuste dos modelos com (linha contínua) e sem (linha pontilhada) a restrição de arbitragem para tipos de curvas tipicamente presentes na estrutura a termo das taxas do contrato DI1.

7. CONCLUSÃO

O propósito deste trabalho foi o de colaborar com a modelagem da estrutura a termo das taxas de juros no Brasil. A partir da tradicional técnica de modelagem acerca do tema, escolheu-se por expandir esse modelo, adotando, assim, cinco fatores latentes para captar os movimentos da curva de juros dentro do contrato de negociação DI1. Adicionalmente, para acrescentar consistência no modelo, adicionou-se o termo de correção de não-arbitragem dentro da curva de juros, de modo a estar alinhado com a teoria das finanças.

Os resultados observados da estimação foram satisfatórios e despertaram motivação para a futura extensão do trabalho. Em linhas gerais, foi possível perceber que o modelo proposto captou o comportamento da estrutura a termo para as taxas de médio e de longo prazo, o que é uma qualidade frente a muitos dos tradicionais modelos que tornam a curva estável no ajuste para esses mesmos prazos. Entretanto, esse sucesso não é verificado no ajuste para as taxas de juros com maturidades curtas.

Com relação à evolução temporal dos cinco fatores latentes, foi possível perceber que eles refletiram as diferentes situações macroeconômicas vividas pelo País e que, conseqüentemente, por sua vez, impactaram a estrutura das taxas de juros negociadas do contrato de DI1. Em especial, chama a atenção o fato de toda a dinâmica da variação da estrutura dos juros durante a crise ter saído do fator nível, componente de longo prazo, e ter ido para os dois dos fatores de inclinação e para os dois fatores de curvatura, que são as componentes de médio e de curto prazo, respectivamente.

Por fim, quanto à percepção do ajuste gerado pelo modelo para as taxas de juros com maturidade no curto prazo, fica a suspeita de que foi deteriorado em circunstância das maturidades não serem fixas na estrutura do próprio contrato DI1, o que, aliado ao fato de os fatores de decaimento médio da curva estarem fixos, afetam a correção de não-arbitragem.

REFERÊNCIAS

CHRISTENSEN, Jens H. E.; DIEBOLD, Francis X.; RUDEBUSCH, Glenn D. An Arbitrage-Free Generalized Nelson-Siegel Term Structure Model. **Econometrics Journal**, [S.l.], v. 01, Mai. 2008. Disponível em: <http://www.frbsf.org/publications/economics/papers/2008/wp08-07bk.pdf>. Acesso em: 24 set. 2009.

DIEBOLD, Francis X. ; LI, Canlin ; YUE, Vivian Z. Global yield curve dynamics and interactions: A dynamic Nelson-Siegel approach. **Journal of Econometrics**, [S.l.], v. 146, n. 2, Out. 2008. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science?_ob=ArticleURL&_udi=B6VC0-4TB77FV-3&_user=2762348&_rdoc=1&_fmt=&_orig=search&_sort=d&view=c&_acct=C000058583&_version=1&_urlVersion=0&_userid=2762348&md5=1423bfc3f7c0ef527117b003a1e11a47 >. Acesso em: 8 abr. 2009.

DIEBOLD, Francis X.; LI, Canlin. Forecasting the term structure of government Bond yields. **Journal of Econometrics**, [S.l.], v. 130, n.2, Fev. 2006. Disponível em: <http://ideas.repec.org/a/eee/econom/v130y2006i2p337-364.html>. Acesso em: 8 abr. 2009.

DIEBOLD, Francis X.; RUDEBRUSCH, Glenn D.; AROUBA, S. B. The macroeconomy and the yield curve: a dynamic latent factor approach. **Journal of Econometrics**, [S.l.], v. 131, Mar. 2006. Disponível em: <http://papers.nber.org/papers/w10616>. Acesso em: 8 abr. 2009.

LAURINI, Márcio P.;HOTTA, Luiz K. Bayesian Extensions to Diebold-Li Term Structure Model. **IBMEC Working Paper**, [S.l.], n.120, Out. 2008. Disponível em: <http://ideas.repec.org/p/ibm/ibmecp/wpe_120.html>. Acesso em: 13 jun. 2009.

LITTERMAN, Robert; SCHEINKMAN, José. Common Factors Affecting Bond Returns. **Journal of Fix Income**, [S.I.], n.01, Jun. 1991. Disponível em: <http://www.princeton.edu/~joses/pp/Common_F.pdf>. Acesso em: 17 nov. 2009.

NELSON, Charles R.;SIEGEL, Andrew F. Parsimonious modeling of yield curves. **Journal of Business**, [S.l.], v. 60, n.4, Out. 1987. Disponível em: <http://ideas.repec.org/a/ucp/jnlbus/v60y1987i4p473-89.html>. Acesso em: 8 abr. 2009.