

**INSPER: INSTITUTO DE ENSINO E PESQUISA**

**Programa de mestrado profissional em economia**

**IMPORTÂNCIA DA MATRIZ DE COVARIÂNCIA E DA  
IDENTIFICAÇÃO DE REGIMES PARA ASSET  
ALLOCATION**

**Gabriela Saad Maluhy Arellano**

**São Paulo**

**2025**

**Gabriela Saad Maluhy Arellano**

**IMPORTÂNCIA DA MATRIZ DE COVARIÂNCIA E DA  
IDENTIFICAÇÃO DE REGIMES PARA ASSET  
ALLOCATION**

**Disertação apresentada ao Programa de  
Mestrado Profissional em Economia do  
Insper – Instituto de Ensino e Pesquisa  
como requisito parcial para a obtenção do  
título de Mestre em Economia.**

**Área de concentração: Finanças, Asset  
Allocation**

**Orientador: Prof. Ruy Monteiro Ribeiro**

**Co-orientador: Prof. Gustavo Soares**

**São Paulo**

**2025**

Arellano, Gabriela Saad Maluhy

Importância da matriz de covariância e da identificação de regimes para asset allocation

Gabriela Saad Maluhy Arellano – São Paulo, 2025

21f.

Dissertação de mestrado – Insper, 2025

Orientador: Prof. Ruy Monteiro Ribeiro

Co-orientador: Prof. Gustavo Soares

1. Asset Allocation, 2. Portfolio Choice, 3. Macroeconomic Factors, 4. Regime Switching Models

## RESUMO

Esta tese tem como objetivo investigar como o uso de um modelo de mudança de regime para adaptar a matriz de covariância para diferentes estados afeta o portfólio ótimo de um investidor brasileiro ao longo do tempo, separando períodos de alta e baixa inflação nos Estados Unidos, através de mudanças de regime observadas na correlação entre os juros longos e o mercado acionário norte-americanos. O objetivo da análise desta correlação específica é verificar quais são as implicações de considerar estas mudanças de regime para portfólios ótimos obtidos por uma otimização tipo Markowitz, que considerará premissas de retorno esperado constantes, mas uma matriz de covariância que se altera conforme muda o regime de correlação dos juros longos e mercado acionário norte-americanos. Um segundo portfólio, onde as premissas da otimização (retorno esperado, volatilidade esperada e matriz de covariância) não levam em consideração trocas de regime será feito em paralelo, para comparação com o portfólio explicado anteriormente. Este trabalho pretende contribuir para o desenvolvimento da literatura sobre modelos de asset allocation, modelos de mudança de regime, e impacto do mercado norte-americano no mercado brasileiro, em carteiras compostas majoritariamente por ativos domésticos. Os resultados corroboram a literatura de que o mapeamento de regimes macroeconômicos e adaptação do portfólio para acomodar esses diferentes estados traz retornos maiores, volatilidade menor e drawdowns menores para os portfólios.

**Palavras-chave:** Alocação de ativos, Escolha de portfólios, Fatores macroeconômicos, Modelos de mudança de regime

**Classificação JEL:** F30, G11, C32, E44

## ABSTRACT

This thesis aims to investigate how the use of a regime-switching model to adapt the covariance matrix for different states affects the optimal portfolio of a Brazilian investor over time. It separates periods of high and low inflation in the United States through regime changes observed in the correlation between long-term interest rates and the U.S. stock market. The objective of analyzing this specific correlation is to assess the implications of accounting for these regime changes in optimal portfolios obtained through a Markowitz-style optimization. This optimization assumes constant expected returns but a covariance matrix that adjusts according to changes in the correlation regime between long-term interest rates and the U.S. stock market. A second portfolio, where the optimization assumptions (expected return, expected volatility, and covariance matrix) do not consider regime shifts, will be constructed in parallel for comparison with the previously explained portfolio. This work aims to contribute to the literature on asset allocation models, regime-switching models, and the impact of the U.S. market on the Brazilian market, particularly in portfolios predominantly composed of domestic [Brazilian] assets. The results align with the literature, demonstrating that mapping macroeconomic regimes and adapting the portfolio to accommodate these different states leads to higher returns, lower volatility, and smaller drawdowns for the portfolios.

**Keywords:** Asset Allocation, Portfolio Choice, Macroeconomic Factors, Regime Switching Models

**JEL Classification:** F30, G11, C32, E44

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO</b> .....	7
<b>2. REVISÃO DE LITERATURA</b> .....	8
2.1 Modelos de asset allocation e modelos de mudança de regime .....	8
2.2 A correlação entre juros e ações nos EUA e sua relação com o ciclo econômico .....	10
<b>3. REVISÃO DOS DADOS</b> .....	11
<b>4. METODOLOGIA</b> .....	12
<b>5. RESULTADOS</b> .....	14
5.1 HMM vs correlação observada das Treasuries longas e o S&P 500 .....	14
5.2 Implicações da troca de regime na alocação dos portfólios .....	15
5.3 Métricas descritivas dos portfólios .....	16
<b>6. EXERCÍCIO DE ROBUSTEZ</b> .....	16
<b>7. TESTES ESTATÍSTICOS</b> .....	17
7.1 Comparação da volatilidade dos portfólios .....	17
7.2 Comparação do retorno dos portfólios .....	18
<b>8. CONCLUSÃO</b> .....	19
<b>9. TABELAS E GRÁFICOS</b> .....	21
<b>10. REFERÊNCIAS</b> .....	25

## 1 INTRODUÇÃO

A natureza dinâmica dos mercados financeiros exige modelos sofisticados para gerenciar e alocar ativos de forma eficaz. Modelos que assumem um ambiente de mercado estático muitas vezes não conseguem capturar as complexidades e mudanças de estado inerentes aos mercados financeiros. Para resolver essa limitação, os modelos de mudança de regime surgiram como uma ferramenta, oferecendo uma estrutura que acomoda mudanças nas condições de mercado. Esta tese tem como objetivo investigar como o uso de um modelo de mudança de regime para adaptar a matriz de covariância para diferentes estados afeta o portfólio ótimo ao longo do tempo.

Os modelos de mudança de regime permitem que diferentes conjuntos de parâmetros sejam utilizados na otimização de portfólio a depender do estado do mercado ou da economia. Esses modelos reconhecem que os mercados financeiros não operam sob um único regime constante, mas sim transitam entre diferentes estados (períodos de alta e baixa volatilidade, períodos de forte ou fraco crescimento econômico, períodos de baixa ou alta inflação, e assim por diante). Ao incorporar mudanças de regime, o modelo de otimização de portfólio passa a capturar melhor os perfis de risco-retorno dos ativos e assim aprimoraram o processo de tomada de decisão na alocação de ativos.

Esta tese irá separar períodos de alta e baixa inflação nos Estados Unidos, através de mudanças de regime observadas na correlação entre os juros longos e o mercado acionário norte-americanos. Conforme será abordado na revisão de literatura, é documentado na literatura como mudanças na correlação entre ações e títulos longos dos EUA estão associadas com mudanças no regime macroeconômico norte-americano.

O objetivo da análise desta correlação específica é verificar quais são as implicações de considerar estas mudanças de regime para portfólios ótimos obtidos por uma otimização tipo Markowitz, que considerará premissas de retorno esperado constantes, mas uma matriz de covariância que se altera conforme muda o regime de correlação dos juros longos e mercado acionário norte-americanos. Um segundo portfólio, onde as premissas da otimização (retorno esperado, volatilidade esperada e matriz de covariância) não levam em consideração trocas de regime será feito em paralelo, para comparação com o portfólio explicado anteriormente.

O portfólio sem mudança de regime será denominado SAA (structural asset allocation), enquanto o portfólio cujo modelo de mudança de regime determinou a matriz de covariância será denominado DAA (dynamic asset allocation).

O estudo será feito utilizando ativos brasileiros, pois - apesar de trata-se de uma modelagem da correlação entre ativos norte-americanos – o regime econômico e dinâmica de mercado dos EUA afetam praticamente todos os mercados do globo em maior ou menor grau, inclusive o brasileiro. E, enquanto nos EUA há diversos estudos sobre o portfólio ótimo, e a proporção ideal de títulos e ações no asset allocation, no Brasil essa literatura é escassa. Este trabalho pretende contribuir para o desenvolvimento da literatura sobre modelos de asset allocation, modelos de mudança de regime, e impacto do mercado norte-americano no mercado brasileiro, em carteiras compostas majoritariamente por ativos domésticos.

Este trabalho seguirá a seguinte estrutura: será feita uma revisão de literatura sobre modelos de asset allocation e a introdução de modelos de mudança de regime, dando enfoque aos modelos que serão utilizados na análise posterior. Em seguida, uma breve revisão dos principais trabalhos que estudam a correlação dos juros longos e mercado acionário nos EUA e sua relação com o ciclo econômico serão apresentados. Com a revisão da literatura relevante concluída, a próxima sessão traz uma apresentação dos ativos a serem incluídos na análise, com uma justificativa da base de dados escolhida e uma explicação das limitações presentes. A metodologia da análise e os resultados obtidos são apresentados em seguida, evidenciando as mudanças no portfólio decorrentes da identificação de regimes e suas consequências para o desempenho dos portfólios. Um exercício de robustez, na qual o mesmo estudo é realizado, mas para carteiras contendo apenas ativos norte-americanos, será apresentado, trazendo resultados similares ao observados na carteira otimizada com ativos brasileiros. Por fim, a conclusão do trabalho confirma que o uso de modelos de mudança de regime tem valor no processo de asset allocation.

## **2 REVISÃO DE LITERATURA**

### **2.1 Modelos de asset allocation e modelos de mudança de regime**

O artigo seminal de Harry Markowitz, "Foundations of Portfolio Theory" (1952), introduziu a Teoria Moderna de Carteiras (MPT, na sigla em inglês), que foca na otimização da alocação de ativos para maximizar os retornos em um determinado nível de risco. A ideia central é a diversificação, através da qual os investidores podem minimizar o risco do portfólio ao manter uma combinação de ativos que não tem correlação perfeita um com o outro. O modelo exige dois inputs principais: os retornos esperados e a matriz de var-covar dos ativos.

A fronteira eficiente *resampled*, proposta por Richard Michaud em 1998, é uma abordagem que busca melhorar a robustez da fronteira eficiente tradicional de Markowitz, que é bastante sensível às estimativas de retornos e covariâncias dos ativos. Michaud utiliza simulações de Monte Carlo para gerar várias versões dos dados de entrada, criando várias fronteiras eficientes. A fronteira eficiente *resampled* é obtida pela média dessas simulações, resultando em uma fronteira eficiente mais estável e representativa, que reconhece que há incerteza nos parâmetros da otimização.

Os portfólios chamados “ótimos” encontrados neste processo dependem completamente das premissas de retorno e covariância imputados na otimização, e se não forem regularmente atualizados, resultam em carteiras de investimento que são alteradas apenas para fim de rebalanceamento para os pesos obtidos na otimização.

Paralelamente, a alocação dinâmica de ativos é uma abordagem que visa ajustar recorrentemente os pesos de ativos de um portfólio em resposta às mudanças nas condições de mercado. Merton (1971), em "Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model", estabeleceu as bases teóricas para a alocação dinâmica de ativos, destacando a importância do ajuste contínuo dos portfólios para otimizar o consumo e a riqueza ao longo do tempo.

Os modelos de mudança de regime ganharam destaque com o trabalho seminal de James D. Hamilton (1989), que introduziu a abordagem de modelos Markov-switching para analisar séries temporais econômicas. O artigo "A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle" mudou a maneira como os analistas lidam com mudanças estruturais nos dados, permitindo a identificação de regimes do ciclo econômico (recessões e expansões). Este modelo reconhece que as séries temporais financeiras frequentemente exibem comportamentos diferentes a depender do regime, o que não é capturado por modelos lineares tradicionais. Hamilton (1989) utiliza cadeias de Markov para modelar mudanças de regime. O modelo de mudança de regime é feito com base em uma distribuição na qual a observação depende do estado de uma cadeia de Markov não-observável e não-conhecida, este método é conhecido como Hidden Markov Model (HMM), e Hamilton (1989) foi o primeiro artigo a aplicar este método matemático a distribuição de ativos financeiros com o objetivo de mapear regimes no mercado. Na literatura posterior, cadeias de Markov como modelador de mudanças de regime se tornaram a prática mais comum, e deverão ser utilizadas também neste trabalho.

Posteriormente, diversos estudos foram feitos utilizando o método de HMM para mapear mudanças de regimes em diversas variáveis em artigos cujos focos eram analisar o impacto de utilizar modelos de mudança de regime em acréscimo a otimização da carteira de investimentos. A maioria dos artigos foca na observação de dois regimes de volatilidade, alta e baixa, seja no mercado de títulos (como em Jun Cai 1994, que observa mudanças de regime na volatilidade das Treasuries de 3 meses) ou no mercado acionário (como em Ang e Bekaert, 2002 que analisam a volatilidade do mercado acionário de 3 países diferentes, e em Peter Nystrup et al 2018, que mapeia mudanças de regime na série de volatilidade do índice MSCI World).

Alguns artigos buscam mapear mudanças de ciclo econômico, o que pode ser feito utilizando séries temporais de indicadores macroeconômicos: Chang 2009, que utiliza o HMM em séries de taxas de juros, rendimento de dividendos e prêmio de riscos de inadimplência para modelar o comportamento do mercado acionário e Guidolin e Timmermann 2007, que utilizaram o retorno mensal das ações norte-americanas e o rendimento de dividendos destas ações para mapear quatro regimes diferentes, muito semelhantes aos quatro estados do ciclo econômico.

Em comparação com a literatura, este trabalho também deve trabalhar com cadeias de Markov não-observáveis para indicar mudanças de regime, mas não na volatilidade de ações conforme foi feito na maioria dos artigos analisados, e sim na correlação entre a Treasury de 10 anos e o índice S&P 500. Tem-se como intenção observar dois regimes diferentes: (1) a correlação do título soberano de longo prazo norte-americano está inversamente correlacionada com o índice acionário norte-americano, e (2) a correlação entre estes ativos está positiva. Foi-se escolhida esta correlação para mapear os regimes que balizarão a carteira pois os desenvolvimentos no cenário norte-americano têm repercussões para os ativos dos demais países do globo, tanto de renda fixa quanto de renda variável, tanto de países emergentes como de desenvolvidos.

## **2.2 A correlação entre juros e ações nos EUA e sua relação com o ciclo econômico**

Em seu paper sobre sazonalidade nos dados econômicos e o ciclo econômico norte-americano, Barksy (1989) menciona que o movimento conjunto de ações e títulos nos EUA é dependente de regime, e não estática como a maior parte da literatura anterior tratava esta variável. Barsky (1989) aponta que regimes de baixo crescimento da produtividade e alta volatilidade nos mercados estão associados com correlação negativa entre ações e títulos, dado

que este regime econômico traria lucros mais baixos para as empresas e taxas reais de juros mais baixas.

Lingfeld (2002) utilizou alguns tipos de regressão da correlação entre os títulos e as ações dos países do G7 com três variáveis macroeconômicas: a expectativa de inflação, a surpresa inflacionária e a taxa real de juros. O estudo descobre que a incerteza em relação a expectativa de inflação é o principal fator explicativo para a correlação entre títulos e ações. Estas conclusões são aplicadas a finanças e alocação de ativos, Lingfeld (2002) argumenta que com a correlação dependente da incerteza inflacionária, o benefício da diversificação em um portfólio com ambos os ativos fica muito reduzido nestes momentos. Construindo um portfólio de asset allocation dinâmico, Lingfeld (2002) encontrou que modelar a correlação de ações e títulos através de fatores macroeconômicos (incerteza inflacionária predominantemente relevante) e utilizar esta previsão na matriz inserida na otimização da carteira traz retorno mais alto em relação a um portfólio que utiliza a média móvel da correlação entre ações e títulos como preditor. O retorno excedente entre o portfólio desenhado e um portfólio que utiliza a média móvel foi de 0,5% ao ano.

Andersen et al (2007) estuda a reação dos mercados de títulos, ações e moedas a notícias macroeconômicas dos EUA. Uma das conclusões do artigo é de que o mercado reage diferente à mesma notícia a depende do regime econômico corrente. Para além de evidenciar a importância do regime econômico vigente para a dinâmica dos ativos, esta conclusão ajuda a mostrar como a correlação entre ações e títulos varia conforme o regime. Em recessões, o noticiário que impacta o fluxo de caixa causa impactos maiores no mercado, enquanto em momentos de expansão econômica, o noticiário sobre a taxa de desconto é mais importante.

### **3 REVISÃO DOS DADOS**

Para a construção do portfólio serão utilizados índices de mercado que são considerados benchmarks para determinadas classes de ativos. Sempre em total return, com retornos diários calculados em log. A base de dados para o estudo incluirá ativos da renda fixa brasileira e norte-americana, renda variável brasileira e norte-americana, e ouro. A alocação nos ativos que estão denominados em dólar (ativos norte-americanos e ouro) terão em seu retorno o efeito da variação cambial. Isto é, a alocação considera que, se o índice ficar estável, mas o real desvalorizar em relação ao dólar no dia, a posição trará para carteira os ganhos da exposição ao dólar.

A base de dados começa em janeiro de 2004. Na renda fixa brasileira, os índices da Anbima que servem de benchmark para posições aplicadas em títulos pré-fixados e títulos indexados à inflação (IRFM e IMA-B, respectivamente) serão utilizados. Na renda variável local, o índice Ibovespa será utilizado por ser o principal índice acionário do país. Entre os ativos norte-americanos, na renda fixa serão consideradas alocações em Treasuries e bonds corporativos, enquanto na renda variável serão considerados o S&P 500 e o Nasdaq. Ouro é a única commodity incluída na análise.

Em relação as demais classes de ativos brasileiras, a falta de índices com base diária com histórico longo limitou a inclusão de crédito privado e imobiliários. A escolha de começar em janeiro de 2004 deve-se a falta de dados para aplicação em títulos pré-fixados e títulos indexados à inflação anterior a este período. As séries mencionadas da Anbima (assim como outros índices do órgão que refletem estas mesmas classes de ativos) começam no segundo semestre de 2003.

Na tabela 1, encontra-se os tickers de acesso no terminal Bloomberg para cada um dos ativos considerados na amostra. Adicionalmente, o histórico da taxa de câmbio também foi acessado via Bloomberg, que considera o valor do câmbio no fechamento do pregão. Na mesma tabela encontram-se estatísticas descritivas (retorno anualizado e volatilidade anualizada) dos índices mencionados acima, considerando a amostra desde janeiro de 2004 até dezembro de 2023.

#### **4 METODOLOGIA**

Para estudar a importância da covariância entre os ativos e o efeito do uso de modelos de mudança de regime na correção entre títulos e ações norte-americanas na construção de um portfólio de investimentos, partiu-se da construção de dois portfólios distintos. Os portfólios são compostos dos mesmos ativos, a otimização parte do mesmo input de retorno esperado para cada ativo, a única mudança de parâmetro que gera mudança no asset allocation das carteiras é a matriz de var-covar.

No portfólio denominado SAA (para structural asset allocation, nomenclatura que implica em um portfólio que não considera regras de mudança dinâmicas de alocação), a matriz de variância dos ativos que é imputada em uma otimização de Markowitz-Michaud é atualizada trimestralmente. No portfólio denominado DAA (para dynamic asset allocation, fazendo

referência ao uso do modelo de mudança de regime como regra de alteração do asset allocation), a amostra de dados foi separada em duas, (1) momentos no qual o Hidden Markov Model indicou probabilidade maior de 50% do mercado estar no regime de correlação positiva entre a Treasury longa e o S&P 500 e (2) momentos no qual o HMM sugeria estar no regime de correlação negativa entre estes ativos. Para manter a matriz evoluindo conforme novos dados são acrescentados, como está feito o SAA, estas matrizes também são atualizadas trimestralmente.

Dessa forma, existem três matrizes de covariância sendo calculadas a cada trimestre. Uma que apenas acrescenta os dados de retornos diários dos ativos do trimestre que se encerrou e recalcula as covariâncias da amostra toda incluindo este trimestre. E outras duas que fazem o mesmo, mas concatenando os períodos separadamente a depender do regime.

Os retornos esperados que serão imputados nas otimizações estão presentes na Tabela 1. A utilização de Markowitz com uma fronteira resampled conforme Michaud evita soluções de canto na otimização, que poderiam ocorrer caso fosse utilizado somente o modelo de Markowitz e os retornos históricos. A decisão de utilizar o retorno histórico (com inclusão da incerteza nos parâmetros) ao invés de alguma estimativa de retorno esperado deve-se a alta subjetividade das projeções de retorno de ativos financeiros e entendimento de que, para fins deste estudo, com manutenção dessas expectativas de retorno constantes, o foco da análise fica na matriz de covariância.

Ambos os portfólios SAA e DAA são rebalanceados mensalmente. As trocas de regime que suscitam mudanças de alocação são apuradas a cada trimestre. O HMM considera a correlação rolling de 66 dias úteis ( $\approx 3$  meses). Os períodos no qual o HMM julgou que o regime era o da correlação positiva entre títulos e ações norte-americanos estão expostos na Tabela 2.

Um ponto importante da metodologia tanto do HMM quanto da otimização de Markowitz-Michaud é de que esta é out-of-sample. Para cada trimestre que a carteira ótima é estimada e a probabilidade do regime estimada, na construção das cotas dos portfólios SAA e DAA esses resultados são implementados no trimestre seguinte, no qual o desempenho dos ativos não era conhecido no mapeamento do regime e otimização da alocação.

Para começar a análise com uma base de dados suficientemente grande, os dados de janeiro de 2004 até dezembro de 2010 são utilizados como base para os cálculos da alocação ótima do primeiro trimestre de 2011 e identificação de qual regime está vigente no primeiro

trimestre de 2011. Estes resultados, referentes ao primeiro trimestre de 2011 são aplicados no segundo trimestre de 2011, que é quando começa a cota dos portfólios de SAA e DAA para comparação e análise principal deste trabalho.

## **5. RESULTADOS**

Esta tese tem como objetivo investigar como o uso de um modelo de mudança de regime (Hidden Markov Model) para adaptar a matriz de covariância para diferentes estados afeta o portfólio ótimo de um investidor brasileiro ao longo do tempo, separando períodos de alta e baixa inflação nos Estados Unidos, através de mudanças de regime observadas na correlação entre os juros longos e o mercado acionário norte-americanos, operando sob o entendimento de que (i) esta correlação de fato sinaliza períodos de inflação alta nos EUA, e de que (ii) a inflação nos EUA também afeta os ativos dos demais países do globo.

A apresentação dos resultados desta análise está separada em três partes, estão expostos os resultados do uso do HMM para identificar troca de regime na correlação estudada. Em seguida, na implicação que a troca de regime teve na alocação ótima estimada pela otimização de Markowitz-Michaud. E por fim, no desempenho dos portfólios em consequência dessas diferenças de alocação.

### **5.1 HMM vs correlação observada das Treasuries longas e o S&P 500**

O modelo de Hidden Markov tem como base a série histórica da correlação de 66 dias úteis das Treasuries longas com o S&P 500, é uma autocorrelação de ordem 1 desta correlação que supõe que existem apenas 2 regimes nesta correlação, e por máxima verossemelhança o modelo entrega a probabilidade de estar em um regime ou em outro. Para fins de análise, é considerado que se a probabilidade entregue pelo modelo é maior do que 50%, houve troca para o regime de correlação positiva (a correlação é negativa em grande parte da amostra, com poucos momentos de correlação positiva).

Por desenho, o uso deste modelo tem dois tipos de erro, o modelo pode identificar que o trimestre atual está em um regime de correlação positiva, quando o dado observado mostra que a correlação naquele trimestre estava negativa, chamaremos esse de “erro do tipo 1”, ou o modelo não identificar uma troca de regime que nos dados observados ocorreu, erro que chamaremos de “erro do tipo 2”. Ambos os erros neste caso devem ser levados em consideração, ambos acarretam no trimestre ser mal-classificado e o período consequentemente

ser imputado na base de dados errada e assim, progressivamente as matrizes de var-covar que devem ter apenas períodos de correlação positiva e apenas correlação negativa tem em sua composição períodos que foram erroneamente classificados.

Observando os erros ao longo da amostra, praticamente todas as vezes em que o modelo errou foi em um trimestre próximo de uma mudança. Os períodos onde os erros foram mais prolongados foram (i) entre 2013 e 2014, quando a correlação estava oscilando próximo de zero e trocando de sinal frequentemente e (ii) durante o segundo semestre de 2022, quando a correlação saiu de patamar negativo e sobe rapidamente para território positivo, mas o modelo só cria probabilidade de troca de regime maior de 50% no início de 2023. Isso dito, na maior parte do tempo o modelo se mostra adequado, o período no qual o modelo indicou o regime correto corresponde há 82% da amostra. No gráfico 2, fica disponível o histórico da correlação de 66 dias úteis das Treasuries longas com o S&P 500, com marcação nos momentos em que o HMM identificou probabilidade maior do que 50% de que o regime era de correlação positiva, e os momentos de erro de tipo 1 e 2.

## **5.2 Implicações da troca de regime na alocação dos portfólios**

Conforme esperado, tendo em consideração os retornos históricos utilizados como premissa de retorno futuro na otimização, a alocação em classes de ativos cuja relação risco retorno foi ruim nos últimos anos permanece baixa ao longo de toda a amostra em ambos os portfólios. Também vale menção o fato da otimização de ambas as carteiras terem sido feitas para uma volatilidade de 7% ao ano, o que leva a alocação em ativos de menor volatilidade como o IMA-B 5 e o IRFM a dominarem a maior parte das carteiras. Previsivelmente, a exposição ao mercado norte-americano dadas pela otimização são majoritariamente no índice de Corporate Bonds e no índice Nasdaq, que para a amostra analisada, tem os melhores sharpes entre os ativos norte-americanos considerados nesta análise. As alocações resultantes das otimizações trimestrais de ambos os portfólios estão expostas nos gráficos 2 e 3.

Se aprofundando nas mudanças na alocação das carteiras observadas em decorrência da influência do mapeamento dos regimes de inflação sobre a matriz de var-covar, isto é, analisando apenas a alocação dos portfólios nos trimestres em que a otimização está considerando a matriz construída concatenando os períodos que o HMM indicou como sendo de correlação positiva entre as Treasuries longas e o S&P 500, vemos que há movimento de redução de risco, com redução da exposição ao IMA-B 5 e aumento da exposição ao IRFM, que é um índice de duration menor e volatilidade menor. Há, conforme esperado, uma redução

da exposição às Treasuries, que por terem perdido sua característica de hedge, não mais agregam ao portfólio. A alocação nas demais classes de ativos tiveram mudanças de menor magnitude.

### 5.3 Métricas descritivas dos portfólios

Considerando primeiro a amostra como um todo, o desempenho do portfólio DAA é superior em retorno, menor em volatilidade, melhor em sharpe e melhor em tamanho do max drawdown em relação ao portfólio SAA. A diferença nas métricas de avaliação mencionadas acima são pequenas, reflexo principalmente do fato de que a alocação de ambas as carteiras é muito concentrada nos mesmos ativos. Ambas as carteiras acumulam retorno acima do benchmark livre de risco (CDI) no período. A cota dos portfólios está disponível no gráfico 4 e as estatísticas descritivas na tabela 2.

Avaliando apenas os trimestres onde o HMM indicou mais provável o regime de inflação alta, o portfólio DAA teve retorno acima do SAA em 64% do tempo, com retorno excedente trimestral anualizado de em média 49 pontos-base. Na amostra completa, ou seja, considerando também a maior parte do tempo no qual os Estados Unidos estiveram em regime de inflação baixa e com a correlação entre as Treasuries longas e o S&P 500 negativa, a vantagem do portfólio que mapeia os regimes e altera a alocação de acordo é em média de 19 pontos base por ano. A dispersão do retorno excedente em cada trimestre do DAA em relação ao SAA está exposta no gráfico 5.

## 6. EXERCÍCIO DE ROBUSTEZ

Fazendo a mesma análise para uma carteira apenas de ativos norte-americanos, elimina-se a ideia de transmissão do ciclo econômico norte-americano para a dinâmica dos ativos brasileiros. A carteira otimizada pela mesma metodologia, com premissas de retorno estáveis (iguais ao retorno histórico) e volatilidade esperada de 7% ao ano, encontra portfólios também bastante concentrados em renda fixa: A alocação em Treasuries longas e em títulos de crédito privado de empresas de High Yield compõem a maior parte das carteiras tanto do DAA quanto do SAA. A alocação desses portfólios, que consideram apenas os índices já mencionados do mercado norte-americano, estão expostas nos gráficos 6 e 7. No gráfico 8, o desempenho histórico dos portfólios está disponível, e na tabela 3, as métricas de retorno, volatilidade, sharpe

e drawdown. Novamente, o portfólio DAA é ligeiramente superior ao SAA em retorno e volatilidade. No entanto, o max drawdown é ligeiramente maior.

Observando apenas a alocação dos portfólios nos trimestres em que a otimização está considerando a matriz construída concatenando os períodos que o HMM indicou como sendo de correlação positiva entre as Treasuries longas e o S&P 500, vemos que há movimento significativo de redução da exposição às Treasuries. Em menor magnitude, há redução também em todos os outros ativos, com o único ativo que aumenta de alocação sendo os bonds de high yield.

Por fim, avaliando apenas estes trimestres, o portfólio DAA teve retorno acima do SAA em 64% do tempo, com retorno excedente trimestral anualizado de em média 91 pontos-base. Na amostra completa, ou seja, considerando também a maior parte do tempo no qual os Estados Unidos estiveram em regime de inflação abaixo e com a correlação entre as Treasuries longas e o S&P 500 negativa, a vantagem do portfólio que mapeia os regimes e altera a alocação de acordo é em média de 27 pontos base por ano. A dispersão do retorno excedente em cada trimestre do DAA em relação ao SAA está exposta no gráfico 9.

## **7. TESTES ESTATÍSTICOS**

Na análise de portfólios de investimento, a aplicação de testes estatísticos para avaliar a diferença entre métricas descritivas dos portfólios (como o retorno e a volatilidade) dá maior credibilidade e precisão as conclusões. No caso desta tese, onde os portfólios são bastante similares em virtude das otimizações ter sido feitas utilizando as mesmas premissas de retorno, as diferenças observadas nas métricas descritivas são marginais, indicando ainda mais o valor que testes estatísticos devem ter para a formação de conclusões. Para a comparação de volatilidades, será utilizado o Teste F. Para a comparação do retorno, o teste-t será utilizado. Ambos estes testes são amplamente utilizados na literatura com essa finalidade.

### **7.1 Comparação da volatilidade dos portfólios**

O teste F foi desenhado para comparar as variâncias de duas populações e pode ser utilizado para avaliar se a diferença na volatilidade observada nos portfólios SAA e DAA é estatisticamente significativa. A hipótese zero do teste é de que a variância das duas populações é igual, a hipótese alternativa é que variância das populações não é igual. A estatística F é

calculada utilizando a razão entre a variância dos dois portfólios, conforme:  $F = \frac{s_{SAA}^2}{s_{DAA}^2}$ , na qual  $s_{SAA}^2$  é a variância do portfólio SAA e  $s_{DAA}^2$  é a variância do portfólio DAA. Usando a tabela de distribuição  $F$ , encontra-se o valor crítico para o nível de significância escolhido (neste caso 5%) e para um valor  $F$  acima do valor crítico, rejeita-se a hipótese nula.

Considerando a amostra inteira, o resultado do teste mostrou que a queda da volatilidade anualizada (de 2,91% no SAA para 2,82% no DAA) é estatisticamente significativa para um nível de significância de 5%. Para os portfólios SAA e DAA construídos no exercício de robustez, que considera apenas ativos norte-americanos, não foi encontrada significância estatística para o mesmo nível de significância.

Considerando apenas os trimestres em que a otimização está considerando a matriz construída concatenando os períodos que o HMM indicou como sendo de correlação positiva entre as Treasuries longas e o S&P 500 – o que como vimos, levou a uma redução da alocação no índice de renda fixa de duration mais longo e aumento do índice de renda fixa de duration mais curta – em todos os trimestres o teste  $F$  rejeitou a hipótese nula, ou seja, a mudança de volatilidade observada entre os portfólios nesses trimestres é significativa.

Para os portfólios de SAA e DAA construídos só com ativos norte-americanos, onde o Teste  $F$  não rejeitou a hipótese nula quando considerada a amostra inteira, a análise exclusiva dos trimestres referentes ao regime de inflação alta trouxe a rejeição da hipótese nula em 30% do tempo. A mudança de alocação foi observada nesses trimestres era a redução da exposição em todos os ativos excepto bonds de high yield.

## 7.2 Comparação do retorno dos portfólios

O teste  $t$  é empregado para comparar as médias de duas populações independentes e verificar se a diferença entre elas é estatisticamente significativa. Esse teste é uma ferramenta apropriada e amplamente utilizada para comparar os retornos médios de diferentes portfólios de investimentos. A hipótese nula do teste  $t$  afirma que as médias são iguais, enquanto a hipótese alternativa sugere que elas são diferentes. O cálculo do estatístico  $t$  envolve as médias dos retornos diários, ajustadas pela variabilidade e pelo tamanho das amostras, conforme:

$$t = \frac{\bar{X}_{SAA} - \bar{X}_{DAA}}{\sqrt{\frac{s_{SAA}^2}{n_{SAA}} + \frac{s_{DAA}^2}{n_{DAA}}}}$$

Onde,  $\bar{X}$  é a média dos retornos diários de cada portfólio,  $s^2$  é o desvio padrão de cada portfólio e  $n$  é o número de observações da amostra. Usando a tabela de distribuição  $t$ , encontra-se o valor crítico para o nível de significância (neste caso 5%) e para um valor  $t$  acima do valor crítico, rejeita-se a hipótese nula. É importante lembrar que, como vimos na sessão anterior, os portfólios tem variâncias estatisticamente diferentes, por tanto, deve-se usar a fórmula de Welch para obter os graus de liberdade aproximados.

Conforme esperado de portfólios que foram construídos com premissas de retornos estáveis para as classes de ativos que os compõem, e conseqüentemente alocações semelhantes em boa parte do tempo e alterações de alocação que são suscitadas por mudanças na correlação entre os ativos, o teste t-pareado para comparar os retornos dos portfólios SAA e DAA (tanto no caso das carteiras de ativos brasileiros e norte-americanos, quanto nas carteiras exclusivamente de ativos norte-americanos) confirmou a hipótese nula de que os retornos são estatisticamente iguais.

## 8. CONCLUSÃO

A presente tese investigou o impacto da utilização de um modelo de mudança de regime na matriz de covariância sobre a construção e desempenho de portfólios ótimos. Os resultados demonstram que o uso de um modelo dinâmico de alocação (DAA), com base no Hidden Markov Model (HMM) para identificar regimes de inflação nos EUA, trouxe benefício de redução de risco para carteiras de ativos brasileiros e norte-americanos, quando comparada a um modelo estrutural (SAA) que não adota regras de mudança de alocação dinâmicas.

A metodologia empregada permitiu uma análise robusta, com atualizações trimestrais da matriz de covariância, rebalanceamento mensal dos portfólios e uma implementação out-of sample dos resultados obtidos no HMM. Apesar de erros ocasionais do modelo na identificação de regimes, especialmente em momentos de transição, o HMM apresentou um bom desempenho geral, se mostrando uma forma adequada de mapear regimes em séries temporais financeiras.

Em termos de alocação, o portfólio DAA apresentou ajustes coerentes com as mudanças nos regimes de correlação. Durante períodos de correlação positiva entre as Treasuries longas e o S&P 500, observou-se uma redução na exposição ao IMA-B 5, em favor do IRFM, devido a volatilidade menor do índice de pré-fixados. Além disso, a perda da função de hedge das

Treasuries nesses períodos resultou em uma menor alocação nesse ativo, conforme era o esperado.

Considerando a amostra completa, o portfólio DAA apresentou menor volatilidade e melhor índice de Sharpe em relação ao SAA. O teste F realizado confirma a significância estatística dessa redução de volatilidade. Ademais, durante períodos de alta inflação nos Estados Unidos, o DAA obteve retorno trimestral anualizado excedente médio de 49 pontos-base e outperformance em relação ao SAA em 64% desses períodos. Isso dito, algumas ressalvas são importantes de notar: (i) a alta concentração em ativos similares torna as diferenças entre os portfólios menor, (ii) a predominância de períodos de inflação baixa na amostra limita a confiabilidade da outperformance do DAA em relação ao SAA nestes períodos e (iii) na amostra como um todo, a diferença de retorno não foi considerada significativa pelo teste t realizado. Estas ressalvas ajuda a responder a pergunta alvo da tese sobre a importância da matriz de covariância e da identificação de regimes para o processo de asset allocation: a importância é majoritariamente no risco, na volatilidade, da carteira. Ainda que tenha sido promissor observar que o retorno acumulado dos portfólios DAA (de ativos brasileiros e norte-americanos e exclusivamente de ativos norte-americanos) foi nominalmente maior.

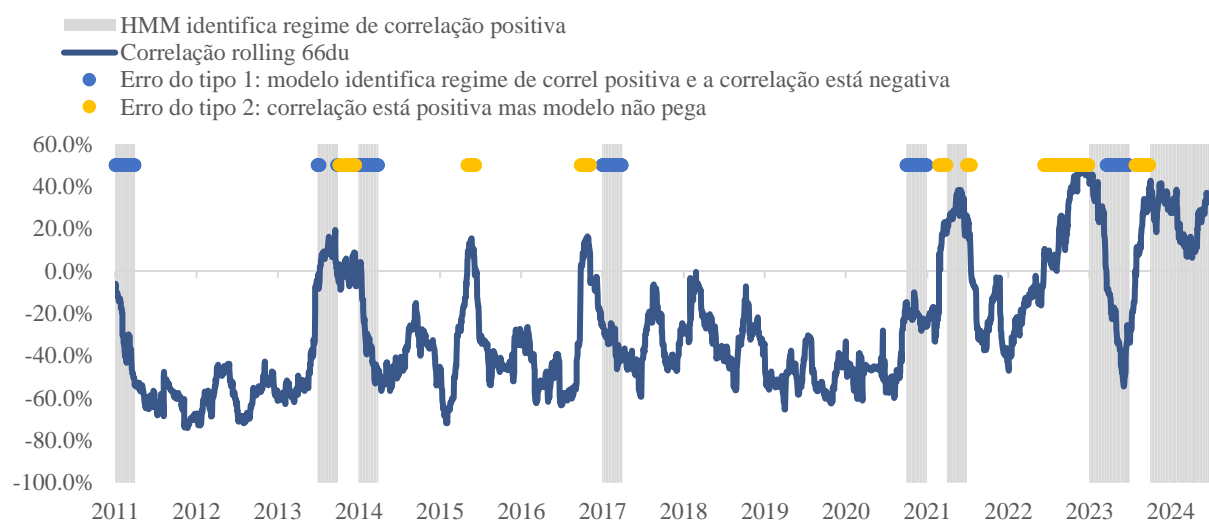
Este trabalho contribui para a literatura de alocação de ativos ao demonstrar os benefícios práticos de incorporar mudanças de regime na construção de portfólios, em especial por ter sido feito com ativos brasileiros, acrescentando à atualmente bastante limitada lista de artigos sobre asset allocation no Brasil. Além disso, destaca-se o impacto das condições macroeconômicas norte-americanas sobre investidores brasileiros. As descobertas sugerem que a adaptação a diferentes regimes pode ser uma estratégia eficaz para melhorar o desempenho de portfólios, especialmente em contextos de incerteza econômica global. Pesquisas futuras poderiam explorar aplicações adicionais do modelo de mudança de regime, incluindo outras classes de ativos e condições macroeconômicas, bem como avaliar o impacto de diferentes horizontes temporais na performance dos portfólios.

## 9. TABELAS E GRÁFICOS

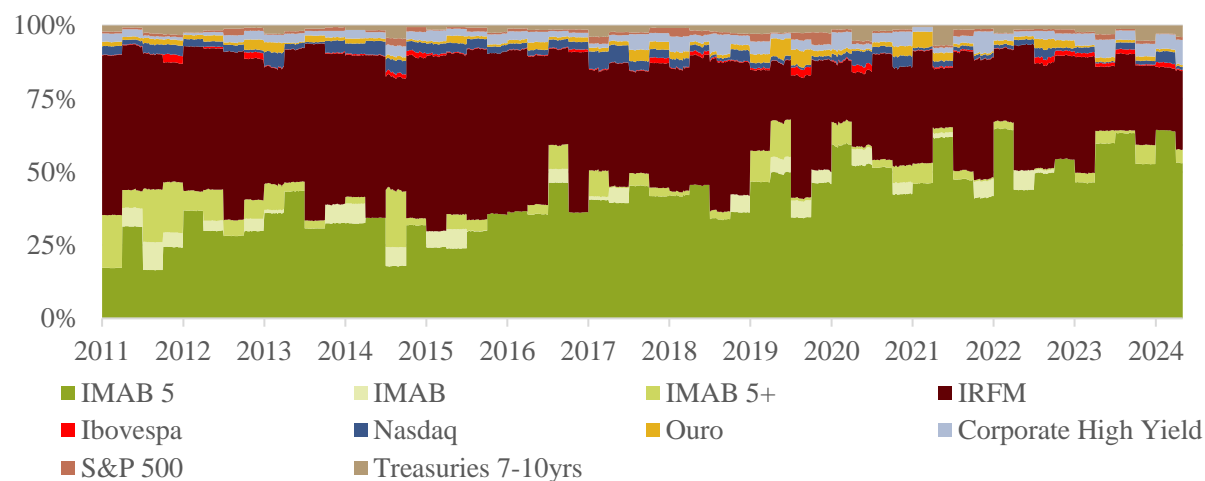
**Tabela 1**

Ativo	Ticker de acesso no terminal Bloomberg	Descrição	Retorno histórico anualizado (%)	Volatilidade anualizada (%)
IMAB 5	BZRFIMB5 Index	Titulos indexados à inflação - duration curta	12.55	2.76
IMAB	BZRFIMAB Index	Titulos indexados à inflação	13.07	6.45
IMAB 5+	BZRFIB5+ Index	Titulos indexados à inflação - duration longa	13.69	9.73
IRFM	BZRFIRFM Index	Titulos pré-fixados (duration curta)	11.97	3.03
Ibovespa	IBOV Index	Renda variável local	5.49	26.44
Nasdaq	XNDX Index	Renda variável norte-americana	14.08	21.96
Ouro	BCOMGCTR Index	Commodity metálica	7.50	22.16
Corporate High Yield	LF98TRUU Index	Titulos corporativos de high yield	7.98	15.81
S&P 500	SPXT Index	Renda variável norte-americana	10.44	19.24
Treasuries 7-10yrs	LT09TRUU Index	Titulos pré-fixados norte-americanos (duration longa)	4.39	17.96

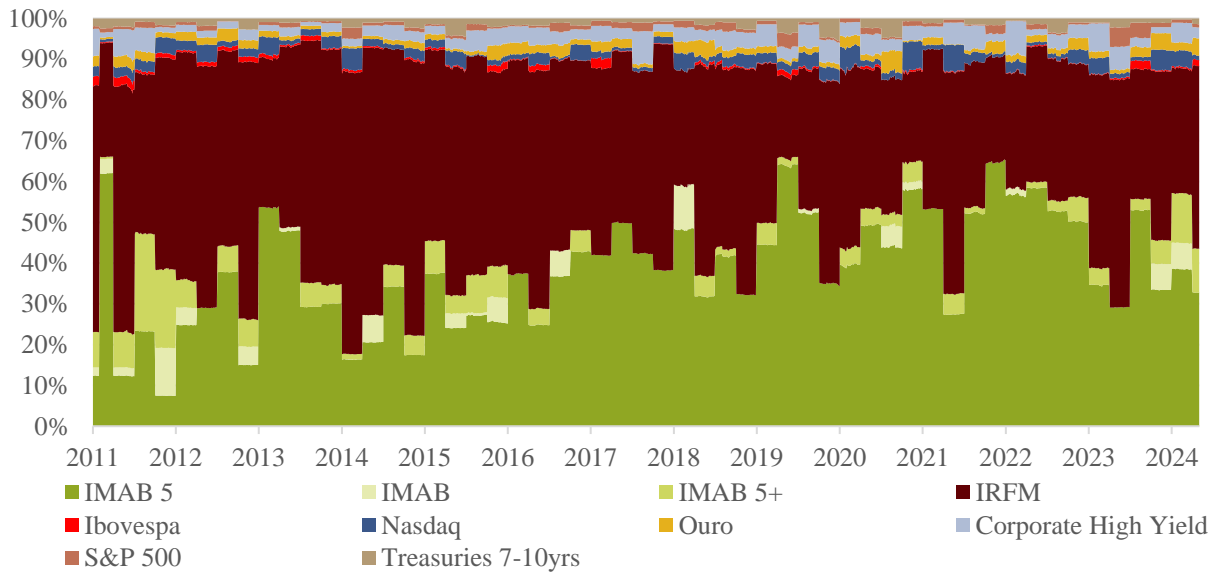
**Gráfico 1: Correlação das treasuries longas e do S&P 500 e modelo de Hidden Markov**



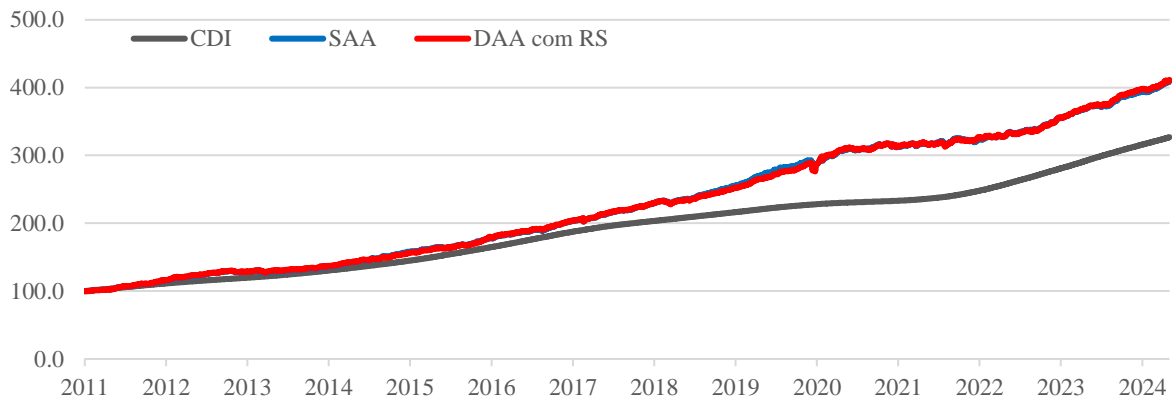
**Gráfico 2: Alocação ao longo do tempo do portfólio SAA**



**Gráfico 3: Alocação ao longo do tempo do portfólio DAA**



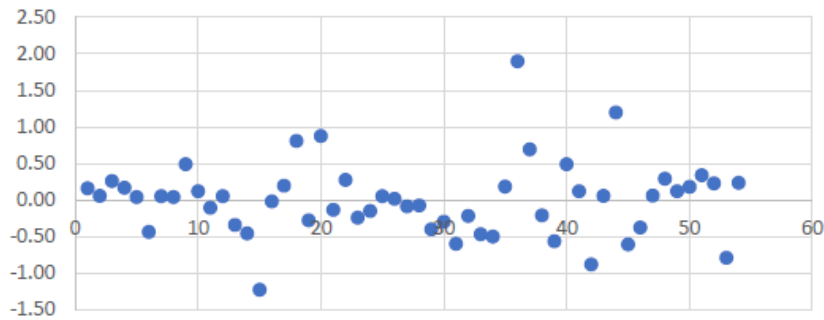
**Gráfico 4: Desempenho dos portfólios SAA e DAA**



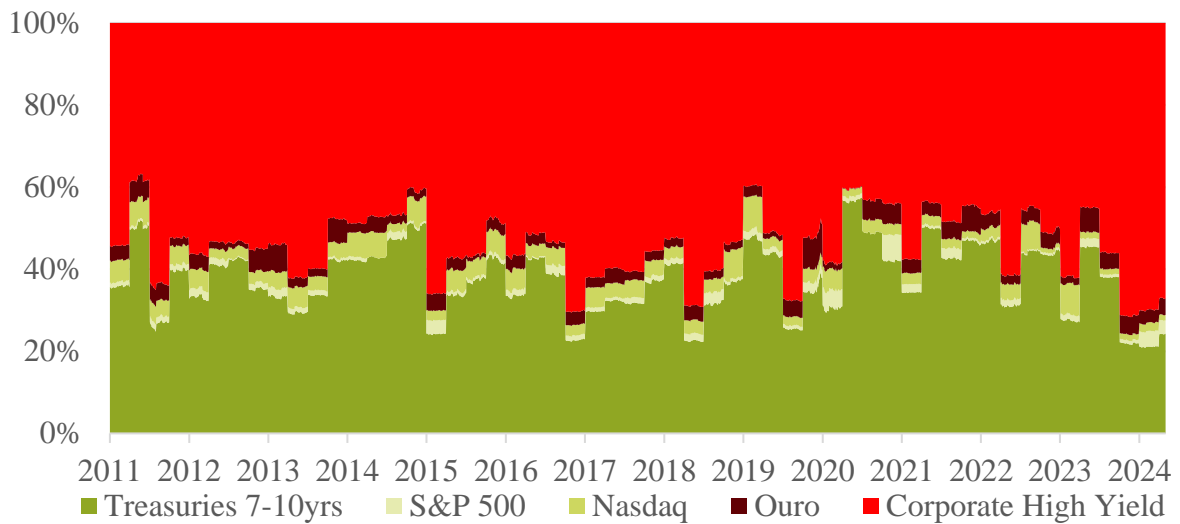
**Tabela 2: Métricas descritivas dos portfólios SAA e DAA**

	DAA	SAA	CDI
<b>Ret acumulado</b>	311%	310%	227%
<b>Ret anualizado</b>	11.49%	11.46%	9.5%
<b>Vol anualizada</b>	2.8%	2.9%	
<b>Max DD</b>	-4.5%	-5.6%	
<b>Sharpe</b>	0.70	0.66	

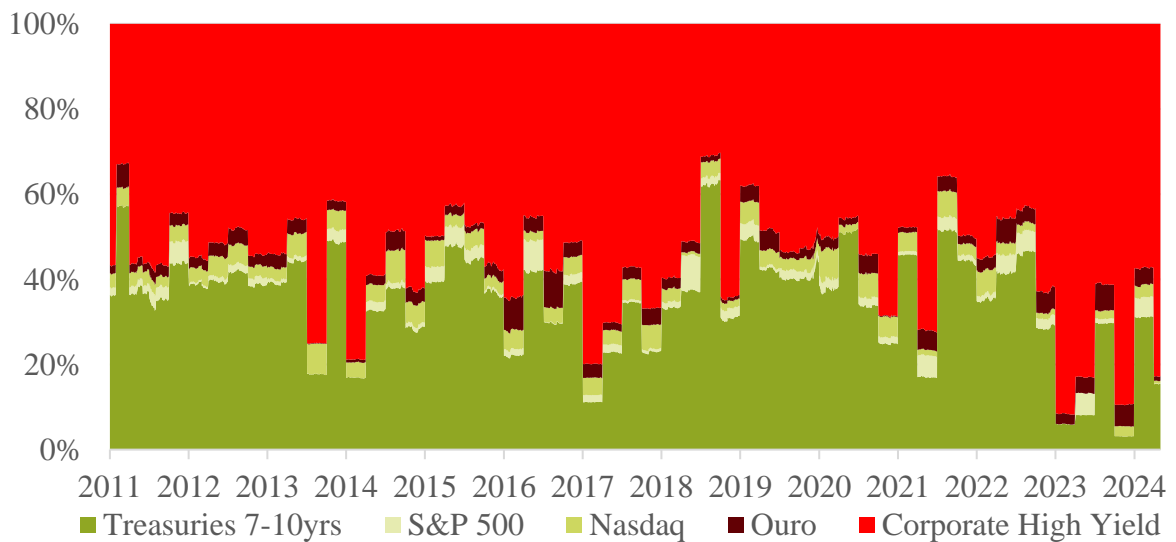
**Gráfico 5: Diferença no retorno trimestral do portfólio DAA para com o portfólio SAA a cada trimestre**



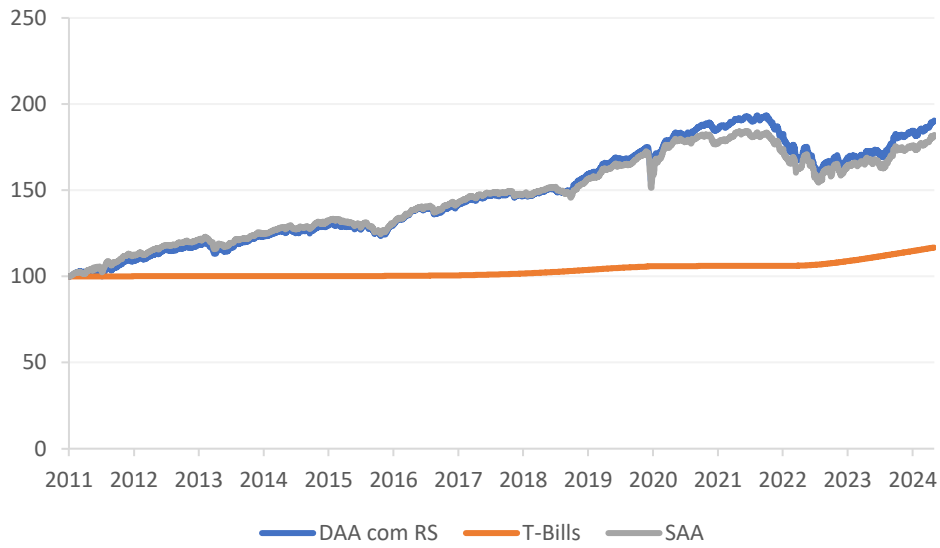
**Gráfico 6: Alocação ao longo do tempo do portfólio SAA de ativos norte-americanos**



**Gráfico 7: Alocação ao longo do tempo do portfólio DAA de ativos norte-americanos**



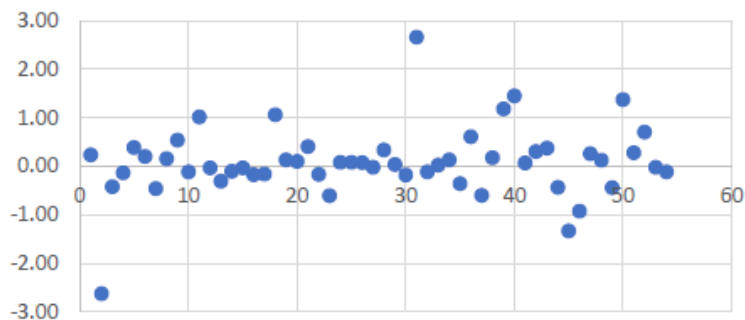
**Gráfico 8: Desempenho dos portfólios SAA e DAA apenas com ativos norte-americanos**



**Tabela 3: Métricas de avaliação dos portfólios SAA e DAA de ativos norte-americanos**

	DAA com RS	SAA	T-Bills
Ret acumulado	90%	82%	17%
Ret anualizado	5.08%	4.71%	1.2%
Vol anualizada	3.9%	4.0%	
Max DD	-18.2%	-16.2%	
Sharpe	0.99	0.88	

**Gráfico 9: Diferença no retorno trimestral do portfólio DAA para com o portfólio SAA a cada trimestre nas carteiras que consideram apenas ativos norte-americanos**



## 9 REFERÊNCIAS

- MARKOWITZ, Harry. **Foundations of Portfolio Theory**. The journal of finance. vol 46(2), p.469-477. Junho de 1991
- MICHAUD, Richard. **Efficient asset management**. Practical Guide to Stock Portfolio Optimization and Asset Allocation. Harvard Business School Press. 1998
- MERTON, Robert. **Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-time Model**. Stochastic optimization models in finance, Massachusetts Institute of Technology, ed. 58, Agosto 1970
- HAMILTON, James. **A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle**. Econometrica: Journal of the econometric society, 357-384. Março de 1989.
- CAI, Jun. **A Markov Model of Switching-Regime ARCH**. Journal of Business & Economic Statistics. vol 12(3), p. 309-316. 1994
- ANG, Andrew; BEKAERT, Geert. **International Asset Allocation with Regime Shifts**. The Review of Financial Economics, Cambridge, Massachusetts, vol 15(4), p.1137-1187. Julho 2002.
- NYSTRUP, Peter; et al. **Dynamic Allocation or Diversification: A Regime-Based Approach to Multiple Assets**. Journal of Portfolio Management, vol 44, nr 2, p.62-73. 2018.
- CHANG, Kuang-Liang. **Do macroeconomic variables have regime-dependent effects on stock return dynamics? Evidence from the Markov regime switching model**. Economic Modelling. Vol 26(6). P.1283-1299. Novembro de 2009.
- GUIDOLIN, Massimo; TIMMERMANN, Allan. **Asset Allocation under Multivariate Regime Switching**. Journal of Economic Dynamics and Control. St. Louis, vol 31 (11), p. 3503-3544. 2007
- BARKSY, Robert ; MIRON, Jeffrey. **The seasonal cycle and the business cycle**. Journal of Political Economy. Vol 97(3). p.503-534. Junho de 1989
- LINGFENG, Li. **Macroeconomic factors and the correlation of stocks and bond returns**. Yale ICF. Disponível em SSRN 363641. Novembro de 2002

ANDERSEN, Torben G. et all. **Real-time price discovery in global stock, bond and foreign exchange markets**. Journal of International Economics. Vol 73(2). P.251-277. Novembre de 2007.