Insper Instituto de Ensino e Pesquisa
Programa de Mestrado Profissional em Economia

Vinicius Santos Hilbert

RISCO DE TAXAS DE JUROS EM OPERAÇÕES DE CERTIFICADO DE DEPÓSITO BANCÁRIO INDEXADAS

São Paulo
2013

Vinicius Santos Hilbert

Risco de taxas de juros em operações de Certificado de Depósito Bancário indexadas

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Economia do Insper Instituto de Ensino e Pesquisa, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Economia.

Área de concentração: Finanças e Macroeconomia Aplicadas
Orientador: Prof. Dr. Marcelo Leite de Moura e Silva – Insper

São Paulo
2013

Hilbert, Vinicius Santos
Risco de taxas de juros em operações de Certificado de Depósito Bancário indexadas / Vinicius Santos Hilbert; orientador: Marcelo Leite de Moura e Silva - São Paulo: Insper, 2013.
36 f.

Dissertação (Mestrado – Programa de Mestrado Profissional em Economia. Área de concentração: Finanças e Macroeconomia Aplicadas) – Insper Instituto de Ensino e Pesquisa.

1. Risco de taxas de juros 2. *Hedge* 3. Certificado de Depósito Bancário

FOLHA DE APROVAÇÃO

Vinicius Santos Hilbert
Risco de taxas de juros em operações de Certificado de Depósito Bancário indexadas

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Economia do Insper - Instituto de Ensino e Pesquisa, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Economia.

Área de concentração: Finanças e Macroeconomia Aplicadas

Aprovado em: Fevereiro/2013

Banca Examinadora

Prof. Dr. Marcelo Leite de Moura e Silva
Orientador

Instituição: Insper Assinatura: _____

Prof. Dr. Michael Viriato Araujo

Instituição: Insper Assinatura: _____

Prof. Dr. Fernando Nascimento de Oliveira

Instituição: Banco Central do Brasil Assinatura: _____

RESUMO

HILBERT, Vinicius Santos. **Risco de taxas de juros em operações de CDB indexadas ao DI.** 2011. 40 f. Dissertação (Mestrado) – Insper Instituto de Ensino e Pesquisa, São Paulo, 2013.

O Certificado de Depósito Bancário (CDB) é um instrumento de aplicação de recursos bastante comum no mercado brasileiro. O presente estudo investiga o risco de taxa de juros associado ao tipo mais comum de CDB, o indexado às taxas médias de Depósitos Interfinanceiros (DI) de um dia, cuja de remuneração é diferente de 100%. Uma vez definido o risco de taxa de juros ao qual a operação está sujeita, uma carteira hipotética de CDB é simulada para o período de julho de 2011 a outubro de 2011. Para esse período contratos derivativos de DI – Futuro são utilizados de forma a mitigar os riscos apresentados. Observa-se que para uma carteira com convexidade positiva há benefícios de se rebalancear o *hedge* de maneira dinâmica.

Palavras-chave: Risco de taxas de juros; *Hedge*; Certificado de Depósito Bancário

ABSTRACT

HILBERT, Vinicius Santos. **Risco de taxas de juros em operações de CDB indexadas ao DI Interest rate risk in CDB indexed to DI .** 2011. 40 f. Dissertation (Mastership) – Insper Instituto de Ensino e Pesquisa, São Paulo, 2013.

The Certificate Deposit (CDB) is a common instrument to invest funds in the brazillian market. The present work investigate the interest rate risk associated to the most common type of CDB, the indexed to the average interbank market rate (DI) overnight whose remuneration in different from 100%. Once defined the interest rate risk it is subjected to, a hypothetic CDB portfolio is simulated in a period from July 2011 to august 2011. For this period, derivative contract named DI – Futuro are used in order to mitigate the presented risks. We conclude that for a portfolio with a positive convexity there are benefits from rebalancing the hedge dynamically.

Keywords: Interest rate risk; Hedge; Certificate Deposits

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Resumo das exposições em taxas prefixadas 18
Tabela 2 – Estoque de ativos registrados na CETIP - valores de 15/10/2012 19
Tabela 3 – Estoque de CDBs registrados na CETIP - valores de 15/10/2012 20
Tabela 4 – Estoque de CDBs registrados na CETIP - valores de 15/10/2012 25
Tabela 5 – Contratos futuros do dia 11/10/2012 29
Tabela 6 – Contrato DI – Futuro – Resumo do Contrato 29
Tabela 7 – Exposição prefixada de um CBD DI com θ igual a 90% 30
Tabela 8 – Exposição prefixada do CDB DI de acordo com o percentual do DI. 31
Tabela 9 – Carteira de CDBs selecionados. 32
Tabela 10 – Carteira selecionada e cálculo da *duration* com data base 01/07/2011 33
Tabela 11 – *Duration* do Contrato DI- Futuro 34
Tabela 12 – Desempenho da carteira dados movimentos paralelos na curva de juros. 35
Tabela 13 – Análise da Convexidade da carteira 36
Tabela 14 – Análise da *Duration* e Convexidade da carteira. 36
Tabela 15 – Variação da carteira dia-a-dia. 37

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Evolução das taxas de juros no Brasil – Taxa DI 17
Figura 2 – Rentabilidade das carteiras de mercado e da carteira proposta. 18
Figura 3 – *Duration* e Convexidade 39

SUMÁRIO

1 Introdução 9

2 O Mercado Brasileiro 13
2.1 A Representatividade do CDB DI 13
2.2 O Contrato DI – Futuro 15
2.3 Valor Atualizado do CDB DI 18
2.4 Valor Futuro e Valor de Mercado do CDB DI 20
2.5 Regulamentação 21

3 Risco de Taxas de Juros 22
3.1 Carteira de CDB DI 22
3.2 *Duration* e Convexidade 24
3.3 Aplicação de *Duration* e Convexidade 26

4 Base de Dados e Resultados 31

5 Conclusão 33

Referências 34

Apêndice 35

1 INTRODUÇÃO

O Certificado de Depósitos Bancário (CDB) é de acordo com definição do Cosif [1]:

> Certificado de Depósito Bancário é um título negociável emitido por bancos comerciais, de desenvolvimento, de investimento e múltiplos representativos de depósito a prazo. A taxa de juros geralmente é prefixada e o pagamento dos juros pode ser mensal, mas, o normal é que o pagamento seja efetuado na data de resgate (vencimento) do título. Por força do disposto na Lei 8.021/1990 e no artigo 19 da Lei 8.088/1990, os certificados são nominativos aos respectivos depositantes e escriturais (Lei 10.214/2001), custodiados na CETIP – Câmara de Custódia e Liquidação, razão pela qual a negociação dos certificados no mercado de balcão só pode ser feita mediante a intermediação de instituição financeira e do sistema distribuidor de títulos e valores mobiliários autorizada a funcionar pelo Banco do Brasil.

A despeito da definição apontada acima, o CDB representa para os bancos fonte de captação de recursos longo prazo com implicações importantes para a gestão de liquidez, comercial e regulatória da instituição. Já para as empresas o CDB representa um instrumento importante na gestão de suas aplicações. Uma das características do CDB é a flexibilidade com relação a prazo, prazo de carência e indexadores oferecidos. Por exemplo, é possível aplicar recursos em um CDB com vencimento em 721 dias corridos, porém, com um prazo de carência de 30 dias corridos. Na prática, isso significa que a empresa contará com os recursos aplicados em 30 dias corridos, porém, com a garantia da rentabilidade acordada por mais 691 dias corridos.

Entre as operações de CDB, a mais significativa é a conhecida como CDB DI que responde por cerca de 94% do total. O CDB DI é remunerado de acordo com o acúmulo das taxas médias de DI-Over extra-grupo calculadas e divulgadas pela CETIP. Tal remuneração é negociada com base em um percentual da taxa DI. De acordo com Securato (2000), a Taxa DI, bem como o seu derivativo imediato, o DI – Futuro, é considerada a taxa livre de risco da economia nacional. É, portanto o *benchmark* de taxas de juros no Brasil e exerce papel semelhante ao da LIBOR nos mercados externos. Dessa forma, o CDB DI é tido como um título que não apresenta risco de taxas de juros, ou seja, variações nas taxas de juros a termo não influenciam o valor de mercado do título. No entanto, a afirma cão é falsa.

Por exemplo, nas operações de CDB DI a acumulação diária das taxas é responsável pela remuneração do valor de principal investido. Assim, o risco associado às operações indexadas ao CDI existe quando o percentual de remuneração é diferente de 100%, pois:

---

[1] Portal de contabilidade: www.cosif.com.br

$$P(t,T;\theta) = NV_t.\frac{\left\{\left[(1+i(t,T))^{\frac{1}{252}}-1\right]\times\theta+1\right\}^{T-t}}{\left[(1+i(t,T))^{\frac{T-t}{252}}\right]} \quad (1)$$

Onde:

$P(t,T;\theta)$= Valor de mercado da operação.

NV_t= Valor nominal aplicado.

$y_{(T-t)}$ = Taxa de juros de curto prazo.

T = Data de vencimento do título.

t = Data de avaliação do título.

θ = Percentual do CDI aplicado à operação.

A equação (1) mostra que, se o valor θ for diferente de 100%, o valor de mercado P_t será diferente do valor nominal N_t o que indica que há risco de taxas de juros na operação em questão.

Alguns estudos brasileiros abordam a questão. Eid Jr. e Ohanian (2008), por exemplo, propõem uma estratégia de *hedge* utilizando contratos de DI – Futuro a fim de minimizar o risco de taxas de juros implícito em (1). Os autores fazem isso estudando sensibilidade do valor de mercado do título com relação a alterações na curva de juros via *duration* e a convexidade[2] dessas operações. O estudo conclui que o *hedge* deve ser ajustado dinamicamente por conta da convexidade da carteira. A tabela 1, abaixo, resume os riscos associados a variações nas taxas de juros prefixadas. Por exemplo, uma posição ativa em CBD com remuneração de 105% é equivalente a uma exposição à taxa prefixada ativa.

Tabela 1 – Resumo das exposições em taxas prefixadas.

Situações	Posição no fluxo indexado ao DI	Valor do percentual do DI	Exposição em taxa prefixada
1	Ativa	Menor que 100%	Ativa
2	Ativa	Maior que 100%	Passiva
3	Passiva	Menor que 100%	Passiva
4	Passiva	Maior que 100%	Ativa

Fonte: Eid Jr. e Ohanian (2004)

[2] Segundo Hull (2006), a convexidade pode ser vista como a segunda derivada do valor de Mercado do título com relação às taxas de juros.

Já Hübner (2003) analisa o caso de s*wap* cambial com um dos fluxos de caixa remunerados a variação cambial mais *spread* e outra ponta indexada a um percentual do DI. Para que haja não arbitragem na operação é preciso precificar o fluxo indexado ao percentual do DI corretamente. Para tanto, o artigo apresenta um *framework* para o cálculo da sensibilidade de operações indexadas ao DI em tempo contínuo. O autor utiliza o modelo de Heath, Jarrow, and Morton (1992), para derivar a estrutura a termo de taxas de juros de modo a simular os resultados da operação de *Swap* cambial proposta em seu estudo. O artigo propõe uma operação utilizando *hedge* cambial via dois inputs: a curva de juros *forward* e a função de volatilidade de cada taxa *forward*. Dados os *inputs*, a árvore de juros foi gerada contendo 8 nós com 56 dias úteis de diferença entre eles.

Alguns dos manuais de precificação disponibilizados publicamente por instituições financeiras abordam o tema de riscos em operações indexadas ao DI [3]. O Manual de Marcação a Mercado do Banco Bradesco S.A. do Departamento de Ações e Custódia inclui à equação (1) valores de *spread* de crédito, bem como o Manual de Marcação a Mercado do Banco BTG Pactual. O tema, portanto, é relevante para o computo do valor de mercado de operações bancária, bem como a avaliação do seu risco. De acordo com paradigma clássico de Modigliani e Miller[4], sob a hipótese de eficiência de mercado e desconsiderando os efeitos de impostos, custos de transação, custos de agência e informação assimétrica, o gerenciamento de riscos financeiros é irrelevante para a empresa, uma vez que os acionistas podem diversificar seus riscos por conta própria. No entanto, uma extensa literatura mostra que, relaxando algumas hipóteses do paradigma clássico de Modigliani e Miller, a gestão de riscos é relevante e gera valor para a empresa.

Smith e Stulz (1985), por exemplo, mostram que uma politica de *hedge* [5] reduz custos de transação relacionados à *financial distress* [6]e a estrutura de impostos a qual a empresa está sujeita. Já Froot, Sharfstein e Stein (1993) mostram que fazer *hedge* é relevante para a empresa uma vez que reduz o sub-investimento existente quando o fluxo de caixa é volátil e o acesso ao financiamento externo é custoso. Allayannis e Weston (2001) utilizam derivativos cambiais para justificar a relevância do *hedge* para a o valor da empresa aplicando o Q de

---

[3] Banco Bradesco: http://www.bradescocustodia.com.br/Pdfs/ManualMarcacaoMercado.pdf.
Banco BTG Pactual:
https://www.btgpactual.com/home/Content/Arquivos/Manual_de_Marcacao_a_Mercado_BTG_Pactual.pdf

[4]O argumento pode ser encontrado em Modigliani, F.; Miller, M. (1958). "The Cost of Capital, Corporation Finance and the Theory of Investment". American Economic Review 48 (3): 261–297. http://www.jstor.org/stable/1809766.

[5] *Hedge*, nesse caso, refere-se a operações cujo objetivo é mitigar riscos financeiros.

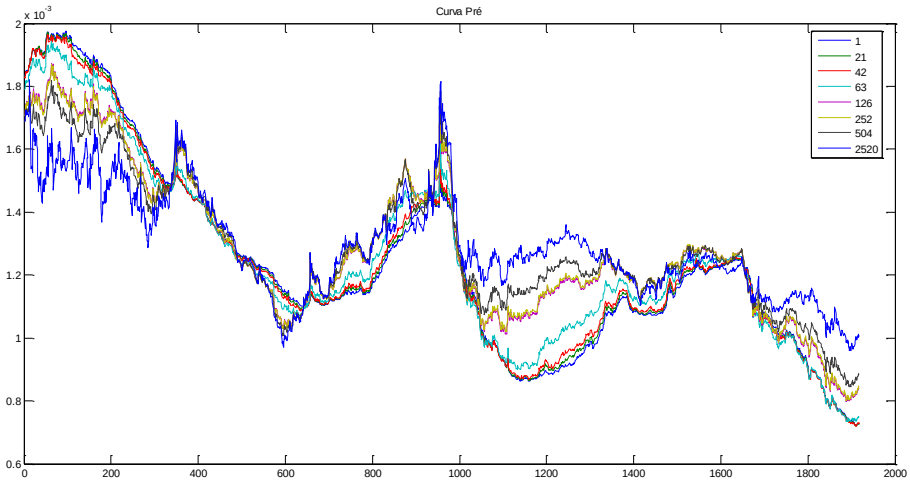
[6] *Financial distress* refere-se a custos relacionados à possibilidade de liquidação das atividades da empresa

Tobin como medida de valor a uma amostra de 720 empresas no período de 1990 a 1995, encontrando evidencias de que tal política aumenta o valor da empresa. Visvanathan (1998) estuda o caso específico de empresas que utilizam swaps de taxas de juros como *hedge* e conclui que empresas mais propensas a *finacial distress* utilizam os *swaps* para alterar dívida de curto prazo em dívida de longo prazo com taxa fixa.

No caso dos derivativos de taxas de juros uma série de instrumentos está disponível no mercado brasileiro, sendo o de maior liquidez [7] no mercado o contrato de DI - Futuro. O contrato DI - Futuro tem como ativo objeto a taxa média do DI com prazo de 1 (um) dia útil calculada pela CETIP, resultado da negociação de reservas bancárias entre instituições financeiras no país. A instituição financeira emite DI e capta recursos de outra instituição participante do mercado por um dia útil expressa ao ano com base 252 dias úteis.

O presente trabalho visa avaliar o risco de taxas de juros implícito em operações de CDB DI via análise de sensibilidade – *duration* e convexidade – que visam capturar efeitos de choques paralelos na curva de juros, e via análise de componentes principais com o objetivo de capturar choques não paralelos na curva de juros. Para tanto, uma carteira de CDBs será simulada para o período de julho a outubro de 2011 – período em que as taxas de juros do CDI saíram de 12,15%, subiram para 12,40% e caíram para 11,40%. Assim, a efetividade do *hedge* é avaliada em um período de incertezas a cerca da política monetária a ser implementada pelo Banco Central.

Figura 1 – Evolução das taxas de juros no Brasil – Taxa DI



Fonte: Cetip

[7] No dia 15/10/2012, por exemplo, havia 15.645.255 contratos em aberto de DI - Futuro enquanto os contratos de Futuro de Ibovespa e Futuro de Dólar somavam 1.134.059 contratos.

O propósito do trabalho é identificar, mensurar e mitigar riscos de taxas de juros associados a operações de CDB DI. Com isso, é pretendido contribuir com a literatura destacando um caso bastante específico, mas, no entanto, bastante comum no dia-a-dia da gestão financeira de empresas e bancos.

O restante deste trabalho está organizado da seguinte forma: a próxima seção descreve em detalhe as particularidades do mercado brasileiro e as fontes de risco de juros que as empresas estão sujeitas. A terceira seção apresenta a metodologia deste trabalho desenvolvendo a medida de risco a ser abordada para as operações de CDB DI e descreve o uso da análise de componentes principais aplicada a operações de *hedge*. A quarta seção apresenta uma aplicação empírica da metodologia apresentando os dados utilizados no trabalho. A última seção apresenta limitações, conclusões e possíveis extensões deste trabalho.

2 O MERCADO BRASILEIRO

2.1 A REPRESENTATIVIDADE DO CDB DI

No Brasil, um título de renda fixa bastante popular é o CDB. O CDB, Certificado de Depósito Bancário, como já definido na introdução do texto, são títulos privados nominativos emitidos por bancos de forma a captar recursos junto ao público. O título é negociado via taxa de juros bruta anual, não levando em conta tributação ou inflação e podem ser negociados a qualquer momento dentro do prazo contratado[8]. O CDB está sujeito à tabela de IOF (Imposto sobre operações financeiras) se resgatado antes de 30 dias corridos e são tributados na fonte no momento do resgate de acordo com as alíquotas de imposto de renda vigentes.

Segue abaixo um quadro dos ativos mais relevantes registrados na CETIP (Câmara de Custódia e Liquidação).

[8] Para mais detalhes ver Manual de Metodologia de Marcação a Mercado da Cetip disponível no endereço: http://www.cetip.com.br/Comunicados-Documentos#Lista

Tabela 2 – Estoque de ativos registrados na CETIP - valores de 15/10/2012

Ativos e Títulos	Estoque (R$ milhões)	Participação
Fundos Abertos	1.003.563,33	24,20%
CDB	683.260,26	16,50%
DI	641.812,49	15,50%
DEBÊNTURES	471.884,78	11,40%
SWAP	388.319,35	9,40%
SWFC	166.708,40	4,00%
LF	166.044,86	4,00%
NDF	157.043,45	3,80%
Fundos Fechados	67.988,92	1,60%
LCI	60.296,48	1,50%
Outros	342.998,45	8,27%
Total	4.149.920,76	100,00%

Fonte: CETIP

Fonte – CETIP.
Nota: Fundos Abertos – fundos de investimento abertos registrados na Cetip. CDB – Certificado de Depósito Bancário. DI – Depósito Interfinanceiro. Swap – swaps registrados na Cetip. SWFC – swap de fluxo de caixa. LF – Letra Financeira. NDF – *Non Deliverable Forward.* Fundos Fechados – fundos de investimento fechados registrados na Cetip. LCI – Letra de Crédito Imobiliário.

Percebe-se que os CDBs contribuem com 16,5% dos estoques registrados na CETIP, sendo a segunda modalidade mais relevante.

Tabela 3 – Estoque de CDBs registrados na CETIP - valores de 15/10/2012

CDB por modalidade	Estoque (R$ Milhões)	Participação
CDB	624.017,06	91,33%
CDB Escalonado	12.549,29	1,84%
CDB Subordinado	46.502,36	6,81%
CDB Vinculado	191,55	0,03%
Total	683.260,26	100,00%

Da tabela 3 acima é possível ver que o CDB comum é a modalidade mais representativa. O CDB Escalonado tem como característica uma remuneração via percentual do DI, por exemplo, crescente ao longo do tempo. Já o CDB Subordinado pode ser emitido por instituições financeiras a fim de compor capital, uma vez que, em caso de descumprimento de obrigações por parte da instituição, os detentores de tal título recebem seus recursos apenas antes dos acionistas.

Tabela 4 – Estoque de CDBs registrados na CETIP - valores de 15/10/2012

CDB por indexador (CDB e CDB Escalonado)	Estoque (R$ Milhões)	Participação
Flutuante - DI	600.500,88	94,33%
Flutuante - SELIC	10.500,42	1,65%
Pós-fixado - IGPM	836	0,13%
Pós-fixado - IPCA	1.167,81	0,18%
Pós-fixado - TR	8.001,53	1,26%
Prefixado	15.559,72	2,44%
Total	636.566,35	100,00%

A ampla representatividade dos CDB DI pode ser vista na tabela acima. Cerca de 94% das operações com CDB são realizadas com esse indexador. Esse dado mostra a relevância de se estudar com mais detalhes esse tipo de operação.

2.2 O CONTRATO DI – FUTURO

O contrato DI – Futuro será bastante útil como instrumento de *hedge* para a carteira de CDB DI que será usada nas próximas seções.

O contrato DI – Futuro é o contrato derivativo mais líquido do mercado brasileiro, conforme a tabela 7, abaixo.

Tabela 5 – Contratos futuros do dia 11/10/2012

Contratos Futuros		
	Em aberto	Negociados
DI	15.674.400	5.776.882
DDI	1.738.061	99.486
Dólar	812.861	229.228
IBovespa	311.448	87.990

Fonte: BM&F Bovespa

O ativo objeto do contrato é a taxa DI, que é calculada a partir da média diária das taxas de emissões de DI – Depósito Interfinanceiro – extra grupo, com prazo de 1 dia útil liquidado na CETIP. Essa taxa é expressa em taxa efetiva anual com base em 252 dias úteis. Instituições financeiras, particularmente bancos, podem emitir tal título de modo a captar, ou doar, recursos no mercado e equilibrar suas reservas junto ao Banco Central do Brasil. Segue, a seguir, um resumo do contrato DI - Futuro disponível no site da BM&F Bovespa:

Tabela 6 – Contrato DI – Futuro – Resumo do Contrato[9]

Início das negociações	5 de junho de 1991
Objeto de negociação	Taxa de juro efetiva até o vencimento do contrato, definida para esse efeito pela acumulação das taxas médias de Depósitos Interfinanceiros no período compreendido entre a data de negociação, inclusive, e o último dia de negociação do contrato, inclusive .
Código	DI1
Tamanho do contrato	Preço unitário (PU) multiplicado pelo valor em reais de cada ponto, estabelecido pela BM&FBOVESPA.
Variação mínima de apregoação	0,001 ponto de taxa para os 3 primeiros vencimentos e 0.01 ponto de taxa para os demais.
Cotação	Taxa de juro efetiva anual, base 252 dias úteis, com até três casas decimais.
Oscilação máxima diária	Taxa de juro de referência +/-90 pontos-base (0,9%)
Lote padrão	Lote Padrão: 5. Obs: Para o 1º vencimento em aberto, o limite de oscilação será suspenso nos três últimos dias de negociação.
Último dia de negociação	Dia útil anterior à data de vencimento
Data de vencimento	1º dia útil do mês de vencimento
Meses de vencimento	4 primeiros meses subseqüentes ao mês em que a operação for realizada e, a partir daí, os meses que se caracterizarem como de início de trimestre.
Limites de posição	De 10.000 a 162.000 contratos, dependendo da duration do vencimento em questão, ou 20% das posições em aberto, dos dois o maior.
Liquidação	Financeira no dia útil seguinte à data de vencimento, pela cotação (preço unitário) de 100.000 pontos.
Margem de garantia	Será exigida margem de garantia de todos os comitentes com posição em aberto, cujo valor será atualizado diariamente pela Bolsa, de acordo com critérios de apuração de margem para contratos futuros.
Horário de negociação	Negociação Normal: 09:00[2] - 16:00 Call Eletrônico: 16:10 Negociação estendida (D+0) : 16:50[2] - 18:00

Fonte: BM&F Bovespa

O contrato DI – Futuro é semelhante a títulos zero cupom[10]. Portanto, a fim de realizar o *hedge* a uma exposição prefixada em taxas de juros basta abrir uma posição contrária com mesmo vencimento e valor *notional* em contrato DI - Futuro.

Algumas características do DI – Futuro são importantes de serem ressaltadas. Desde jan/2002 há a transformação automática das operações realizadas em PU (preço unitário), ou seja, operações compradas em taxa de juros são convertidas em operações vendidas e PU:

$$PO = \frac{100.000}{(1+i)^{\frac{n}{252}}} \qquad (2)$$

Onde:

PO= Preço da operação em PU

$i = taxa\ de\ juros\ negociada$

$n = Dias\ úteis\ da\ data\ de\ negociação, inclusive, até\ o\ vencimento, exclusive.$

[9] A tabela pode ser encontrada no endereço: http://www.bmfbovespa.com.br/shared/iframe.aspx?altura=1400&idioma=pt-br&url=www.bmf.com.br/bmfbovespa/pages/contratos1/contratosProdutosFinanceiros1.asp?WT.ac=Derivativos Financeiros

[10] Títulos *zero cupom* têm como característica principal o pagamento de principal e juros apenas em sua maturidade.

Outra importante característica do mercado futuro padronizado é o mecanismo de ajuste diário. Após as operações fechadas serem transformadas em PU conforma (2), e liquidadas financeiramente, conforme a taxa de juros vigente, no dia útil subsequente. A apuração do ajuste dá-se pelas seguintes fórmulas:

i) Ajuste das operações realizadas no dia:

$$AD_t = (PA_t - PO) \times M \times N \quad (3)$$

ii) Ajuste de posições em aberto do dia anterior:

$$AD_t = [PA_t - (PA_{t-1} - FC_t)] \times M \times N \quad (4)$$

Onde:

AD_t = Ajuste diário referente à data *t*

PA_t = Preço de ajuste do contrato na data *t*

M = Valor em reais de cada ponto de PU, estabelecido em R$ 1,00 pela BM&F Bovespa.

N = Número de contratos negociados

FC_t = fator de correção na data *t*, definido conforme a seguir:

i) Se há um dia útil entre o último pregão e o dia do ajuste.

$$FC_t = (1 + DI_{t-1})^{\frac{1}{252}} \quad (5)$$

ii) Se há mais um dia útil entre o último pregão e o dia do ajuste.

$$FC_t = \prod_{j-1}^{n} \left(1 + DI_j\right)^{\frac{1}{252}} \quad (6)$$

Onde:

DI_{t-1} = Taxa DI referente ao dia útil anterior ao ajuste. Se houver mais de um dia útil, essa será a taxa acumulada no período.

Dessa forma, se o valor do ajuste diário AD_t for positivo o comprador em PU (vendedor em taxa) recebe ajuste e o vendedor em PU (comprador em taxa) paga o ajuste. O inverso também é verdadeiro, se o ajuste for negativo o comprador em PU paga e o vendedor em PU recebe.

As subseções a seguir discutirão com mais detalhes a forma com que os títulos indexados ao DI são corrigidos, particularmente os CDB.

2.3 VALOR ATUALIZADO DO CDB DI

O valor atualizado para a data atual reflete o valor atualizado do dia anterior capitalizado pela taxa DI atual. Esse valor representa, no caso de um CDB DI, o valor bruto a ser resgatado pelo aplicador.

Para um dia útil, o calculo do fator de atualização é realizado da seguinte maneira:

$$FD_t = \left\{\left[(1 + i_t)^{\frac{1}{252}} - 1\right].\theta + 1\right\} \quad (7)$$

Onde:

FD_t = Fator de correção do DI por um dia útil conhecido em *t-1*.

i_t = Taxa DI divulgada pela Cetip na data *t* expressa em percentual ao ano.

θ= Percentual de remuneração do DI.

Exemplo 2.1: Cálculo do valor atualizado de um CDB DI.

Dados:

Valor inicial (NV_0):	R$ 1.000.000,00
Data de início:	15/10/2012
Data de avaliação:	16/10/2012
Prazo:	1 dia útil
θ:	110%
Taxa DI em 15/10/2012:	7,04%

Aplicando os dados acima em 2, temos:

$$FD_t = \left\{\left[(1 + 7{,}04\%)^{\frac{1}{252}} - 1\right].110\% + 1\right\}$$

$$FD_t = 1{,}00029701$$

De modo a obter o valor atualizado do CDB basta aplicarmos a seguinte equação:

$$NV_t = NV_0 \times FD_t \tag{8}$$

$$NV_t = 1.000.000{,}00 \times 1{,}00029701 = 1.000.297{,}01$$

Para conhecermos o valor atualizado em demais períodos basta multiplicar o valor atualizado anterior pelo fator do DI atual.

$$NV_t = NV_{t-1} FD_t \tag{9}$$

Exemplo 2.2: Rentabilidade acumulada.

Dados:

Valor inicial (NV_0):	R$ 1.000.000,00
Data de início:	15/10/2012
Data de avaliação:	22/10/2012
Prazo:	4 dias úteis
θ:	110%
Taxa DI entre 15 e 22/10:	7,04%; 7,05%; 7,08%; 7,08%

$$FD_t = \left(\left[(1+7{,}04\%)^{\frac{1}{252}} - 1\right].110\% + 1\right) \times \left(\left[(1+7{,}05\%)^{\frac{1}{252}} - 1\right].110\% + 1\right)$$
$$\times \left(\left[(1+7{,}08\%)^{\frac{1}{252}} - 1\right].110\% + 1\right) \times \left(\left[(1+7{,}08\%)^{\frac{1}{252}} - 1\right].110\% + 1\right)$$
$$= 1{,}00149042$$

$$NV_t = 1.000.000{,}00 \times 1{,}00149042 = 1.001.490{,}42$$

Vale notar que a avaliação do valor atualizado se dá da data de início da operação, inclusive e a data de avaliação, exclusive.

2.4 VALOR FUTURO E VALOR DE MERCADO DO CDB DI

O valor futuro de uma operação indexada ao DI, como o CDB DI, por exemplo, reflete a expectativa das taxas DI da data atual até o vencimento aplicada sobre o seu valor atualizado. O cálculo pode ser realizado conforme equação a seguir:

$$FV(t,T) = NV_t.\left\{\left[(1+i(t,T))^{\frac{1}{252}} - 1\right].\theta + 1\right\}^{T-t} \tag{10}$$

Onde:

$FV(t,T)$ = Valor futuro do título.

$i(t,T)$ = Taxa de juros conhecida na data *t* com vencimento na data *T*.

A equação (5) reflete o valor do título em uma data futura. A fim de conhecer o valor do título na data atual é preciso considerar o valor futuro desse título descontado pelas taxas de juros vigentes, no caso do mercado brasileiro, a estrutura a termo extraída das taxas DI. Dessa forma, o valor de mercado de um título indexado ao DI é definido como:

$$P(t,T) = \frac{FV(t,T)}{\left[\left(1+i(t,T)\right)^{\frac{T-t}{252}}\right]} \tag{11}$$

Onde:

$P(t,T)$ = Valor de mercado do título.

A equação (6) é análoga à equação 1 e tem um significado importante para a análise de risco da operação. Percebe-se que o $P(t,T)$ dependerá da curva de juros mercado, $i(t,T)$, se, e somente se, o valor θ for diferente de 100%. Esse resultado é relevante quando levado em conta o volume de operações atreladas a tal indexador, deixando espaço para abrir posições no mercado futuro de juros a fim de *hedgear* tais exposições.

2.5 REGULAMENTAÇÃO

No Brasil o tema é tratado pelo Banco Central do Brasil através do documento *Instruções para Apuração e Preenchimento das Informações do Demonstrativo de Risco de Mercado (DRM) – Carta-Circular 3.376/09*. Sobre esse tema o documento diz que: "As operações referenciadas em DI ou Selic, incluindo instrumentos financeiros derivativos, e que remunerem um percentual daqueles indexadores, diferente de 100%, devem ter também mapeado o fator de risco pré."[11].

O documento publicado pelo BCB faz referência a, por exemplo, uma aplicação em CDB DI que remunere 105% do indexador apresenta uma exposição vendida prefixada de cerca de 5% do tamanho do contrato. Um contrato cuja remuneração seja de 90% do DI tem cerca de 10% do tamanho do contrato exposto em, comprado, em taxa prefixada.

Tabela 7 – Exposição prefixada de um CBD DI com θ igual a 90%.

Taxas Simuladas	Valor Presente CDB Pré	Valor Presente CDB Pós	Sensibilidade CDB Pré (1)	Sensibilidade CDB Pós (2)	Exposição Pré do CDB Pós: (2) dividido por (1)
5,00%	1.021.619,05	995.133,29	(2.438,23)	(237,21)	9,73%
6,00%	1.011.981,13	994.190,66	(9.637,92)	(942,63)	9,78%
7,00%	1.002.523,36	993.257,78	(9.457,77)	(932,87)	9,86%
8,00%	993.240,74	992.334,48	(9.282,62)	(923,30)	9,95%
9,00%	984.128,44	991.420,57	(9.112,30)	(913,91)	10,03%
10,00%	975.181,82	990.515,86	(8.946,62)	(904,71)	10,11%
11,00%	966.396,40	989.620,19	(8.785,42)	(895,68)	10,20%
12,00%	957.767,86	988.733,37	(8.628,54)	(886,82)	10,28%
13,00%	949.292,04	987.855,25	(8.475,82)	(878,12)	10,36%
14,00%	940.964,91	986.985,67	(8.327,12)	(869,59)	10,44%
15,00%	932.782,61	986.124,46	(8.182,30)	(861,21)	10,53%

Fonte: Elaboração própria.

A Tabela 7 acima exemplifica o texto publicado pelo Banco Central do Brasil para o caso de uma aplicação de R$ 1.000.000,00 em CDB DI remunerado a 90% do DI, com prazo de 1 ano (252 dia úteis). Considera-se uma taxa prefixada de 7,27% a.a. para o prazo em questão. O valor presente título CDB DI foi calcula com base em (1), com θ igual a 90%. As taxas de juros utilizadas foram as Taxas Simuladas – taxas prefixadas para o prazo em questão – na primeira coluna. Já o CDB Pré teve o seu valor futuro calculado a partir da taxa prefixada vigente no mercado, supondo a operação foi fechada com essa mesma taxa, e o valor de

[11] http://www.bcb.gov.br/fis/pstaw10/instrucoespreenchimentodrm_v3.pdf. Item II) - 17).

mercado[12] foi apurado de acordo com as Taxas Simuladas, na primeira coluna. As sensibilidades, calculadas nas colunas 4 e 5, mostram a variação do valor presente do CDB de acordo com as variações nas taxas de juros prefixadas. Dessa forma, a exposição em taxa prefixada do CDB DI pode ser vista como uma fração da exposição do CDB Pré.

Tabela 8 – Exposição prefixada do CDB DI de acordo com o percentual do DI.

Percentual do DI	Exposição Prefixada
60%	38%
70%	29%
80%	20%
90%	10%
100%	0%
110%	-10%
120%	-20%
130%	-31%
140%	-41%

Fonte: Elaboração própria.

Na Tabela 8 acima temos a variação na exposição prefixada de títulos indexados ao DI de acordo com mudanças nesse percentual – exposições negativas indicam posição comprada em taxa prefixada – corroborando com as Instruções do BCB.

3 RISCO DE TAXAS DE JUROS

3.1 CARTEIRA DE CDB DI

Suponha a seguinte carteira em aplicações em CDB DI. Os títulos abaixo foram escolhidos de forma a capturar algumas características existentes nesse mercado, de forma que:

Tabela 9 – Carteira de CDBs selecionados.

Produto	%CDI	Data de Início	Data de vencimento	Prazo (DC)	Prazo (DU)	Valor Inicial (R$)
CDB_1	70%	11/01/2010	05/04/2019	3.371	2.320	500.000.000
CDB_2	87%	25/04/2011	21/12/2011	240	168	1.333.333.333
CDB_3	105%	01/06/2011	21/05/2013	720	495	2.000.000.000
CDB_4	110%	20/06/2011	19/06/2012	365	252	1.166.666.667

Fonte: Elaboração própria.

[12] Valor de Mercado do CDB Pré:

CDB_1: Representam títulos vinculados à conta corrente que apresentam contratos de aplicação automática. Tal produto é oferecido por diversos bancos nacionais e tem característica a aplicação automática dos valores existentes na conta corrente do cliente em CDB de prazo longo, com liquidez diária e, geralmente, menor rentabilidade.

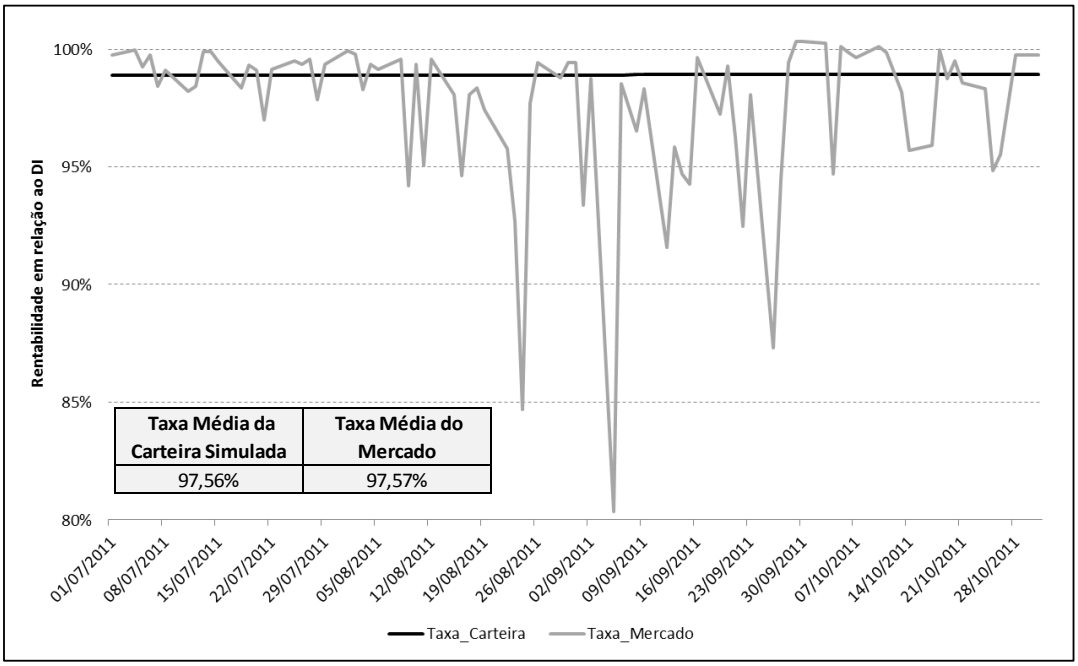
CDB_2: Pode representar aplicações vinculadas a empréstimos tomados como forma de reciprocidade o que, por vezes, representa uma menor remuneração.

CDB_3: Pode representar aplicações em bancos de primeira linha (com *rating* de crédito AAA em escala nacional). Dadas as condições de mercado atuais, com restrições de liquidez e crédito e casos recentes de quebra de bancos médios, há uma tendência das empreses alocarem seus recursos em instituições com *rating* mais alto. Dessa forma, a demanda por tais aplicações tende a reduzir a remuneração desses títulos.

CDB_4: Representa aplicações em bancos com *rating* de crédito menor. Geralmente, são bancos médios que aumentam a remuneração de seus títulos de forma a criar relacionamento com grandes empresas.

Para termos uma ideia de aderência dessa carteira selecionada com as práticas de mercado[13], o quadro a seguir foi elaborado:

Figura 2: Rentabilidade das carteiras de mercado e da carteira proposta.



Fonte: BCB e dados do trabalho

[13] Dados disponíveis em: https://www3.bcb.gov.br/sgspub/localizarseries/localizarSeries.do?method=prepararTelaLocalizarSeries, módulo do BCB para consulta de séries temporais.

O gráfico 2 mostra a rentabilidade das taxas pagas a pessoas jurídicas que aplicaram em CDB DI [14] no período selecionado. A carteira de aplicações foi construída de forma a refletir as condições de mercado do período estudado. Os dados do BCB são de depósitos a prazo de CDB e RDB indexados ao DI. A média foi extraída considerando sua ponderação pelo saldo do dia. As variações de taxas podem ser explicadas pelo fluxo diário de aplicações onde dias típicos de pagamentos, como dia 05 e dia 20 de cada mês são acompanhados de resgates em CDB, o que ajuda a diminuir as taxas praticadas.

3.2 *DURATION* E CONVEXIDADE

Esse tópico abordará medidas de sensibilidade do preço de um título com relação a mudanças paralelas nas taxas de juros. A *duration* aqui abordada faz referência à *duration* modificada, a não ser quando especificado, e pode ser vista como uma aproximação de primeira ordem de uma mudança de uma unidade nas taxas de juros na variação percentual do preço do título e está relacionado à inclinação da relação entre preço e taxas de juros. Já a convexidade é uma aproximação de segunda ordem da variação percentual do preço com relação a mudanças nas taxas de juros e está relacionada à curvatura da relação preço e taxas de juros.

Apesar da limitação oriunda da não captura de choques não paralelos na curva de juros, *duration* e convexidade são medidas bastante utilizadas para a avaliação de risco em títulos de renda fixa. No caso deste trabalho essas medidas serão especialmente úteis tendo em vista que combinações de *duration* e convexidade com diferentes sinais geram diferentes estratégias de imunização da carteira.

A *duration de Mcaulay* pode ser vista como o prazo médio de um fluxo de operações onde o valor do dinheiro no tempo é considerado. No caso do CDB DI, por exemplo, não há pagamentos intermediários de juros, o mesmo é pago quando é solicitado um resgate total ou parcial da aplicação ou no seu vencimento.

Essa medida também pode ser definida como a primeira derivada de $P(t,T)$ com relação à taxa de juros, conhecida como *duration* modificada, ou apenas *duration*, uma vez que captura choques paralelos na curva de juros de mercado.

[14] Os dados disponíveis no BCB incluem RDB – Recibo de Depósito Bancário, título semelhante ao CDB.

Para capturar essa relação, podemos utilizar a equação que descreve o valor de mercado do título. Assim, tomando a equação 7 e a derivando com relação à $i(t,T)$ temos que:

$$\frac{\partial P(t,T;\theta)}{\partial i(t,T)} = P(t,T;\theta) \times \frac{T-t}{252}\left(1+i(t,T)\right)^{\frac{251}{252}} \times \left[\frac{\theta}{1+\theta\left(1+i(t,T)\right)^{\frac{1}{252}}-\theta} - \frac{1}{\left(1+i(t,T)\right)^{\frac{1}{252}}}\right] \quad (7)^{15}$$

Analisando a equação 8, acima, é possível perceber quatro possíveis fontes de risco dependendo se estamos aplicando ou tomando dinheiro e se o parâmetro θ é maior ou menor que 100%, como já percebido por Eid Jr. e Ohanian (2008):

Posição ativa em θ inferior a 100%: A duration é negativa, ou seja, uma variação positiva nas taxas prefixadas gera uma queda no valor de mercado do título. Esse é o risco de uma operação passiva em taxa prefixada.

Posição ativa em θ superior a 100%: A duration é positiva, ou seja, uma variação positiva nas taxas prefixadas gera um aumento no valor de mercado do título. Esse é o risco de uma operação ativa em taxa prefixada.

Posição passiva em θ inferior a 100%: A duration é positiva, ou seja, uma variação positiva nas taxas prefixadas gera um aumento no valor de mercado do título. Esse o risco de uma operação ativa em taxa prefixada.

Posição passiva em θ superior a 100%: A duration é negativa, ou seja, uma variação positiva nas taxas prefixadas gera uma queda no valor de mercado do título. Esse o risco de uma operação ativa em taxa prefixada.

Dada a sensibilidade, o *hedge* via *duration* pode ser realizado através de contratos de DI - Futuro. O contrato DI - Futuro negociado na BM&F Bovespa é o derivativo de maior liquidez no mercado brasileiro. O contrato vale R$ 100.000,00 no seu vencimento e é negociado em taxa ao ano com base 252 dias úteis. O preço unitário do título, ou PU, pode ser calculado da seguinte forma:

$$PU(t,T) = \frac{100.000}{\left[(1+i(t,T))^{\frac{T-t}{252}}\right]} \quad (8)$$

[15] Detalhes no Apêndice

Assim como os CDBs, o DI – Futuro também é sensível a alterações na taxa de juros de mercado. Dessa forma, o valor da sensibilidade do título com relação à taxa de juros de mercado pode ser escrito como:

$$\frac{\partial PU(t,T)}{\partial i(t,T)} = 100.000\left\{\frac{-(T-t)}{252(1+i(t,T))^{\left(\frac{(T-t)}{252}+1\right)}}\right\} \tag{9}$$

3.3 APLICAÇÃO DE *DURATION* E CONVEXIDADE

Como visto anteriormente, o cálculo da *duration* é relevante para a mensuração de sensibilidade de carteiras de renda fixa para choques paralelos na curva de juros, como mostra Fabozzi (1997). A seguir, segue uma aplicação de (7):

Tabela 10 – Carteira selecionada e cálculo da *duration* com data base 01/07/2011.

Fonte: Elaboração própria. Valores em R$ mil

Ativo	% DI	Prazo (DU)	Valor Atualizado	Pré	MTM	Duration
CDB - 1	70%	1950	553.475.690	12,19%	423.803.634	(876.662.687)
CDB - 2	87%	168	1.358.527.067	12,53%	1.344.706.853	(103.527.030)
CDB - 3	105%	474	2.020.010.540	12,66%	2.042.785.175	170.439.232
CDB - 4	110%	244	1.171.338.887	12,62%	1.184.893.500	101.817.883
Total						**(707.932.603)**

Dada a *duration* negativa, percebe-se que a carteira tem uma posição liquida ativa em taxa pré-fixada, ou seja, um aumento nas taxas de juros fará com que a carteira perca seu valor de mercado. Portanto, a operação de *hedge* correta seria abrir uma posição passiva em contratos de DI – Futuro. É preciso, assim, determinar quantos contratos DI – Futuro devem ser vendidos.

Considerando a equação de *dollar duration* a seguir:

$$DD = D_{mod}.P(t,T) \tag{10}$$

Onde D_{mod} é a *duration* modificada e pode ser definida como:

$$D_{mod} = -\left(\frac{1}{P(t,T)}\right)\frac{dP(t,T)}{di(t,T)} \tag{11}$$

Assim, a variação do preço do título com relação a variações nas taxas de juros é:

$$\Delta P(t,T) = (-D_{mod}.P(t,T))\Delta i(t,T) \quad (12)$$

Dessa forma é possível separar o portfolio entre os ativos e os derivativos, onde a variação total do portfolio vale:

$$\Delta V(t,T) = \Delta A(t,T) + N\Delta F(t,T) \ = -[(D_{mod}A) + N(D_{mod}F)]i(t,T) \quad (13)$$

Onde:

$A(t,T)$ = Portfólio de ativos, no caso, CDB DI.

$F(t,T)$ = Portfolio de derivativos, no caso, DI – Futuro.

N = Número de contratos derivativos a serem comprados ou vendidos.

Assim, a variável de interesse N pode ser definida como:

$$N = \frac{(D_{mod}A)}{(D_{mod}F)} \quad (14)$$

A carteira de CDB DI selecionada possui prazo médio de cerca de 501 dias úteis. Portanto, o contrato vincendo em julho de 2013 (tendo como base o dia 01/07/2011) será utilizado para a realização do *hedge*.

Tabela 11 – *Duration* do Contrato DI- Futuro

Ativo	Prazo (DU)	Pré	Duration	Qtd	Total	PU
DI - Futuro	501	12,66%	(139.021)	(5.092)	707.932.603	78.937

Fonte: Elaboração própria

Dessa forma, caso pudéssemos vender 5.092 contratos, o resultado da carteira para variações infinitesimais nas taxas de juros seria zero. Supondo variações paralelas em toda curva de juros futura é possível realizar a seguinte simulação:

Tabela 12 – Desempenho da carteira dados movimentos paralelos na curva de juros.

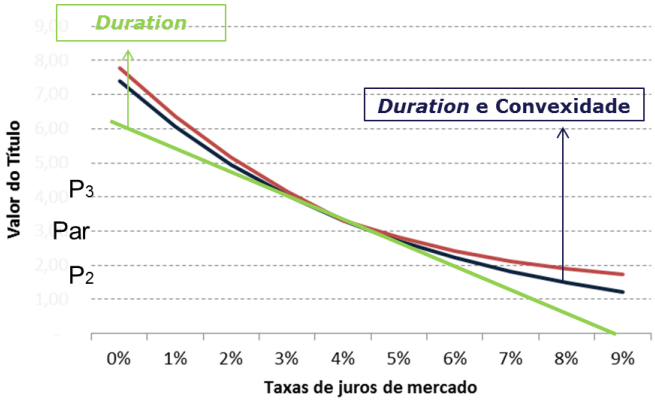
Choque na	Variação no valor da carteira		Variação com relação ao total	
curva	Sem Hedge	Com Hedge	Sem Hedge	Com Hedge
-1,00%	7.204.862	30.660	0,14%	0,00%
-0,80%	5.743.590	19.553	0,11%	0,00%
-0,60%	4.292.548	10.959	0,09%	0,00%
-0,40%	2.851.656	4.854	0,06%	0,00%
-0,20%	1.420.833	1.209	0,03%	0,00%
0,00%	-	-	0,00%	0,00%
0,20%	(1.410.923)	1.201	-0,03%	0,00%
0,40%	(2.812.014)	4.785	-0,06%	0,00%
0,60%	(4.203.351)	10.729	-0,08%	0,00%
0,80%	(5.585.009)	19.007	-0,11%	0,00%
1,00%	(6.957.066)	29.595	-0,14%	0,00%

Fonte: Elaboração própria

A Tabela 12 acima mostra um comparativo entre o resultado da carteira com a utilização do *hedge* e sem a utilização do *hedge* dado variações paralelas na curva de juros. Percebe-se que tanto em cenários de queda de taxas de juros quanto em cenários de subida, o resultado da carteira com o *hedge* será positivo. Ainda, a carteira com o *hedge* é praticamente imune a choques pequenos e paralelos na curva de juros.

Apesar do *hedge* via *duration* apresentar resultados satisfatórios a *duration* não captura efeitos de segunda ordem da variação do preço do título com relação às taxas de juros, conforme gráfico abaixo.

Figura 3 – *Duration* e Convexidade.



Fonte: Hull (2006)

Onde:

Par = Valor do título mantendo inalteradas as taxas de juros mercado.

P_2 = Valor do título supondo aumento nas taxas de juros de mercado

P_3 = Valor do título supondo redução nas taxas de juros de mercado

A convexidade pode ser vista como a segunda derivada do valor do título em relação à taxa de juros e, dessa forma, captura efeitos não lineares associados a variações nas taxas de juros. Algebricamente, temos para o CDB DI:

$$\frac{\partial^2 P(t,T)_t}{\partial i(t,T)^2} = \frac{-NV_t(\theta-1)\left[\theta\left(1+\left[(1+i(t,T))^{\frac{1}{252}}-1\right]+\left(1+\theta\left[(1+i(t,T))^{\frac{1}{252}}-1\right]\right)\right)\right]}{\left[1+\theta\left[(1+i(t,T))^{\frac{1}{252}}-1\right]\left(1+\left[(1+i(t,T))^{\frac{1}{252}}-1\right]\right)\right]} \tag{15}$$

Já para o contrato DI – Futuro, temos:

$$\frac{\partial^2 PU(t,T)}{\partial i(t,T)^2} = PU(t,T)\frac{(T-t)(T-t-1)}{\left[1+\left[\left(1+i(t,T)\right)^{\frac{1}{252}}-1\right]\right]} \tag{16}$$

Para uma análise mais completa do risco de taxas de juros ao qual a carteira está sujeita foram calculados os quadros a seguir:

Tabela 13 – Análise da Convexidade da carteira.

Ativo	% DI	Prz (du)	Valor Atualizado	Pré	MTM	Duration	Convexidade
CDB - 1	70%	1950	553.475.690	12,19%	423.803.634	(876.662.687)	2.597.017.815
CDB - 2	87%	168	1.358.527.067	12,53%	1.344.706.853	(103.527.030)	100.291.628
CDB - 3	105%	474	2.020.010.540	12,66%	2.042.785.175	170.439.232	(137.690.776)
CDB - 4	110%	244	1.171.338.887	12,62%	1.184.893.500	101.817.883	(82.052.987)
DI - Futuro	100%	500	(401.969.251)	12,66%	(401.969.251)	707.932.603	368.237
Total						**-**	**2.477.933.916**

A tabela 14 acima mostra a convexidade da carteira já considerando o DI – Futuro em sua composição. Percebe-se que para os títulos indexados a um % DI menor que 100 a convexidade é positiva, já para percentuais acima de 100 esse valor é negativo.

A seguir é possível verificar o desempenho de *duration* e convexidade da carteira dados choques paralelos na curva de juros.

Tabela 14 – Análise da *Duration* e Convexidade da carteira.

Choque na taxa Pré	*Duration*	Convexidade
-1,00%	(6.186.809)	2.578.614.081
-0,80%	(4.923.014)	2.558.088.171
-0,60%	(3.672.583)	2.537.759.419
-0,40%	(2.435.368)	2.517.625.591
-0,20%	(1.211.222)	2.497.684.482
0,00%	-	2.477.933.916
0,20%	1.198.440	2.458.371.745
0,40%	2.384.239	2.438.995.849
0,80%	4.718.473	2.400.794.539
1,00%	5.867.181	2.381.965.022

A tabela 14 acima mostra como *duration* e convexidade mudam de acordo com alterações paralelas na curva de juros. Por exemplo, um choque de -1,00% na curva de juros gera uma *duration* negativa e uma convexidade positiva. Nesse caso, a fim de proteger a carteira por conta da variação da *duration* seria necessário aumentar a posição passiva em DI – Futuro, ou seja, comprar taxas de juros futuras. Já para um choque de 1,00% temos uma *duration* positiva e, nesse caso, é preciso diminuir a passiva vendida em DI – Futuro, ou seja, vender taxa. Em ambos os casos a convexidade da carteira é positiva.

A convexidade positiva observada é um importante indicativo quando é preciso proteger a carteira dadas as novas taxas de juros. No caso de queda nas taxas de juros é preciso é comprar taxas de juros. No entanto, essa compra será feita no momento da queda nas taxas gerando maior eficiência na gestão da carteira. O oposto também é verdade. Quando as taxas de juros sobem é preciso vender taxas de juros quando as mesmas subiram. No entanto, se a convexidade da carteira fosse negativa, haveria uma punição ao remanejarmos o *hedge*.

4 BASE DE DADOS E RESULTADOS

Para realizar as simulações propostas e realizar o cálculo de marcação a mercado, valor atualizado e *duration* foram utilizados dados de mercado a fim de extrair a curva de juros prefixada no Brasil. Para tanto, dados da BM&F Bovespa foram coletados pelo período de janeiro 2006 a outubro 2012. No entanto, para fins de comparação da efetividade do hedge o período analisado foi de julho 2011 a outubro 2011.

A curva de juros foi construída a partir dos dados de *Swap* DI x Pré negociados na BM&F Bovespa e conta com 54 vértices fixos. A interpolação dos dados foi feita exponencialmente[16].

O resultado do hedge pode ser visto na tabela 15 abaixo. Percebe-se que, no primeiro dia são precisos 5.092 contratos DI – Futuro vendidos para *hedgear* a posição. A partir de então, o número de contratos varia de modo a *duration* do portfolio ficar zerada diariamente. Esse movimento varia de acordo com as taxas de mercado e o prazo de vencimento das aplicações.

[16] Vide Securato (2000)

Tabela 15 – Variação da carteira dia-a-dia

Data Base	Valor Atualizado	Valor de Mercado	*Duration*	Convexidade	Prazo Médio	Curva Pré	Duration DI - Futuro	Quantidade de DI - Futuro	Variação de DI - Futuro	PU DI - Futuro	Duration DI - Futuro	Duration Total
01/07/2011	5.103.352.183	4.996.189.163	-707.932.603	2.477.565.679	500	12,66%	-139.021	-5.092	0	-452.003.152	707.932.603	0
04/07/2011	5.104.978.060	4.997.712.646	-708.722.275	2.477.005.884	499	12,62%	-138.954	-5.100	-8	-452.883.824	708.722.275	0
05/07/2011	5.106.605.680	4.998.983.187	-708.369.751	2.476.446.846	498	12,67%	-138.557	-5.112	-12	-453.753.476	708.369.751	0
06/07/2011	5.108.232.594	5.000.799.470	-710.006.016	2.475.887.379	498	12,63%	-138.703	-5.119	-6	-454.484.583	710.006.016	0
07/07/2011	5.109.860.026	5.001.857.898	-709.022.004	2.475.328.076	497	12,69%	-138.273	-5.128	-9	-455.025.582	709.022.004	0
08/07/2011	5.111.487.976	5.003.496.403	-709.982.465	2.474.767.406	496	12,69%	-138.059	-5.143	-15	-456.346.510	709.982.465	0
11/07/2011	5.113.116.445	5.004.987.880	-710.525.613	2.474.206.901	495	12,69%	-137.845	-5.155	-12	-457.403.418	710.525.613	0
12/07/2011	5.114.745.433	5.006.374.389	-710.788.783	2.473.646.564	495	12,68%	-137.885	-5.155	-0	-457.486.109	710.788.783	0
13/07/2011	5.116.376.167	5.007.943.721	-711.578.560	2.473.086.988	494	12,67%	-137.707	-5.167	-12	-458.624.393	711.578.560	0
14/07/2011	5.118.007.421	5.008.923.439	-710.580.786	2.472.527.579	493	12,67%	-137.494	-5.168	-1	-458.693.090	710.580.786	0
15/07/2011	5.119.639.196	5.010.045.569	-709.936.668	2.471.968.340	492	12,70%	-137.177	-5.175	-7	-459.218.353	709.936.668	0
18/07/2011	5.121.271.490	5.011.979.018	-711.858.544	2.471.409.269	492	12,67%	-137.284	-5.185	-10	-460.224.515	711.858.544	0
19/07/2011	5.122.903.076	5.013.502.898	-712.496.477	2.470.849.776	491	12,67%	-137.076	-5.198	-13	-461.343.525	712.496.477	0
20/07/2011	5.124.535.182	5.015.025.743	-713.025.781	2.470.290.213	490	12,69%	-136.791	-5.213	-15	-462.566.873	713.025.781	0
21/07/2011	5.126.199.528	5.016.244.255	-712.533.432	2.469.746.104	490	12,73%	-136.654	-5.214	-2	-462.554.110	712.533.432	0
22/07/2011	5.127.864.415	5.018.213.584	-714.314.719	2.469.202.302	489	12,72%	-136.459	-5.235	-21	-464.395.438	714.314.719	0
25/07/2011	5.129.531.074	5.019.078.013	-712.858.995	2.468.659.513	488	12,74%	-136.160	-5.235	-1	-464.368.072	712.858.995	0
26/07/2011	5.131.197.043	5.020.865.199	-714.223.453	2.468.116.299	487	12,72%	-136.045	-5.250	-14	-465.765.464	714.223.453	0
27/07/2011	5.132.863.553	5.021.952.075	-713.432.891	2.467.573.252	487	12,73%	-136.010	-5.245	4	-465.329.688	713.432.891	0
28/07/2011	5.134.530.605	5.022.267.111	-710.249.741	2.467.030.373	486	12,77%	-135.627	-5.237	9	-464.364.410	710.249.741	0
29/07/2011	5.136.198.197	5.023.785.292	-710.825.547	2.466.487.662	485	12,75%	-135.485	-5.247	-10	-465.313.325	710.825.547	0
01/08/2011	5.137.867.565	5.026.474.381	-715.041.263	2.465.945.778	484	12,67%	-135.552	-5.275	-28	-468.174.354	715.041.263	0
02/08/2011	5.139.536.241	5.029.407.068	-720.064.402	2.465.403.473	484	12,55%	-135.983	-5.295	-20	-470.481.423	720.064.402	0
03/08/2011	5.141.205.460	5.030.918.678	-720.592.097	2.464.861.338	483	12,54%	-135.810	-5.306	-11	-471.477.385	720.592.097	0
04/08/2011	5.142.875.220	5.032.528.170	-721.902.691	2.464.319.375	482	12,40%	-136.070	-5.305	1	-472.001.670	721.902.691	0
05/08/2011	5.144.545.523	5.034.636.592	-724.562.295	2.463.777.583	481	12,27%	-136.325	-5.315	-10	-473.422.536	724.562.295	0
08/08/2011	5.146.216.369	5.037.226.835	-729.156.293	2.463.235.949	481	12,00%	-137.283	-5.311	4	-474.239.596	729.156.293	0
09/08/2011	5.147.887.757	5.038.856.350	-730.461.674	2.462.694.489	480	11,86%	-137.559	-5.310	1	-474.730.539	730.461.674	0
10/08/2011	5.149.559.688	5.039.954.810	-729.670.869	2.462.153.202	479	11,88%	-137.250	-5.316	-6	-475.183.336	729.670.869	0
11/08/2011	5.151.232.162	5.040.662.443	-727.391.780	2.461.612.090	479	11,97%	-136.931	-5.312	4	-474.422.824	727.391.780	0
12/08/2011	5.152.905.179	5.044.317.202	-734.490.012	2.461.071.154	478	11,86%	-137.083	-5.358	-46	-478.974.289	734.490.012	0
15/08/2011	5.154.578.740	5.046.287.141	-736.289.537	2.460.530.393	477	11,86%	-136.857	-5.380	-22	-480.941.849	736.289.537	0
16/08/2011	5.156.252.844	5.048.591.588	-739.106.052	2.459.989.808	476	11,85%	-136.689	-5.407	-27	-483.446.982	739.106.052	0
17/08/2011	5.157.927.492	5.051.352.525	-743.707.753	2.459.449.401	476	11,70%	-137.227	-5.420	-12	-485.207.269	743.707.753	0
18/08/2011	5.159.601.394	5.053.605.836	-747.123.680	2.458.908.557	475	11,47%	-137.793	-5.422	-3	-486.408.302	747.123.680	0
19/08/2011	5.161.277.129	5.055.083.571	-747.601.588	2.458.368.373	474	11,43%	-137.703	-5.429	-7	-487.210.866	747.601.588	0
22/08/2011	5.162.952.119	5.056.400.589	-747.425.366	2.457.827.302	473	11,44%	-137.454	-5.438	-9	-487.956.493	747.425.366	0
23/08/2011	5.164.628.942	5.057.365.287	-746.370.216	2.457.287.112	473	11,41%	-137.541	-5.427	11	-487.067.034	746.370.216	0
24/08/2011	5.166.306.310	5.058.283.155	-745.168.258	2.456.747.103	472	11,40%	-137.353	-5.425	1	-487.000.712	745.168.258	0
25/08/2011	5.167.982.932	5.060.273.348	-746.921.986	2.456.206.660	471	11,41%	-137.068	-5.449	-24	-489.096.800	746.921.986	0
26/08/2011	5.169.660.097	5.063.393.503	-752.788.227	2.455.666.398	470	11,20%	-137.578	-5.472	-22	-492.040.678	752.788.227	0
29/08/2011	5.171.337.807	5.067.468.276	-761.053.332	2.455.126.319	470	11,11%	-137.933	-5.518	-46	-496.608.988	761.053.332	0
30/08/2011	5.173.016.061	5.067.646.723	-757.373.825	2.454.586.422	469	11,15%	-137.530	-5.507	11	-495.445.473	757.373.825	0
31/08/2011	5.174.694.860	5.068.677.634	-756.611.911	2.454.046.709	468	11,09%	-137.497	-5.503	4	-495.322.066	756.611.911	0
01/09/2011	5.176.308.796	5.072.083.869	-764.473.868	2.453.476.177	468	10,56%	-139.389	-5.484	18	-496.040.825	764.473.868	0
02/09/2011	5.177.923.235	5.071.248.905	-757.500.885	2.452.905.807	467	10,76%	-138.451	-5.471	13	-493.979.869	757.500.885	0
05/09/2011	5.179.538.177	5.073.495.463	-760.585.055	2.452.335.636	466	10,66%	-138.574	-5.489	-17	-496.006.703	760.585.055	0
06/09/2011	5.181.153.623	5.076.297.104	-764.958.854	2.451.765.665	465	10,64%	-138.385	-5.528	-39	-499.607.443	764.958.854	0
08/09/2011	5.182.769.573	5.076.732.496	-761.815.493	2.451.195.895	465	10,81%	-137.799	-5.528	-1	-498.924.593	761.815.493	0
09/09/2011	5.184.386.027	5.079.581.609	-766.479.084	2.450.626.326	464	10,74%	-137.784	-5.563	-34	-502.323.681	766.479.084	0
12/09/2011	5.186.002.985	5.080.848.795	-766.675.670	2.450.056.959	463	10,65%	-137.876	-5.561	2	-502.546.243	766.675.670	0
13/09/2011	5.187.620.448	5.081.416.646	-764.077.061	2.449.487.794	462	10,77%	-137.215	-5.568	-8	-502.715.186	764.077.061	0
14/09/2011	5.189.238.415	5.081.957.229	-761.632.814	2.448.918.833	462	10,83%	-136.983	-5.560	8	-501.654.596	761.632.814	0
15/09/2011	5.190.856.886	5.083.533.366	-762.535.991	2.448.350.076	461	10,79%	-136.902	-5.570	-10	-502.755.765	762.535.991	0
16/09/2011	5.192.475.863	5.084.672.575	-762.283.936	2.447.782.382	460	10,71%	-136.945	-5.566	4	-502.801.462	762.283.936	0
19/09/2011	5.194.094.046	5.085.145.439	-759.791.817	2.447.214.308	459	10,72%	-136.650	-5.560	6	-502.171.140	759.791.817	0
20/09/2011	5.195.712.733	5.086.266.993	-759.047.737	2.446.646.442	459	10,78%	-136.464	-5.562	-2	-502.119.037	759.047.737	0
21/09/2011	5.197.333.224	5.086.189.219	-754.690.165	2.446.080.162	458	10,87%	-135.883	-5.554	8	-500.929.750	754.690.165	0
22/09/2011	5.198.954.221	5.086.422.977	-751.793.110	2.445.514.118	457	10,80%	-135.880	-5.533	21	-499.329.006	751.793.110	0
23/09/2011	5.200.575.722	5.090.954.917	-761.897.998	2.444.948.284	457	10,54%	-136.803	-5.569	-37	-503.836.907	761.897.998	0
26/09/2011	5.202.197.730	5.095.057.738	-770.690.435	2.444.382.659	456	10,31%	-137.363	-5.611	-41	-508.636.327	770.690.435	0
27/09/2011	5.203.820.243	5.095.356.009	-767.075.949	2.443.817.244	455	10,52%	-136.374	-5.625	-14	-508.937.742	767.075.949	0
28/09/2011	5.205.443.263	5.097.437.614	-769.389.610	2.443.252.041	454	10,48%	-136.254	-5.647	-22	-511.091.472	769.389.610	0
29/09/2011	5.207.066.789	5.099.249.656	-770.666.510	2.442.687.050	454	10,53%	-136.098	-5.663	-16	-512.315.408	770.666.510	0
30/09/2011	5.208.690.821	5.101.200.968	-772.893.351	2.442.122.272	453	10,40%	-136.307	-5.670	-8	-513.622.766	772.893.351	0
03/10/2011	5.210.316.661	5.104.030.935	-777.899.196	2.441.558.317	452	10,19%	-136.782	-5.687	-17	-516.131.300	777.899.196	0
04/10/2011	5.211.941.707	5.104.801.025	-775.890.560	2.440.994.120	451	10,33%	-136.059	-5.703	-15	-516.891.173	775.890.560	0
05/10/2011	5.213.567.260	5.106.982.597	-778.582.999	2.440.430.138	451	10,26%	-136.294	-5.713	-10	-518.109.435	778.582.999	0
06/10/2011	5.215.193.319	5.108.010.612	-777.300.926	2.439.866.372	450	10,40%	-135.540	-5.735	-22	-519.442.407	777.300.926	0
07/10/2011	5.216.819.886	5.109.878.097	-778.670.756	2.439.302.821	449	10,47%	-135.054	-5.766	-31	-521.899.088	778.670.756	0
10/10/2011	5.218.446.960	5.111.116.472	-778.233.494	2.438.739.487	448	10,53%	-134.608	-5.781	-16	-523.056.484	778.233.494	0
11/10/2011	5.220.074.541	5.113.506.282	-781.424.426	2.438.176.370	448	10,49%	-134.753	-5.799	-17	-524.840.574	781.424.426	0
13/10/2011	5.221.701.325	5.114.509.116	-780.521.784	2.437.612.861	447	10,48%	-134.537	-5.802	-3	-525.118.776	780.521.784	0
14/10/2011	5.223.328.616	5.115.000.711	-777.815.965	2.437.049.572	446	10,58%	-133.950	-5.807	-5	-525.111.680	777.815.965	0
17/10/2011	5.224.956.414	5.116.348.466	-777.861.947	2.436.486.502	446	10,59%	-133.912	-5.809	-2	-525.239.705	777.861.947	0
18/10/2011	5.226.584.720	5.119.240.699	-782.635.516	2.435.923.652	445	10,51%	-133.949	-5.843	-34	-528.720.369	782.635.516	0
19/10/2011	5.228.214.839	5.121.356.480	-785.006.712	2.435.361.632	444	10,47%	-133.813	-5.866	-24	-531.023.725	785.006.712	0
20/10/2011	5.229.781.683	5.121.945.213	-782.862.319	2.434.770.387	443	10,53%	-133.364	-5.870	-4	-531.066.249	782.862.319	0
21/10/2011	5.231.348.996	5.123.525.628	-783.841.065	2.434.179.379	443	10,51%	-133.461	-5.873	-3	-531.483.120	783.841.065	0
24/10/2011	5.232.916.779	5.124.588.138	-783.443.955	2.433.588.349	442	10,43%	-133.452	-5.871	3	-531.597.297	783.443.955	0
25/10/2011	5.234.485.032	5.126.395.734	-784.966.746	2.432.997.557	441	10,45%	-133.140	-5.896	-25	-533.787.862	784.966.746	0
26/10/2011	5.236.053.755	5.128.384.399	-787.295.395	2.432.407.002	440	10,35%	-133.226	-5.909	-14	-535.517.632	787.295.395	0
27/10/2011	5.237.622.948	5.128.873.071	-784.865.774	2.431.816.686	440	10,42%	-132.990	-5.902	8	-534.465.973	784.865.774	0
28/10/2011	5.239.192.611	5.130.943.179	-787.320.379	2.431.226.609	439	10,37%	-132.912	-5.924	-22	-536.706.371	787.320.379	0
31/10/2011	5.240.762.745	5.133.063.441	-789.922.157	2.430.636.773	438	10,31%	-132.859	-5.946	-22	-538.988.444	789.922.157	0

Fonte: Elaboração própria

A tabela 15 acima mostra o desempenho da carteira dia-a-dia de acordo com as variações de prazo e da curva de juros. A fim de manter a *duration* total da carteira igual a zero a quantidade de contratos DI – Futuro foi ajustada dia-a-dia. O período de avaliação foi de 3 meses, de julho/2011 a outubro/2011.

5 CONCLUSÃO

O CDB tem papel fundamental na gestão de ativos e passivos de empresas, instituições financeiras e até mesmo pessoas físicas e dentro dessa classe de ativos o CDB DI se destaca com grande parte do volume operado. No entanto, a literatura ainda é insipiente ao tratar de algumas especificidades desse produto.

O trabalho, assim, teve como objetivo apontar o risco de taxas de juros associado ao CDB DI e propor uma estratégia de mitigação desse risco. O risco apontado decorre de operações indexadas ao DI cujo percentual de remuneração é diferente de 100%. Nesse caso, o valor atualizado do título não será igual ao valor de mercado do mesmo sendo, assim, sujeito a variações de acordo com as taxas de juros vigentes no mercado. Sobre o tema, o próprio BCB reconhece a questão e propõe que percentuais de remuneração de, por exemplo 110% geram uma exposição em taxa prefixada de 10% (dependendo se a ponta é ativa ou passiva).

A estratégia de avaliação e *hedge* do risco foi baseado na metodologia da *duration.* Tal metodologia considera movimentos paralelos e equânimes ao longo da curva de juros, o que, para movimentos pequenos, é eficiente, vide Fabozzi (1997). Para a carteira simulada o hedge via *duration* praticamente eliminou o risco de taxas de juros para um portfolio de R$ 5 bilhões.

Outro ponto relevante da pesquisa foi concluir que, assim como Eid Jr. e Ohanian (2008), a convexidade é indicador importante com relação ao rebalanceamento do *hedge,* e que, no caso de um portfolio de aplicações em CDB DI, realizar o *hedge* dinamicamente sempre gerará benefícios de convexidade.

Por fim, o trabalho apresenta algumas limitações como não considerar risco de crédito associado ao CDB DI, fator esse que constitui parte relevante para a determinação da remuneração do mesmo. Também, de modo a testar a efetividade do hedge via duration, seria interessante compará-lo com alguma outra metodologia como a Análise de Componentes Principais, por exemplo.

REFERÊNCIAS

Allayanis, G; Weston, J. - The use of foreign derivatives and firm market value. The Review of Financial Studies, v. 14, n. 1, p. 243-276, (2001).

D. Heath, R. Jarrow, and A. Morton, "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates; A New Metholodology," Econometrica, 60, 1 (1992),77-105.

Fabozzi, F. The handbook of fixed income securities. 5th ed. McGraw-Hill, 1997.

Froot, K., D. Scharfstein, and J. Stein, “Risk Management: Coordinating Corporate Investment and Financing Policies,” Journal of Finance, 48, 1624–1658. (1993)

Ohanian, George, Eid Jr., Willian, Operações indexadas ao percentual do CDI: Precificação e hedge usando o contrato de DI futuro da BM&F. São Paulo: V Encontro Brasileiro de Finanças - Derivativos e Risco, 2004

Hübner C.A.F. , Risco e Precificação de Operações com Taxa Percentual do CDI. Dissertação de Mestrado. EPGE/FGV-RJ, (2003)

John Hull, Options, futures, and other derivatives. Upper Saddle River: PrenticeHall, Inc. (2006).

Modigliani, F.; Miller, M. "The Cost of Capital, Corporation Finance and the Theory of Investment". American Economic Review 48 (3): 261–297. (1958).

Securato, José Roberto et al. Cálculo Financeiro das Tesourarias – Banco e Empresas. 3. ed. São Paulo: Saint Paul Institute of Finance, 2000.

Smith, C., and R. Stulz, “The Determinants of Firms’ Hedging Policies,” Journal of Financial and Quantitative Analysis, 20, 391–405. (1985).

Visvanathan, G., “Who Uses Interest Rate Swaps? A Cross-Sectional Analysis,” Journal of Accounting, Auditing and Finance, 13, 173–200. (1998)

APÊNDICE

Fórmula da *duration* aplicada no trabalho:

$$P(t,T) = \frac{NV_t.\left\{\left[(1+i(t,T))^{\frac{1}{252}} - 1\right].\theta + 1\right\}^{T-t}}{\left[(1+i(t,T))^{\frac{T-t}{252}}\right]}$$

Chamando $i(t,T)^{\frac{1}{252}} - 1$ de $r(t,T)$ temos:

$$P(t,T) = NV_t(1 + r(t,T)\theta)(1 + r(t,T))^{-(T-t)}$$

Assim:

$$\frac{\partial P(t,T)}{\partial i(t,T)} = NV_t(T-t)\left[\frac{\theta(1+\theta r(t,T))^{(T-t-1)}}{(1+r(t,T))^{(T-t)}} - \frac{(1+\theta r(t,T))^{(T-t)}}{(1+r(t,T))^{(T-t+1)}}\right]$$

$$= NV_t(T-t)\left[\frac{\theta P(t,T)}{(1+\theta r(t,T))NV_t} - \frac{P(t,T)}{NV_t(1+r(t,T))}\right]$$

$$= P(t,T)(T-t)\left[\frac{(\theta-1)}{(1+\theta r(t,T))(1+r(t,T))}\right]$$

Portanto:

$$\frac{\partial P(t,T)}{\partial i(t,T)} = P(t,T)\left\{\frac{(T-t)(\theta-1)}{\left(1+\theta\left[(1+i(t,T))^{\frac{1}{252}} - 1\right]\right)\left(1+\left[(1+i(t,T))^{\frac{1}{252}} - 1\right]\right)}\right\}$$

Fórmula da convexidade aplicada no trabalho:

Dada a primeira derivada:

$$\frac{\partial P(t,T)}{\partial i(t,T)} = P(t,T)\left\{\frac{(T-t)(\theta-1)}{\left(1+\theta\left[(1+i(t,T))^{\frac{1}{252}}-1\right]\right)\left(1+\left[(1+i(t,T))^{\frac{1}{252}}-1\right]\right)}\right\}$$

A convexidade será:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 P(t,T)}{\partial i^2(t,T)} = &\left\{\frac{(T-t)P(t,T)\theta^2(T-t-1)\left\{\left[(i(t,T)+1)^{\frac{1}{252}}-1\right]\theta+1\right\}^{T-t-2}}{63.504(i(t,T)+1)^{\frac{251}{126}}(i(t,T)+1)^{\frac{T-t}{252}}}\right\}\\ &-\left\{\frac{251(T-t)P(t,T)\theta\left\{\left[(i(t,T)+1)^{\frac{1}{252}}-1\right]\theta+1\right\}^{T-t-1}}{63.504(i(t,T)+1)^{\frac{503}{252}}(i(t,T)+1)^{\frac{T-t}{252}}}\right\}\\ &-\left\{\frac{(T-t)^2P(t,T)\theta\left\{\left[(i(t,T)+1)^{\frac{1}{252}}-1\right]\theta+1\right\}^{T-t-1}}{31.752(i(t,T)+1)^{\frac{251}{252}}(i(t,T)+1)^{\frac{T-t}{252}+1}}\right\}\\ &-\left\{\frac{(T-t)P(t,T)\left(-\frac{T-t}{252}-1\right)\left\{\left[(i(t,T)+1)^{\frac{1}{252}}-1\right]\theta+1\right\}^{T-t}}{252(i(t,T)+1)^{\frac{T-t}{252}+2}}\right\}\end{aligned}$$