Insper Instituto de Ensino e Pesquisa

Faculdade de Economia e Administração

Marcello Junqueira Franco Duarte dos Santos

Teoria da decisão: Teoria clássica, teoria moderna e efeitos de *framing*

São Paulo

2018

Marcello Junqueira Franco Duarte dos Santos

Teoria da decisão: Teoria clássica, teoria moderna e efeitos de *framing*

Monografia apresentada ao curso de Ciências Econômicas, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Bacharel em Economia do Insper

Orientador: Prof. Dr. José Heleno Faro

São Paulo

2018

Franco, Marcello Junqueira.

Teoria da decisão: Teoria clássica, teoria moderna e efeitos de *framing/* Marcello Junqueira Franco Duarte dos Santos – São Paulo, 2018

Monografia: Faculdade de Ciências Econômicas. Insper

Orientador: Prof. Dr. José Heleno Faro

1. Frame Effect 2. Teoria da Decisão 3. RSM 4. Listagem

Marcello Junqueira Franco Duarte dos Santos

Teoria da decisão: Teoria clássica, teoria moderna e efeitos de *framing*

Monografia, aprovação no curso de bacharelado de ciências econômicas; Insper Instituto de Ensino e Pesquisa

Data de aprovação: ___/___/___

Banca Examinadora

____

Prof. Dr. José Heleno Faro

Insper

____

Prof. Antonio Bruno Morales

Insper

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer a minha família, pelo amor e suporte durante todos esses anos.

Gostaria de destinar agradecimentos a José Heleno Faro, meu orientador e possibilitador deste trabalho.

Agradeço também, aos inúmeros amigos que conquistei durante a graduação. Ao lado de vocês, longos dias tornaram-se curtos e os últimos anos passaram voando.

Dedicatória

Este trabalho é dedicado a você, leitor. Conhecimento é o bem mais valioso que podemos ter. Quando compartilhado, é agente transformador de histórias e definidor de futuros. Que possamos disseminar todo conhecimento gerado, de forma livre.

The Hollow men

Mistah Kurtz-he dead
A penny for the Old Guy

I

We are the hollow men
We are the stuffed men
Leaning together
Headpiece filled with straw. Alas!
Our dried voices, when
We whisper together
Are quiet and meaningless
As wind in dry grass
Or rats' feet over broken glass
In our dry cellar

Shape without form, shade without colour,
Paralysed force, gesture without motion;

Those who have crossed
With direct eyes, to death's other Kingdom
Remember us-if at all-not as lost
Violent souls, but only
As the hollow men
The stuffed men.

II

Eyes I dare not meet in dreams
In death's dream kingdom
These do not appear:
There, the eyes are
Sunlight on a broken column
There, is a tree swinging
And voices are
In the wind's singing
More distant and more solemn
Than a fading star.

Let me be no nearer
In death's dream kingdom
Let me also wear
Such deliberate disguises
Rat's coat, crowskin, crossed staves
In a field
Behaving as the wind behaves
No nearer-

Not that final meeting
In the twilight kingdom

III

This is the dead land
This is cactus land
Here the stone images
Are raised, here they receive
The supplication of a dead man's hand
Under the twinkle of a fading star.

Is it like this
In death's other kingdom
Waking alone
At the hour when we are
Trembling with tenderness
Lips that would kiss
Form prayers to broken stone.

IV

The eyes are not here
There are no eyes here
In this valley of dying stars
In this hollow valley
This broken jaw of our lost kingdoms

In this last of meeting places
We grope together
And avoid speech
Gathered on this beach of the tumid river

Sightless, unless
The eyes reappear
As the perpetual star
Multifoliate rose
Of death's twilight kingdom
The hope only
Of empty men.

V

Here we go round the prickly pear
Prickly pear prickly pear
Here we go round the prickly pear
At five o'clock in the morning.

Between the idea
And the reality
Between the motion
And the act
Falls the Shadow

For Thine is the Kingdom

Between the conception
And the creation
Between the emotion
And the response
Falls the Shadow
Life is very long

Between the desire
And the spasm
Between the potency
And the existence
Between the essence
And the descent
Falls the Shadow
For Thine is the Kingdom

For Thine is
Life is
For Thine is the

This is the way the world ends
This is the way the world ends
This is the way the world ends
Not with a bang but a whimper.

T. S. Eliot, 1925

Resumo

Este trabalho tem como objetivo principal apresentar a evolução da teoria da escolha desde a abordagem clássica, baseada no axioma fraco da preferência revelada, até alguns desenvolvimentos recentes, com destaque para a abordagem que contempla os chamados efeitos de "framing".

Na exposição da teoria básica, os conceitos de regras de escolha, preferências e funções de utilidade são apresentados. Em especial, as relações existentes entres tais abordagens são apresentadas e discutidas. Em seguida, a ideia de "frame" é introduzida e alguns exemplos são discutidos, o que inclui "frames" provocados pela existência de uma alternativa padrão, listagem, prazo. Especial atenção é dada ao modelo que incorpora ainda atenção limitada, conhecido como "rational shortlist method".

Palavras-chave: Teoria da Decisão, Frame Effect, Rational Shortlist Method, Axioma Fraco das Preferências Reveladas

Abstract

The main objective of this work is to present the evolution of the choice theory from the classical approach, based on the weak axiom of revealed preference, to some recent developments, with emphasis on the so called "framing" approach.

In the discussion of basic theory, the concepts of rules of choice, preferences, and utility functions are presented. In particular, the relationships existing between such approaches are presented and discussed. Then the idea of "frame" is introduced and some examples are discussed, which includes "frames" caused by the existence of a standard alternative, listing, term. Special attention is given to the model that incorporates still limited attention, known as "rational shortlist method".

Key-words: Decision Theory, Frame Effect, Rational Shortlist Method, Weak Axiom of Revealed Preferences

Lista de Gráficos

Lista de Figuras

Sumário

1. Introdução

O desenvolvimento da microeconomia se deu a partir da necessidade de os economistas analisarem diversas questões relacionadas aos problemas de alocação e escolha em diferentes contextos. Mais especificamente, as escolhas individuais sempre pertenceram a um campo que não apresentava consenso dentro da academia, delimitado pela matemática, economia e psicologia. A microeconomia, como ciência, trouxe relevantes avanços para esse campo muito pouco explorado. O campo da teoria da decisão se desenvolveu a partir dos conceitos de relações de preferências e regras de escolha. Utilizando o método axiomático como principal referência metodológica.

Os dois modelos, complementares, enriquecem o debate desde suas formulações iniciais. Ambos amplamente respeitados e aceitos, diferenciam-se em diversos pontos, deixando a cargo do interprete decidir qual lhe é mais acertada. Quem decide por estudar as relações de preferências, trabalha em um campo de ordenamento de preferências para modelar as escolhas. Caso as preferências do indivíduo respeitem um conjunto de propriedades que incluem completude e transitividade, suas preferências se comportam como se regidas por uma função utilidade. E dessa forma, seguindo a maximização dessa função, 2 modelos surgem das escolhas individuais e se tornam tratáveis com a aplicação do cálculo diferencial.

Por exemplo, um indivíduo compara dois bens x e y e percebe que x lhe proporcionará um "bem-estar" maior. À essa noção ampla de "bem-estar", chama-se "utilidade". Que lê-se como "x é preferido a y", ou seja, caso defrontado com uma situação em que tenha que escolher entre "x" e "y", escolherá "x". As relações de preferências discorrem desse exemplo simples.

Ao tratar de regras de escolha (ou regra de decisão) faz-se o uso de outro ferramental para abordar as questões. É usada uma estrutura de decisão, composta por: um domínio e uma regra de escolha.

O domínio é entendido como sendo o conjunto de opções disponíveis para escolha, e a regra de escolha o apanhado de critérios que serão aplicados sobre o domínio para que o indivíduo possa revelar suas escolhas

Ambas as abordagens atacam as mesmas relacionadas ao problema de decisão. Para regras de decisão, trata-se de uma abordagem mais clara do ponto de vista emypírico, onde são propostos axiomas testáveis como o α e β de Sen e o Axioma Fraco das Preferências Reveladas. No tocante das relações de preferência, são analisados pares de comparações, usados para definir escolhas binárias. A relação entre os dois modelos será explorada na sequência do trabalho

O desenrolar do trabalho direcionará ao estudo dos efeitos de framing. De forma sucinta, tem-se um "*framing effect*" quando não apenas as alternativas, mas também o contexto que estão inseridas, impacta de maneira direta a decisão tomada sobre um determinado conjunto de alternativas. Os frames podem se diferenciar sobre a ordenação em que as alternativas são apresentadas, o destaque que são dados a elas, o intervalo de tempo disponível para que a escolha seja tomada, dentre outras formas.

De forma a exemplificar, neste caso analisando o menu de um restaurante. Mantidos fixos os elementos, ou seja; pratos, bebidas, sobremesas. Um exemplo de frame é quando se tem uma escolha diferente para cada ordenação do menu, de tal forma a ter tantas possibilidades de escolhas diferentes quanto possibilidades de ordenação dos elementos nesse menu. Tal possibilidade parece consistente com o contexto de experiências do dia-a-dia, seja por qual motivo, pessoas podem mudar suas decisões baseado em como as alternativas lhe são apresentadas. Exemplos como esse deixam em evidência a importância do estudo de *framing*, tendo as mais diversas aplicações, desde, como mostrado, menus de restaurantes, e-commerces e até mesmo eleições.

Por fim, será dada especial ênfase ao modelo conhecido por Rational Shortlist Method. Quando um processo de escolha é dividido em etapas que se constituem da maximização de duas ou mais, preferências, iteradamente. Podendo, também, ser resultado de maximizações de indivíduos distintos.

2. Abordagem Clássica

2.1 Relações de Preferências.

Ao tratar de decisões, é posto que preferência é uma ordenação de possibilidades de escolha, baseada no benefício que tais escolhas podem acarretar. Nessa abordagem, o ordenamento de possibilidades de escolhas leva, sob determinadas hipóteses sobre o conjunto de escolhas, à uma ‘escolha ótima’, que gera o maior bem-estar possível.

X representa um conjunto de alternativas (ou opções de escolha), sob X, pode-se definir uma relação de preferência, representada pelo símbolo “$\succsim$” identifica comparações de preferência entre alternativas no sentido fraco. Caso representado dessa forma “$\succ$”, tratamos de preferências no sentido forte (ou estrito). A partir da relação representada abaixo:

$$x \succsim y, \text{ com } x, y \in X$$

Pode se dizer que “x é pelo menos tão bom quanto y, para ‘x’ e ‘y’ pertencentes à um espaço de possibilidades.”

Com a relação de preferência $\succsim$ apresentada acima, é possível induzir a relação de preferência estrita “$\succ$” e a relação de indiferença “$\sim$”.

A relação de preferência estrita é definida por:

$$x \succ y \Leftrightarrow x \succsim y \text{ e não } y \succsim x$$

A relação de indiferença é definida por:

$$x \sim y \Leftrightarrow x \succsim y \text{ e } y \succsim x$$

Propriedades da preferência do consumidor

- Completude

  De maneira intuitiva: Para todo par de opções x e y, o tomador de decisão é capaz de elencar suas preferências em termos de A e B. Sendo X o conjunto de escolhas do indivíduo, $\forall\, x, y \in X$, tem-se que $x \succsim y$ ou $y \succsim x$.

- Transitividade

Preferências são Transitivas: $\forall$ x, y, z $\in$ X, x $\succsim$ y e y $\succsim$ z $\Rightarrow$ x $\succsim$ z

- Continuidade

Para ilustrar o conceito: Se o conjunto de escolhas X for $\mathbb{R}^2{}_+$, pode-se introduzir uma noção de continuidade de preferências do tipo: x $\succ$ y, e z for suficientemente próximo à y, então, x $\succ$ z

Satisfeitas essas três propriedades, e suas implicações, pode-se ter um ‘ranqueamento racional’, via “relações de preferências”. Subscrito ao que está posto, alguns conceitos importantes fundamentam logica e matematicamente as relações traçadas. A função utilidade, de grande importância para o estudo de microeconomia, será desenvolvida no tópico a seguir.

2.2 Função Utilidade

Na economia, muitas vezes relações de preferências são representadas em termos de utilidade. Uma função utilidade garante que; caso as preferências de um indivíduo sigam as propriedades colocadas acima, suas escolhas comportam-se de forma equivalente a maximização de uma função de utilidade. Alguns casos, ainda, podem apresentar parâmetros mais objetivos e quantificáveis, como quando um agente analisa uma decisão de investimento financeiro. Uma função utilidade pode ter formatos distintos, dependendo da situação de escolha, das opções disponíveis, das preferências do consumidor e por uma série de outras variáveis.

2.2.1 Cobb Douglas

Um dos formatos mais usuais da função utilidade é uma função de utilidade do tipo “Cobb-Douglas”, pois apresenta boas propriedade que garantem conveniência analítica. Por exemplo:

Considerando que um indivíduo tenha um comportamento de escolha em que consuma, à distintos níveis de preço, também, que x é a quantidade consumida do primeiro bem e y a quantidade consumida do segundo bem e que o mesmo indivíduo consome proporções α de x e (1-α) de y sendo que $\alpha \in (0,1)$, se e somente se sua preferência pode ser representada por uma função utilidade de forma:

$$u\,(x, y) = x^{\alpha}\, y^{1-\alpha}$$

Dessa forma, o consumidor efetua a escolha de quanto, dada sua renda “w” os preços do bem 1 (P_1) e do bem 2 (P_2), de “x” e “y” consumirá, e não se consumirá “x” ou “y”. Graficamente:

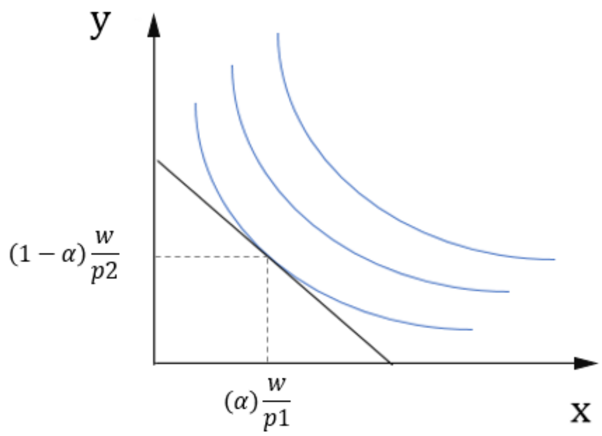

Gráfico 1 - Utilidade Cobb-Douglas

Com sua restrição orçamentária definida por B (p_1, p_2, w) = $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : p_1x + p_2y = w\}$.
O gráfico acima representa a aproximação das curvas da função utilidade à reta de restrição orçamentária, que representa uma limitação à escolha do agente dado seu orçamento, nos eixos, temos as quantidades consumidas dos bens “x” e “y”. Ao tocar a reta de restrição orçamentária, a curva azul delimita as proporções ótimas de consumo de cada bem.

2.2.2 Caso para bens complementares

Outro caso particular que pode ser estudado é o de bens complementares. Nos deparamos com essa situação quando temos bens que dependem de outros para seu consumo, como o caso de carros e gasolina. Nesse caso, a função utilidade desses bens é tida como:

$$u(x, y) = \min(ax, by)$$

Onde “a” e “b” são as relações de grandeza nas quais se consome os bens, no exemplo, precisa-se de “b” litros de gasolina para movimentar “a” carros.

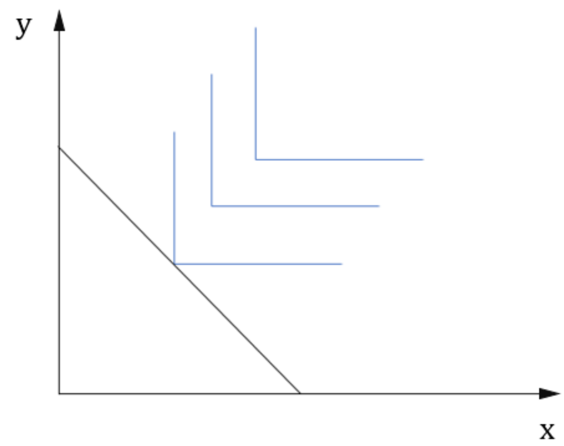

Gráfico 2 - Utilidade Bens Complementares

Assim como anteriormente, o gráfico a cima demonstra como um indivíduo ranqueia diferentes combinações de dois bens hipotéticos em um cenário com bens complementares. A solução para esse problema é uma solução de “quina” dado que a maior utilidade é encontrada quando um indivíduo obtém proporções fixas de bens “a” e “b”. Assim como colocado acima; caso um carro tenha capacidade para 50 litros de combustível, dado apenas um carro, e é ofertado 51 litros, esse litro adicional não gerará um ganho de utilidade, já que a capacidade máxima já foi atingida.

2.2.3 Escolha sob Incerteza

Outro contexto muito importante em economia é o de escolha sob incerteza, onde o indivíduo não sabe ao certo o resultado e consequência de sua escolha. Como no caso de uma loteria, neste contexto, uma noção básica de loteria, onde tem-se um $X \subseteq \mathbb{R}$ que representa as situações passiveis de ocorrer (resultados de jogos, cenários da economia, resultados eleitorais e etc...). A loteria é representada por $L = (x_i, ..., x_n; p_i, ..., p_n)$ sob $\mathbb{R}_+$. A interpretação dessa função L é: o resultado obtido, caso o resultado x_i se concretize, com probabilidade p_i. Nessas situações, um modelo muito importante de ter em mente é o de Utilidade Esperada, representada abaixo por “U(L)”, onde é adicionado um fator “probabilidade”, como feito acima, ao payoff.

$$U(L) = \Sigma^{n}_{i=1}\ u(x_i)p_i$$

Nessa função de utilidade esperada, onde “p_i" representa a probabilidade do resultado “i” ocorrer, e $u(x_i)$ a utilidade caso esse evento ocorra, tem-se uma ideia de como o comportamento de escolha é definido, para esses casos. Também, pode-se classificar indivíduos em diferentes categorias ao tratar de sua relação com o risco. Agentes podem ser classificados em um espectro que compreende de agentes avessos ao risco até amantes ao risco. A depender de cada classificação, o tratamento da função utilidade esperada muda. Indivíduos avessos ao risco são agentes que, em um cenário de incerteza, onde pode-se expor duas situações; um ganho certeiro de cinquenta reais, portanto, com valor esperado de cinquenta reais ou, por outro lado, um ganho de cem reais com 50% de chance de se concretizar e um de zero reais com outros 50% de chance, portanto, com valor esperado também de cinquenta reais. Opta pela primeira situação.

R\$ 50 . 100% ou R\$ 100 . 50% + R\$ 0 . 50%

exemplo da situação descrita acima

Em um cenário de jogos de aposta, pode-se mostrar a função utilidade para os dois perfis de jogadores dessa forma:

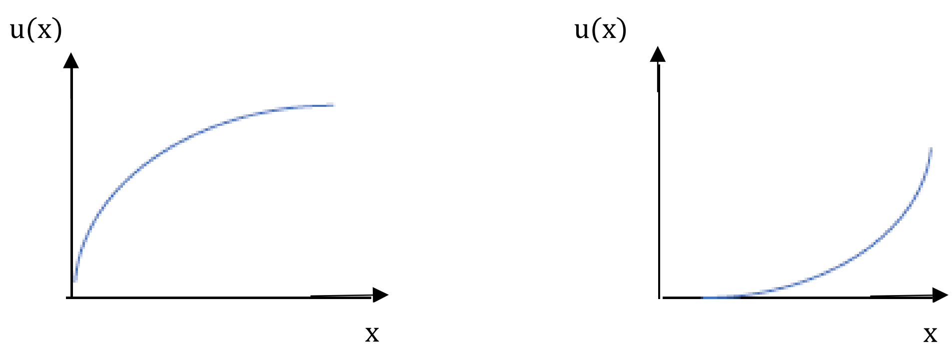

Gráfico 3 e 4 - Aversão ao Risco (dir) e Amor ao Risco (esq)

A esquerda, temos a representação para um jogador avesso ao risco, que, ao ver uma possibilidade de perder sua “riqueza” acumulada das apostas, começa a reconsiderar se deseja aumentar a aposta. Na direita, o oposto, o jogador que começa a ganhar apostas e vê uma utilidade muito grande em apostar mais ainda.

Exemplos como esses elucidam a importância das funções utilidade e, principalmente, como se relacionam com os conceitos anteriores de relações de preferência

2.3 Regras de Escolha:

Sendo um X um conjunto finito de todas as alternativas que um indivíduo se defronta, 2^x é conjunto de partes de X, ou seja: $2^x = \{A: A \subset X\}$ e ainda, $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ é um subconjunto de 2^x que não contenha $\emptyset$. $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ representa uma listagem extensa de todos os experimentos de escolha, sob os quais o indivíduo pode tomar sua decisão.

Para cada $B \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$, o indivíduo pode escolher entre um ou mais elementos de B, que pode ser representado por:

Definição 2.1

Uma regra de escolha é uma função

$$C: \boldsymbol{\mathcal{B}} \rightarrow 2^x \text{ tal que } C(B) \subset B$$

A interpretação da função de escolha é que C (B) represente os elementos de B que o considera melhores.

Estrutura de escolha:

Uma estrutura de escolha tripla é um trio $(X, \boldsymbol{\mathcal{B}}, C)$, formada por um conjunto de alternativas X, uma lista de conjuntos de escolha $\boldsymbol{\mathcal{B}} \subset 2^x$ e uma função de escolha $C: \boldsymbol{\mathcal{B}} \rightarrow 2^x$.

Exemplo: Supondo que "m" estudantes são convidados para participar de um experimento, envolvendo suas preferências. São utilizados "n" objetos, assim, $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. O experimentador apresenta os m-estudantes aos n-objetos e todas as suas combinações possíveis. Os estudantes agora devem escolher quais preferem.

Dessa forma, a lista dos conjuntos de escolhe é.:

$$\boldsymbol{\mathcal{B}} = \{\{x_i, x_j\}: i, j \in \{1,..., n\} \text{ com } i \neq j\}$$

Dessa forma, cada estudante tem uma regra de escolha distinta do tipo $C_k: \boldsymbol{\mathcal{B}} \rightarrow 2^x$, que atribui um dos elementos de $\{x_i, x_j\}$, com $i \neq j$, a escolha $C_k(\{x_i, x_j\}) \subset \{x_i, x_j\}$.

Por exemplo: Supondo apenas 3 "sabores de sorvete" e apenas 1 estudante, cujo comportamento revele que:

1. C_0 ({Chocolate, Creme}) = {Chocolate};
2. C_0 ({Chocolate, Pistache}) = {Pistache};
3. C_0 ({Creme, Pistache}) = {Creme, Pistache}.

Se esse for o conjunto de escolhas, o experimentador pode encontrar violações dos axiomas de preferências racionais, dado que, na situação 2, o estudante escolhe “Pistache” (O que implica que o indivíduo prefere Pistache a Chocolate) e na situação 1, quando defronta Chocolate e Creme, prefere Chocolate, seguindo a mesma lógica, o estudante considera Chocolate melhor do que Creme. Agora, na situação 3, quando defronta Creme e Pistache, o estudante não prefere um ao outro, considera os dois igualmente preferíveis. Lendo o problema pela ótica de relações de preferência, haveria uma violação da transitividade

Agora, supõe-se que em um segundo momento é tratado X = {Chocolate, Creme, Pistache, Morango}. E as combinações de bens sendo:

$\mathcal{B}$ = {{Chocolate, Creme}, {Creme, Pistache, Morango}, {Chocolate, Creme, Morango}, {Chocolate, Creme, Morango, Pistache}}

Com resultados:

1. C_1 ({Chocolate, Creme}) = {Chocolate};
2. C_1 ({Creme, Pistache, Morango}) = {Pistache};
3. C_1 ({Chocolate, Creme, Morango}) = {Morango};
4. C_1 ({Chocolate, Creme, Pistache, Morango}) = {Pistache}.

E, para uma “regra dois”

1. C_2 ({Chocolate, Creme}) = {Chocolate};
2. C_2 ({Creme, Pistache, Morango}) = {Creme};
3. C_2 ({Chocolate, Creme, Morango}) = {Morango};
4. C_2 ({Chocolate, Creme, Pistache, Morango}) = {Pistache}.

Para a primeira regra, não há violações de racionalidade quando se compara os menus menores com os menus maiores, o indivíduo escolhe Pistache. Se Pistache não estiver disponível, prefere Chocolate. A segunda regra tem apenas o resultado 2 como diferente. Pistache continua sendo o “mais preferido” quando todos os sabores estão disponíveis, porém, na disposição {Creme, Pistache, Morango}, Pistache não é o escolhido. A seguir, são apresentadas propriedades básicas sobre o comportamento revelado a partir da correspondência de escolha C.

Propriedades α e β de Sen

Aqui será usada a notação C(. , ≿), que, se racionalizável pode ser lida como: C*(A, ≿) = { x ∈ A : ∀ y ∈ A, x ≿ y}, dessa forma, x pertence a um conjunto A, de tal forma que nesse conjunto não exista um y que seja preferido a x.

Propriedades de Sen

Propriedade α:

Dados A, B ∈ $\boldsymbol{\mathcal{B}}$, B ⊆ A e x ∈ C(A), então, x ∈ C(B)

Propriedade β:

Dados A, B ∈ $\boldsymbol{\mathcal{B}}$, se x, y ∈ C(A) com A ⊂ B, então x ∈ C(B) ⇔ y ∈ C(B),

Proposição α:

Sendo ≿ uma relação de preferência completa e transitiva, então, C (. , ≿) satisfaz o α de Sen.

Prova de α: Suponha que existam conjuntos A, B ∈ $\mathcal{B}$(X) com B ⊂ A, x ∈ C (A, ≿) e x ∉ C (B, ≿), então, existe um y ∈ B em que y ≿ x. Desde que B ⊂ A teremos um y ∈ A e y ≿ x. Logo, x ∉ C(A, ≿) O que seria uma contradição.

Proposição β:

Sendo ≻ uma relação de preferência completa e transitiva, então, C (. , ≻) satisfaz o β de Sen.

Prova de β: Desde que x ∈ C(A, ≿) e y ∈ A, nós temos y ⊁ x. Por definição, y ∈ C(B, ≿) implica que: ∀ z ∈ B, z ⊁ y.

Em palavras; a propriedade α, quando satisfeita, garante que caso um elemento de um conjunto seja escolhido, se restringirmos esse conjunto, o mesmo elemento continua sendo escolhido.

Em palavras, uma intuição sobre a propriedade α pode ser: Se a França tem um dos melhores times de futebol do mundo, então, a França deve ter um dos melhores times de futebol da Europa. Analogamente, para a propriedade β: Se a França e Bélgica tem os melhores times de futebol da Europa, e ainda, França foi campeã mundial, então, Bélgica também deve ter um dos melhores times de futebol do mundo.

As implicações da propriedade α e da propriedade β podem descrever diversas situações comuns ao dia-a-dia, embora não seja difícil encontrar situações que as violem, como no caso de eleições. Observamos essa violação com frequência no “voto útil”, quando alguém não vota no seu candidato favorito para evitar que o candidato menos preferido vença. Caso o candidato menos preferido não estivesse concorrendo, o mesmo poderia votar no seu candidato favorito.

Dado isso, ao voltar ao primeiro exemplo de conjunto de decisões, a cima, satisfaz α. Entretanto, se for acrescentado uma configuração X = {Chocolate, Creme, Pistache} e

$$C_0 \text{ (\{Chocolate, Creme, Pistache\})} = \text{\{Chocolate\}}$$

A propriedade α deixa de ser satisfeita

Ainda, sobre a propriedade β; caso duas alternativas sejam escolhidas em uma situação de escolha restrita, então, uma não se torna estritamente melhor que a outra, caso adicionemos novas alternativas. Mais uma vez C_0 satisfaz β, e mais uma vez, segue uma pequena modificação em que o exemplo invalida β

1. C_4 ({Chocolate, Creme}) = {Chocolate, Creme};
2. C_4 ({Chocolate, Pistache}) = {Chocolate};
3. C_4 ({Creme, Pistache}) = {Creme};
4. C_4 ({Chocolate, Creme, Pistache}) = {Chocolate}.

Nessa disposição, C_4 não satisfaz β, já que Chocolate, Creme $\in C_4$ ({Chocolate, Creme}) = {Chocolate, Creme} $\subset$ {Chocolate, Creme, Pistache} e Chocolate $\in C_4$ ({Chocolate, Creme, Pistache}) mas Creme $\notin C_4$ ({Chocolate, Creme, Pistache}).

Para o bom entendimento de regras de decisão é importante, também, compreender o chamado Axioma Fraco das Preferências Reveladas. A fim de elucidar rapidamente, AFPR pode ser interpretado, usando o exemplo acima, por:

Axioma Fraco das Preferências Reveladas

Definição

"Se chocolate sempre é escolhido quando morango está disponível, então, não pode existir um conjunto de 'sabores' em que chocolate e morango estejam contidos e morango seja escolhido e chocolate não.". Formalmente:

Uma estrutura de decisão do tipo ($\mathcal{B}$, C(.)), satisfaz AFPR se:

$$\forall\, x, y \in X, \text{ e } \forall\, B_1, B_2 \in \mathcal{B}, \text{ tal que:}$$
$$\{x, y\} \in B_1 \cap B_2, \text{ se } x \in C(B_1) \text{ e } y \in C(B_2), \text{ então } y \in C(B_1)\ (x \in C(B_2))$$

Em palavras: Para todo x, y e para todo B_1 e B_2, tais que x e y estejam contidos na intersecção de B_1 e B_2, se x está em $C(B_1)$ e y está em $C(B_2)$, então, y estará em $C(B_1)$ e também, x estará em $C(B_2)$, da mesma forma.

$$C(\{x,y\}) = \{x\}, \text{ não pode haver } C(\{x, y, z\}) = \{y\} \text{ entretanto, poderá existir:}$$
$$C(\{x, y, z\}) = \{x\}, \{z\}, \{x, z\}, \{x, z, y\}$$

Tendo isso, pode-se provar que as propriedades α e β implicam o AFPR e o AFPR implica a propriedade β. Se $C(B) = \emptyset, \forall B \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$, então o AFPR implica também a propriedade α.

Prova de α, β ⇒ AFPR.[1]

Supondo C(.) que satisfaça as propriedades α e β. Sejam $x, y \in B_1 \cap B_2$, $x \in C(B_1)$, $y \in C(B_2)$. Prova-se $y \in C(B_1)$. Como $B_1 \cap B_2 \subset B_2$, α implica que $y \in C(B_1 \cap B_2)$. Uma vez que $B_1 \cap B_2 \subset B_1$, β implica que $x \in C(B_1) \Leftrightarrow y \in C(B_1)$

AFPR ⇒ β.

Sejam $B_1, B_2 \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$ e $x, y \in C(B1)$, $B1 \subset B_2$. AFPR implica que se $x \in C(B2)$ então $y \in C(B2)$. Da mesma forma que, $y \in C(B2) \Rightarrow x \in C(B2)$, assim, $x \in C(B2) \Leftrightarrow y \in C(B2)$ e vale a propriedade β.

$C(.) = \emptyset$ e AFPR ⇒ α.

Com a introdução do AFPR à discussão, pode-se explorar casos e proposições interessantes da literatura. No que se trata de AFPR, a proposição encontrada em Mas-Colell et al., 1995 coloca:

Proposição 1

Supondo que $\succsim$ é uma relação de preferência racional. Então, a estrutura de escolha gerada por $\succsim$, $(\boldsymbol{\mathcal{B}}, C(., \succsim))$, satisfaz o AFPR.

[1] Provas retiradas de de Castro, Faro (2005)

Definição 1

Dada uma estrutura de escolha ($\mathcal{B}$, C*(.)), pode-se dizer que a relação de preferências $\succsim$ racionaliza C(.) relativo à $\mathcal{B}$ se:

$$C(B) = C^*(B, \succsim) \text{ sendo } \{x \in B: \forall \in B,\ x \succsim y\}$$

Para todo B ∈ $\mathcal{B}$, $\succsim$ gera a estrutura de decisão ($\mathcal{B}$, C*(.)).

Em palavras, a relação de preferências $\succsim$ racionaliza a regra de escolha C(.) em $\mathcal{B}$ se as escolhas ótimas geradas por $\succsim$ coincidem com C(.) para todos os B ∈ $\mathcal{B}$. De alguma forma, preferências explicam comportamentos; e pode-se interpretar as escolhas de um agente como se o mesmo fosse um 'maximizador de preferências'.

A proposição acima implica que o AFPR deve ser satisfeito se houver uma relação de preferências racionalizadora. Em particular, desde que C*(. , $\succsim$) satisfaça o AFPR para qualquer $\succsim$, apenas uma regra de escolha que satisfaça AFPR pode ser racionalizada. Como resultado, o AFPR não é suficiente para garantir a existência de uma relação de preferência racionalizadora.

Ainda a fim de explorar as conexões que podem ser construídas entre os tópicos, e valendo de exemplos de (Mas-Collel et al., 1995), a proposição abaixo mostrará que:

Proposição 2

Se ($\mathcal{B}$, C*(.)) é uma estrutura de escolha, tal que:

- Satisfaça o AFPR,
- $\mathcal{B}$ inclua todos os subconjuntos de X com até três elementos,

Então, existe uma relação de preferências racional $\succsim$ que racionaliza C(.) relativa à $\mathcal{B}$; isso é, C(B) = C*(B, $\succsim$) ∀ B ∈ $\mathcal{B}$. Ainda, essa relação de preferências racional é a única que racionaliza C(.)

Agregando as proposições acima

Com a proposição 2., para casos especiais em que a escolha seja definida por todos os subconjuntos de X. A teoria baseada em escolhas que satisfaçam o AFPR é completamente equivalente à teoria de decisão baseada em preferências racionais.

Esse resultado é importante pois estabelece uma conexão entre ambas as abordagens mencionadas. Dessa forma, pode-se entender Teoria da Decisão como algo mais abrangente e factível no cotidiano

3. Escolhas e Frames

3.1 Ideia Básica

A abordagem tradicional de questões relacionadas à decisão trabalha em um contexto que descreve os conjuntos sob os quais agentes aplicam critérios de decisão. Comportamentos diferentes são produzidos por agentes diferentes, sem entrar em pontos mais específicos de outras variáveis, tais como a disposição dos elementos no conjunto, sua ordenação, a quantidade de elementos e uma infinidade de outros tópicos. Evidências mais recentes, derivadas da psicologia e de economia comportamental, apontam para uma grande relevância dessas variáveis antes deixadas de lado pelos modelos tradicionais.

Em um contexto geral, por exemplo, eleitores podem ser influenciados pela ordem de aparição de candidatos no horário eleitoral, pela disposição de produtos dentro de uma página web de e-commerce, ou pela quantidade de pratos disponíveis em um menu de restaurante. Nesse contexto, o fator humano é considerado em um contexto mais flexível. Cada uma dessas novas situações constitui um “frame” possível.

Pode-se comparar a abordagem nova com a clássica, no sentido de:

(i) sendo X um conjunto finito de alternativas, a abordagem tradicional combina cada problema de escolha $A \subseteq X$ a um único elemento de A. Uma correspondência de escolha é usada, comumente, para ilustrar casos de múltiplos ótimos na escolha.

(ii) F contém um conjunto de frames que podem ser, por exemplo, ordenações diferentes de um mesmo conjunto. De forma estendida, o problema é tratado como um par (A, f), onde $A \subseteq X$ é o problema no formato padrão e $f \in F$ um frame. O resultado obtido do problema na forma estendida é uma correspondência de escolha que assimila, para todo o conjunto A todos os elementos escolhidos de A em algum dado frame $f \in F$.

3.2 Exemplos

Situações em que se observa “framing effects” podem receber denominações específicas de sua natureza. Algumas das mais comuns são:

3.2.1 Alternativa padrão

Temos uma situação de 'alternativa padrão' de escolha quando o fato de algo ser definido como '*default'* impacta de forma significativa a escolha do agente. Como por exemplo: Ao comprar um computador novo, que vem de fábrica com alguns softwares pré-instalados, um indivíduo percebe que o navegador de internet que acompanha o computador não é seu preferido. Entretanto, acaba por não o substituir. Outro exemplo do quotidiano pode ser representado quando, em uma lanchonete que oferece uma variedade de sanduíches, um agente escolhe um dos 'sabores' de sanduíche pois já o pediu anteriormente. Nesse caso, observasse também um fenômeno '*regret avoidance'* onde o agente evita alguma experiência desagradável com algum sabor novo.

3.2.2 Listagem

Os conjuntos de alternativas, quando apresentado aos agentes, podem ser dispostos em um formato de lista. Mesmo que todos os elementos do conjunto sejam apresentados simultaneamente, os agentes processam a informação de maneira serial, o que faz com que os indivíduos trabalhem as alternativas de forma diferente. O efeito de listagem aponta para resultados em que a ordenação das opções, podendo se manifestar de inúmeras formas. Por exemplo: As primeiras posições da ordenação podem receber mais atenção dos leitores, assim como as últimas são mais lembradas (por serem lidas por último). Para opções acompanhadas por preços, alternativas com grandes diferenças de preço, quando comparadas com seus "vizinhos" também se destacam. Assim como para o caso geral de frames, Rubinstein & Salant (2006) propuseram:

$$C_D(A) = \{a \mid \text{existe uma ordenação } O \text{ para qual } D\,(L(A, O)) = a\}$$

Onde A é um conjunto de escolhas, O é uma ordenação de X, L(A, O) lê-se como a lista que contém elementos de A, com ordenação O. D representa a função de escolha advinda de L(A,O). Os autores discutem, também, o conceito de "independência de partição" (IP), onde prova-se que ao dividir o conjunto de alternativas em 'n' subconjuntos arbitrários, ao aplicar sua 'função de escolha' sob esses 'n' subconjuntos, obtém-se o mesmo comportamento de escolha que o conjunto completo comportaria. O conceito de IP permite que se demonstre que funções de escolha sob uma lista que satisfaz o critério acima, induzem uma correspondência de escolha que satisfaz o AFPR. De forma análoga, uma correspondência de escolha que satisfaça o AFPR, pode ser representada em uma função de escolha que satisfaça IP.

O caso de listagem é importante pois permite que se agregue diversos outros efeitos em uma função de escolha mais abrangente. Os resultados obtidos nessa seção ajudam a traçar paralelos importantes entre a literatura de framing e a literatura clássica, ao mostrar que o caso de listagem pode corresponder diretamente a casos mais comuns no debate.

Um período contexto em que o efeito de listagem se manifesta é o período eleitoral. Onde não só o tempo disponível para propaganda eleitoral (Que por si só é comtemplado em Salant e Rubinstein (2008), tratado como *"Advertising"*), mas a ordem em que os candidatos aparecem pode ser fator determinante para seu sucesso ou fracasso. Acima, foi explicitado o *trade-off* entre estar nas primeiras e últimas posições de uma lista, elementos próximos do início recebem mais atenção e elementos do final apresentam memórias mais vividas, dado que o intervalo entre a propaganda e a escolha foi menor. O caráter de representatividade do voto popular sugere que se posicionar próximo ao início do programa eleitoral acarreta em melhores resultados, dado que identificação com o candidato é um critério importante para definir o voto. Também, além do posicionamento em relação aos demais partidos, partidos inserem os efeitos de listagem dentro de suas próprias propagandas, como por exemplo, começar o programa divulgando os cargos mais 'importantes', como presidente, governador e senador e deixando o restante do tempo para deputados e vereadores. Ainda, no segundo 'bloco' de anúncios, partidos ordenam seus candidatos por numeração ou ordem alfabética, a fim de criar uma sequência de fácil assimilação para os eleitores e capturar sua atenção mais fortemente

3.3.3 Prazo

Quando o tempo disponível ao agente para tomar uma decisão é limitado e o mesmo acaba por definir sua escolha com pressa. Promoções por tempo limitado, edições especiais de produtos e situações de perigo podem exemplificar esse caso de forma clara, tomando como base a "situação de perigo"; um indivíduo cruza a rua desatento, fora dos limites delimitados para realizar um cruzamento seguro, e ao cruzar a última pista, percebe a aproximação de um veículo. O indivíduo tem, claramente duas escolhas a tomar, jogar-se à direita ou à esquerda. Ao jogar-se à direita, desviará da colisão e aterrissará na calçada, ao atirar-se à esquerda, desvia da rota de colisão, porém volta para a pista central, sem saber se outro veículo se aproxima. Para essas situações, a forma estendida é o par (A, *t*) aonde “t” representa o prazo limite para se tomar a decisão.

A variável “tempo” apresenta um importante papel na definição de melhor alternativa, caso “t” seja suficientemente grande a decisão mais segura, atirar-se para a calçada será tomada sem maiores problemas. No caso em que “t” não é grande o suficiente, o indivíduo pode ter uma maior probabilidade de tomar a decisão sub-ótima de jogar-se à esquerda, ou, no limite, com t = 0, o indivíduo não toma nenhuma ação e o pior cenário se desenha de maneira trágica.

3.3.4 Atenção Limitada

Uma situação de ‘atenção limitada’ pode ser observada quando se considera que um agente tem uma limitação de atenção e que, como implicação disso, ao analisar um conjunto muito extenso de opções, o agente pode não considerar todas as alternativas ao tomar sua decisão. Como se o agente fosse esquecendo de elementos ao decorrer da apresentação de opções e não os considerasse no momento de tomada de decisão. Ao analisar o conjunto extenso, um agente pode ter em mente diversas ordenações. Para exemplificar, se considera apenas duas ordenações distintas: uma ordenação “C” de X, na qual o agente concentra as opções em que presta atenção, ou lembra, e uma ordenação “B” na qual resume suas preferências. Assim, dado (A, n) o tomador de escolha escolhe os B-melhores elementos, dentre os primeiros min {n, | A |} elementos de A, de acordo com sua ordenação “C”

Mariotti e Mazini (2007) enriqueceram a discussão do tema com as escolhas sequencialmente racionalizáveis. Nesse caso, trata-se de funções de escolha advindas da aplicação exaustiva em um conjunto não extenso de alternativas em que se elimina iteradamente alternativas inferiores. Esse processo, sequencialmente racionaliza uma função de escolha se, para qualquer conjunto praticável, seja possível identificar a única alternativa definida pela função de escolha. Quando o processo descrito for possível e a condição apresentada for respeitada, esse processo é denominado um RSM (Rational Shortlist Method).

Para ilustrar o modelo cria-se um cenário em que: um indivíduo pode escolher dentre 3 modais de transporte: carro, bicicleta ou ônibus. Analisando situações em que temos apenas menus de 2 elementos, ou seja, um dos modais não está disponível para escolha. Aqui, considera-se temporariamente um menu com 3 opções:

Dominância do melhor modal:

Considerando um exemplo que um indivíduo considera carro como preferível a ônibus e bicicleta. Nesse caso, carro é escolhido dentre os três modais. E não existe informação das outras relações. Na figura representativa dos casos, as setas demonstram o sentido da preferência, as setas saindo de “carro” em direção a “ônibus” e “bicicleta” demonstram a preferência por “carro”. (Caso 1)

Ciclo de escolha emparelhado:

Aqui, reside o caso em que, por exemplo. Carro é escolhido quando apenas carro e bicicleta estão disponíveis; bicicleta é escolhida quando bicicleta e ônibus são as únicas alternativas disponíveis, e ainda, ônibus é escolhido quando apenas ônibus e carro estão disponíveis. Esse caso, olhado pelo prisma da teoria clássica é uma violação de uma das premissas de racionalidade, a transitividade. Entretanto, pode ser racionalizado com uma hipótese simples de divisão dos fatores ou atributos relevantes para a tomada de decisão, nesse caso, conforto e velocidade. Sendo ambas preferências monotônicas em cada um dos atributos mencionados (nesse caso, mais velocidade é preferível a menos velocidade e mais conforto, preferível a menos conforto), pode existir um cenário em que: ônibus é mais rápido que bicicleta, que por sua vez é mais rápida que carro, ainda, carro é mais confortável que bicicleta, que é mais confortável que ônibus. Entretanto, o trânsito impacta diretamente na velocidade que os modais podem desenvolver, fazendo com que a comparação entre as alternativas fique complicada. Logo, um possível indivíduo é o que usa velocidade, impactada pelo trânsito urbano, como primeiro critério de avaliação de alternativas, deixando o conforto como critério secundário. (Caso 2)

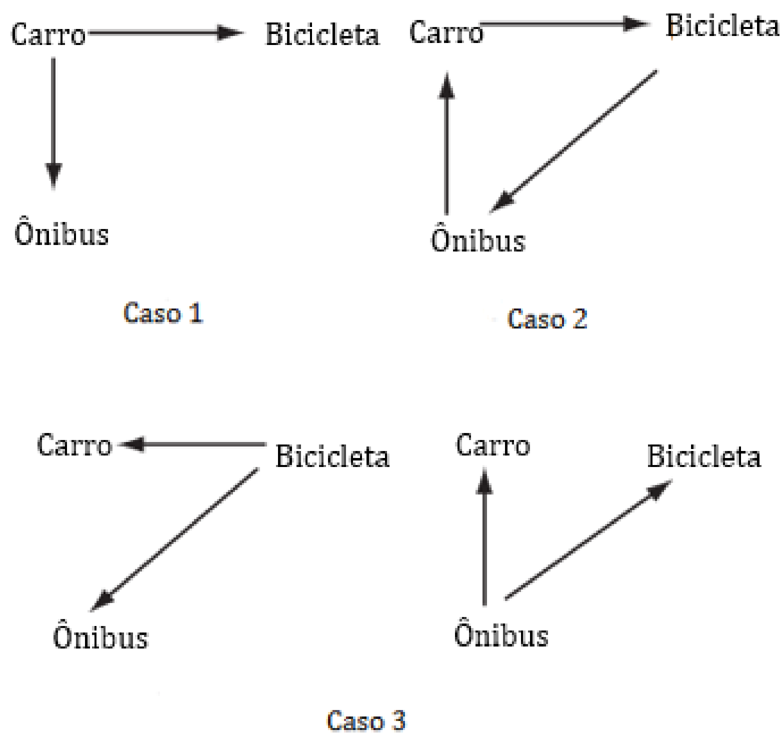

Figura 2 - Exemplos de Casos de RSM

Escolha Padrão:

Quando algum modal nunca é escolhido, na existência de uma alternativa, nos termos de exemplo; Bicicleta é escolhida quando carro está disponível e bicicleta é escolhida quando ônibus está disponível, também, ônibus é escolhido quando carro é disponível e ônibus é escolhido quando bicicleta é disponível. Nessa situação, carro nunca foi escolhido. Esse cenário também representa uma quebra na literatura clássica. O caso 1 mostra que carro é escolhido quando carro, ônibus e bicicleta estão disponíveis, entretanto, pareadas dois-a-dois, apenas bicicleta e ônibus são selecionados. Esse exemplo ilustra um caso em que RSM não é aplicável, dado que ao tratar de RSM, não é possível termos falta de comparação. Essas situações só seriam racionalizáveis caso ‘carro’ tivesse se mostrado não preferido em ambos os critérios, o que, por conta do Caso 1, é impossível. (Caso 3)[2]

Para a compreensão de RSM é necessária a compreensão de alguns conceitos explorados por Manzini & Mariotti (2007), como por exemplo: AFPR, já explorado anteriormente, o AFPR-Fraco e o conceito de Expansão.

AFPR-Fraco

AFPR-Fraco será satisfeito quando: uma alternativa x for escolhida tanto quando apenas y estiver disponível quando y e outras alternativas $P = \{w, ..., z\}$ estiverem disponíveis. Dessa forma, y não será escolhido quando houver um conjunto formado por x e por algum subconjunto de P. Dessa forma,

$$\forall\ A, T \in \gtrsim (X): [\{x, y\} \subset S \subset T,\ x = C\ (x, y) = C(T)] \text{ e não } y = C(A).$$

Pode-se observar que o AFPR-Fraco, como o nome sugere, é um relaxamento de AFPR. Em geral, usado para caracterizar problemas de otimização de restrições com cenários além das contempladas pela literatura clássica, como as de atenção ou restrições de categoria (Manzini & Mariotti 2011). Muitas vezes, um procedimento de escolha pode violar AFPR, porém, satisfazer AFPR-fraco. Ao tratar de restrições de categoria, pode-se exemplificar com situações do tipo, por exemplo:

Um casal decide sair para jantar, sem ideia do que comer. Um dos parceiros pede que escolha o “tipo” do jantar que terão (hambúrguer, pizza ou comida japonesa), depois disso, ele escolheria o prato. Dessa forma, a decisão foi feita por etapas (restaurante, depois prato) e ainda, contempla as escolhas de dois indivíduos, dessa forma, o prato que escolherem será um resultado interpretado como:

$$C(A) = \max \{\max \{A, \succ_1\}, \succ_2\}$$

Dessa forma, o RSM pode ser definido por duas relações de preferência estrita, tais que, para qualquer A os elementos revelados de A serão dados pela dupla maximização, em relação às

[2] Representação gráfica de escolhas sob cenários de atenção limitada em referência a Manzini e Mariotti (2007)

preferências do indivíduo 2, aplicado ao maximal em relação as preferências do indivíduo 1. Sendo uma maximização em duas etapas, assim como sugerido no exemplo acima.

Expansão

Se uma alternativa é escolhida dentro de conjuntos distintos, a mesma alternativa será escolhida na união desses conjuntos.

$$\forall\ S, T \in (\succ)\ [x = C(S) = C(T)] \Rightarrow [x = C\ (S \cup T)]$$

Partindo de AFPR-Fraco e da Expansão, pode-se provar que:

Sendo X um conjunto qualquer. Uma função $\gtrsim$ sob X é um RSM apenas se satisfizer, mutualmente, os critérios de AFPR-Fraco e Expansão.[3]

Modelo de atenção limitada e RSM

Modelos que simplesmente maximizam uma relação binária não são suficientes para descrever e tratar das nuances comuns a situações de escolha quotidianas. O enriquecimento desse debate com a introdução de métodos que contemplam frameworks mais diversos e "moldáveis" é de grande valor. Rubinstein & Salant (2008), ao traçar os cenários descritos na Secção 3, utilizaram referências ao trabalho anterior de Manzini & Mariotti (2007), também abordado no final da Secção 3. Partindo da definição de RSM, que é semelhante a um cenário de atenção limitada, anterior à Rubinstein & Salant (2008), os autores puderam atingir o resultado alcançado ao definir o caso de atenção limitada, anteriormente. Em RSM, o 'conjunto de atenção', nesse caso, o framework de trabalho, consiste de todos os elementos de um conjunto X, onde deixa-se de desenhar uma simples relação binária para traçar uma regra sobre os elementos e sobre os frames possíveis (exemplo dos modais de transporte)

[3] Prova pode ser encontrada no apêndice.

A partir dessas conclusões alcançadas por M&M (2007) e R&S (2008), alguns exemplos podem ser tratados como generalizadores para as hipóteses, ou proposições, apresentadas em ambos os trabalhos.

4. Conclusão

Ao tratar-se de teoria da decisão, não existe modelo único que capture todas as nuances do processo de escolha. O campo teve imensos avanços nas últimas décadas e agora, modelos englobam, cada vez mais, processos que não são exclusivos à matemática. Pode-se observar uma clara delineação da evolução da ciência, desde seus modelos iniciais, propostos há poucos séculos, até a vanguarda do debate. A capacidade de capturar efeitos psicológicos ou comportamentais em regras, funções e critérios garante que a academia consiga trazer o debate a um nível mais próximo da realidade.

Os ganhos ao se realizar debates nesse campo vem ao conseguir ‘decifrar’ os pequenos enigmas que permeiam as relações humanas, tanto no tocante das trocas quanto no que tange as relações interpessoais.

5. Bibliografia

KREPS, D.; **A Course in Microeconomic Theory**. New Jersey: Princeton University Press, 1990

Mas-Colell, A., Whinston, M. D. and Green, J. R.; **Microeconomic Theory**. New York: Oxford University Press, 1995

SAVANT, Yuval., RUBINSTEIN, Ariel. A model of choice from lists. **Theoretical Economics 1** (2006), 3–17, 2006

Savant, Y., Rubinstein, A.: (A, f): Choice with Frames. **Review of Economic Studies** (2008) 75, 1287-1296, 2008

DE CASTRO, L. I., FARO. J.H.; **Introdução à Teoria da Escolha**. IMPA, 25^0 Colóquio Brasileiro de Matemática, 2005

LEVIN, J.; Choice under Uncertainty, **Stanford Press**, 2006

DE MARTINO, B., DOLAN, R.; The impact of Emotions on Attention and Decision Making, **University College London,** 2008

MANZINI, P., MARIOTTI, M. Sequentially Rationalizable Choice, **American Economic Review**, Vol. 97, Nº 5, 2007

6. Apêndice

Dicionário:

Símbolo	Leitura	Exemplo	Interpretação
$\succ$	Preferência Estrita	$A \succ B$	"A" é preferível à "B"
$\succsim$	Preferência Fraca	$A \succsim B$	"A" é pelo menos tão bom quanto "B"
$\sim$	Indiferença	$A \sim B$	O indivíduo fica indiferente entre "A" e "B"
$\rightarrow$	Implicação	$A \rightarrow B$	A implica em B
$\Leftrightarrow$	Dupla Implicação	$A \Leftrightarrow B$	$x + 5 = y + 2 \Leftrightarrow x + 3 = y$
$\cup$	União	$\{1,2\} \cup \{3,4\}$	$\{1,2,3,4\}$
$\cap$	Intersecção	$\{1,2\} \cap \{2,3\}$	$\{2\}$
$\forall$	Para todo/qualquer	$A+B>0$	$\forall$ (para todo) $A,B \in \mathbb{N}$
$\emptyset$	Vazio	$\{\}$	Um conjunto que não contenha elementos
$\in$	Pertence	$1 \in \mathbb{N}$	1 pertence ao conjunto dos Naturais
$\notin$	Não Pertence	$-1 \notin \mathbb{N}$	-1 não pertence ao conjunto dos Naturais
$\exists$	Existe	$\exists\ A \in \mathbb{N} \mid A>5$	Existe A pertencente aos naturais que seja > 5
$\subset$	Está contido	$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$	Os Naturais estão contidos nos Inteiros
$\not\subset$	Não está contido	$\mathbb{R} \not\subset \mathbb{N}$	Os Reais não estão contidos nos Inteiros
$\therefore$	Portanto	$1+1=2 \therefore 2-1=1$	Dado o que foi provado, portanto...

Funções

Por funções, entendemos que:

$$(A, B, a \rightarrow b)$$

Em que A e B são dois conjuntos, possivelmente distintos, e $a \rightarrow b$ é uma regra que nos permite associar cada elemento "a" de A um único elemento "b" de B. Temos que A é o domínio da função e B o contradomínio. Para o único "b" de B associado ao elemento "a" de A, indicamos por $f(a)$, nesse caso "$f(a)$" é o valor que f assume em "a".

Uma função f de domínio A e contradomínio B é, usualmente, indicada por

$$f: A \rightarrow B$$

Graficamente,

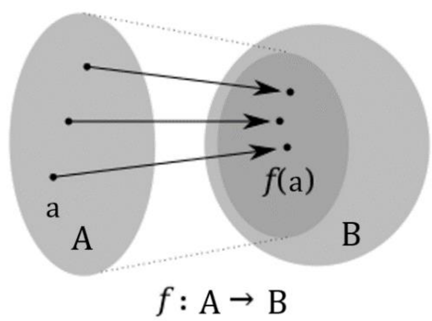

Figura 3 - Exemplo de Funções

As funções têm diversas aplicações práticas. Nos tópicos que abrangem este trabalho, funções desempenham um papel principal, tanto em relações de preferências quanto em regra de decisão.

Prova referente à proposição 1

Supondo que, para algum $B \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$, tenha-se $x, y \in B$ e $x \in C^*(B, \succsim)$. Pela definição de $C^*(B, \succsim)$, isso implica que $x \succsim y$. Para validar se o AFPR se mantém, supondo que para algum $B' \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$ com $x, y \in B'$, tenha-se $y \in C^*(B', \succsim)$. Isso implica que $y \succsim z \ \forall \ z \in B'$. Como já é sabido que $x \succsim y$, e por transitividade $x \succsim z \ \forall \ z \in B'$, então $x \in C^*(B', \succsim)$. O que converge para a conclusão do AFPR, vista acima.

Essa prova garante um resultado importante, que: Se um comportamento é gerado por preferências racionais, então, ele satisfaz os requisitos de consistência inerentes ao AFPR. Já pelo prisma de relações de preferências, a conclusão é mais sutil. Para isso é necessário:

Prova referente à da proposição 2

Tendo $\succsim^*$ como candidato principal à racionalização, prova-se assumindo duas premissas: (i) que $\succsim^*$ é uma relação de preferência racional, e (ii) que $\succsim^*$ racionaliza C(.) em $\boldsymbol{\mathcal{B}}$.

(i) Deve-se checar se $\succsim^*$ é racional, via transitividade e completude.

Para completude, por (ii), $\{x, y\} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$, dado que ou 'x' ou 'y' é um elemento de $C(\{x, y\})$, por consequência, $x \succsim^* y$, ou $y \succsim^* x$, ou ambos no caso de indiferença. Então $\succsim^*$ é considerado completo.

Para a transitividade, considerando $x \succsim^* y$, e $y \succsim^* z$, também, que $\{x, y, z\} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$. Pode-se provar que $x \in C(\{x, y, z\})$ dado que, por definição de $x \succsim^* z$ (como visto em 2.1). Como $C(\{x, y, z\})$ não contempla o vazio, ao menos uma das alternativa x, y ou z, deve ser um elemento de escolha de $C(\{x, y, z\})$.

Supondo que $y \in C(\{x, y, z\})$, Dado que $x \succsim^* y$, então, o AFPR aponta que $x \in C(\{x, y, z\})$, como deve ser. Agora, supondo que $z \in C(\{x, y, z\})$, dado que $y \succsim^* z$, então, o AFPR aponta que $y \in C(\{x, y, z\})$, e volta-se para o caso anterior.

(ii) Sabendo que $C(B) = C^*(B, \succsim^*)$ para todo $B \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$, isso é, a relação de preferência revelada $\succsim^*$, deduzida de C(.), na verdade, gera C(.).

Formalmente, primeiro; assumindo $x \in C(B)$. Então, $x \succsim^* y \ \forall \ y \in B$; tem-se $x \in C^*(B, \succsim^*)$, isso significa que $C(B) \subset C^*(B, \succsim^*)$. Então, assumindo $x \in C^*(B, \succsim^*)$. Implica que $x \succsim^* y \ \forall \ y \in B$, e para cada $y \in B$, deve existir algum conjunto $B_y \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$, de tal forma que $x, y \in B_y$ e ainda

$x \in C(B_y)$, pois $C(B) \neq \emptyset$, o AFPR implica que $x \in C(B)$. Então, $C^*(B, \succsim^*)$. Essas relações de inclusão, juntas, implicam que $C(B) = C^*(B, \succsim^*)$.

Para estabelecer o caráter único, $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ deve incluir todos os subconjuntos de dois elementos de X, o comportamento em C(.) determina completamente o emparelhamento das relações de preferências sobre X em qualquer preferência racionalizante.

Prova referente ao teorema de RSM

Sendo C um RSM de X e $\succ_1$ e $\succ_2$, racionalizantes:

(i) Expansão permite que $x = C(S) = C(T)$ para $S, T \in \succ (X)$. Dado isso, pode-se demonstrar que para qualquer $y \in S \cup T$, não pode existir uma escolha do tipo $(y, x) \in \succ_1$, assim como para qualquer $y \in \max (S \cup T; \succ_1)$ não pode gerar $(y, x) \in \succ_2$

Caso $(y, x) \in \succ_1$ haveria uma contradição no resultado $x = C(S)$ ou em $x = S(T)$ e no fato de $\succ$ ser racionalizante. Supondo que, para algum $y \in \max (S \cup T; \succ_1)$ exista um $(y, x) \in \succ_2$. Uma vez que $\max (S \cup T; \succ_1) \subseteq \max (S; \succ_1) \cup \max (T; \succ_1)$, por definição, tem-se um $y \in \max (S; \succ_1)$ ou um $y \in \max (T; \succ_1)$; Contradizendo o fato de $x \in \max (\max (S; \succ_1); \succ_2)$ ou o fato de $x \in \max (\max (T; \succ_1); \succ_2)$. Nessa situação, x sobrevive aos dois períodos de 'eliminação', $\{\succ_1, \succ_2\}$ e dessa forma $x = C (S \cup T)$.

(ii) Também, sobre AFPR-Fraco, assumindo $x = C(x,y) = C(S)$, onde $y \in S$. Então $x = C(x, y)$ implica no cenário que $(x, y) \in \succ_1 \cup \succ_2$. Se $(x, y) \in$ à $\succ_1$. Em outra cenário, supondo que $(x, y) \in \succ_2$, o resultado obtido, nesse caso o de $x = C(S)$ implica diretamente que, para todo $z \in S$, $(z, x) \notin \succ_1$. Isso posto, $x \in \max (R; \succ_1)$ para qualquer R contido em S em que $x \in R$. tendo $(x, y) \in \succ_1$, então temos que $y \notin \max(\max (R; \succ_1); \succ_2)$ para todo R, e, por consequência $y \neq y(R)$.

Nota-conclusão:

Racionalizadores não são construídos de apenas uma forma, adaptações podem ser feitas em situações em que ‘quebram’ racionalizadores antes propostos. A partir de então, outros racionalizadores podem ser propostos em cima da ‘quebra’ do primeiro