

**Insper Instituto de Ensino e Pesquisa  
Faculdade de Economia e Administração**

**Gabriel Giannecchini de Oliveira**

**A EFICIÊNCIA DO MODELO DE BLACK-LITTERMAN  
PARA A OTIMIZAÇÃO DE UM PORTFÓLIO GLOBAL  
DE AÇÕES.**

**São Paulo  
2012**

Gabriel Giannecchini de Oliveira

**A eficiência do modelo Black-Litterman para a otimização de um portfólio global de ações**

Monografia apresentada ao curso de Ciências Econômicas, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel do Insper Instituto de Ensino e Pesquisa.

Orientador:  
Prof.<sup>a</sup> Andrea Maria Accioly Fonseca Minardi

**São Paulo**  
**2012**

Giannecchini de Oliveira, Gabriel.  
A eficiência do modelo Black-Litterman para a otimização de um  
portfólio global de ações. – São Paulo: Insper, 2012.  
27 f.

Monografia: Faculdade de Economia e Administração. Insper  
Instituto de Ensino e Pesquisa.

Orientador: Prof.<sup>a</sup> Andrea Maria Accioly Fonseca Minardi

1. Black Litterman, 2. Otimização, 3. Carteira Global

Gabriel Giannecchini de Oliveira

**A eficiência do modelo Black-Litterman para a otimização de um portfólio global de ações**

Monografia apresentada à Faculdade de Economia do Insper, como parte dos requisitos para conclusão do curso de graduação em Economia.

Aprovado em Junho 2012

**EXAMINADORES**

---

Prof.<sup>a</sup> Andrea Maria Accioly Fonseca Minardi  
Orientadora

---

Prof. Dr. Leonardo Pagano  
Examinador

---

Prof. Dr. Michael Viriato Araújo  
Examinador

## Resumo

Harry Markowitz, em 1952, revolucionou a forma como as carteiras são construídas através de seu modelo de média-variância para otimização de carteiras. No entanto, a estimação dos parâmetros do seu modelo é complexa resultando em alocações extremas para alguns pesos dos ativos da carteira fazem com que ele não seja muito utilizado na prática pelos gestores de portfólios. A partir disso, este trabalho faz um estudo do modelo Black Litterman (1992) com dados de índices de ações de onze países e sugere uma forma prática de se incorporar as visões desse modelo através do CAPM Global proposto por Fischer Black, em 1989. Esse estudo tem a finalidade de apresentar um modelo de simples aplicação e que indique pesos menos sensíveis. Foram construídas duas carteiras de investimentos, cada uma com um dos modelos e para compará-las foi utilizado o índice Sharpe.

Palavras-Chave: Black Litterman, Markowitz, Otimização, CAPM Global, Sharpe.

## Abstract

In 1952 Harry Markowitz revolutionized the way that portfolios are constructed using a mean-variance optimization model. However, the estimation of the model parameters are complex and the result are extreme allocations for some assets. For these reason, this model is not widely used in practice by managers of portfolios. This paper presents a study of the Black Litterman (1992) with equity index data from eleven countries and suggests a practical way to incorporate the views of this model through the Global CAPM proposed by Fischer Black in 1989. This study aims to present a model of simple application indicating weights less sensitive. Were built two portfolios, each with one of the models and to compare them we used the Sharpe ratio.

Key-Words: Black Litterman, Markowitz, Optimization, Global CAPM, Sharpe.

## Sumário

1 Introdução .....	4
2 Revisão Bibliográfica .....	4
3 Modelo de Black – Littermam.....	8
4 Metodologia e Resultados .....	12
4.1 Modelo de Markowitz (1952).....	13
4.2 Modelo Black Litterman (1992).....	16
4.3 Comparações entre os modelos .....	20
5 Conclusão .....	22
Referências Bibliográficas.....	24

# 1 Introdução

O trabalho desenvolvido nesta monografia tem a finalidade de realizar um estudo no qual aplica o modelo de Black Litterman (1992) para a construção de uma carteira de ações globalizada. Tal modelo possibilita incorporar a visão dos investidores sob a alocação dos ativos contidos em um portfólio de investimentos. Deste modo, será estudado o impacto dessas visões que serão atribuídas através de um fator de proteção, proposto por Fischer Black (1989). Para testar a eficiência desse modelo será feita uma comparação como o modelo de Harry Markowitz (1952).

Acredita-se que este trabalho possa colaborar com o modo pelo qual os gestores de carteiras globais otimizam seus portfólios. Neste trabalho foi utilizada uma adaptação do método proposto por Benninga (2008) para a aplicação do modelo. O resultado encontrado foi condizente com a realidade quando comparado com otimizações de modelos de média-variância.

Com relação à estrutura desta monografia, no capítulo dois foi feita uma revisão bibliográfica dos modelos necessários para se chegar a um método de otimização de carteiras. O capítulo três possui uma explicação detalhada do modelo de Black Litterman (1992). O capítulo quatro contém a metodologia deste trabalho. Ela está dividida em três seções, sendo a primeira a otimização da carteira de investimentos proposta por Markowitz (1952), a segunda a otimização da mesma carteira através do modelo de Black Litterman (1992) e por fim uma comparação entre os dois modelos, mostrando qual deles atingiu um melhor resultado. Por fim, o capítulo cinco exhibe a conclusão deste trabalho. Nas últimas páginas pode ser encontrado um apêndice para facilitar o entendimento do leitor com relação aos cálculos feitos para se chegar ao resultado dos modelos.

## 2 Revisão Bibliográfica

Segundo Markowitz (1952), as variáveis necessárias para a construção de portfólios são os retornos esperados e a matriz de covariância dos ativos. O Princípio da Dominância de Sharpe (1995) prevê que o investidor escolherá a carteira que oferecer o máximo retorno esperado para um determinado nível de risco ou o mínimo risco para um determinado nível de retorno esperado.

O retorno esperado da carteira e a variância da carteira são calculados, respectivamente, pelas equações (1) e (2).

$$E(r_p) = \sum_{i=1}^n w_i \cdot E(r_i) \quad (1)$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i \cdot w_j \cdot Cov(r_i, r_j) \quad (2)$$

Onde,

- $E(r_p)$  : retorno esperado da carteira
- $E(r_i)$  : retorno esperado de cada ativo da carteira
- $w_i$  : Peso da carteira no ativo i
- $w_j$  : Peso da carteira no ativo j
- $\sigma_p^2$  : Variância da carteira

O modelo de otimização de Markowitz (1952) estima o menor risco possível para uma determinada categoria de retorno, conforme as equações (3) e (4):

Objetivo  $\min \sigma^2$

$$= \text{Min}_{w_1, \dots, w_A} \sum_{a=1}^A \sum_{b=1}^B w_a \cdot w_b \cdot \sigma_{ab} \quad (3)$$

Sujeito a,

$$E(r_p) = \sum_{a=1}^A w_a \cdot \bar{r}_a \text{ e } \sum_{a=1}^A w_a = 1 \quad (4)$$

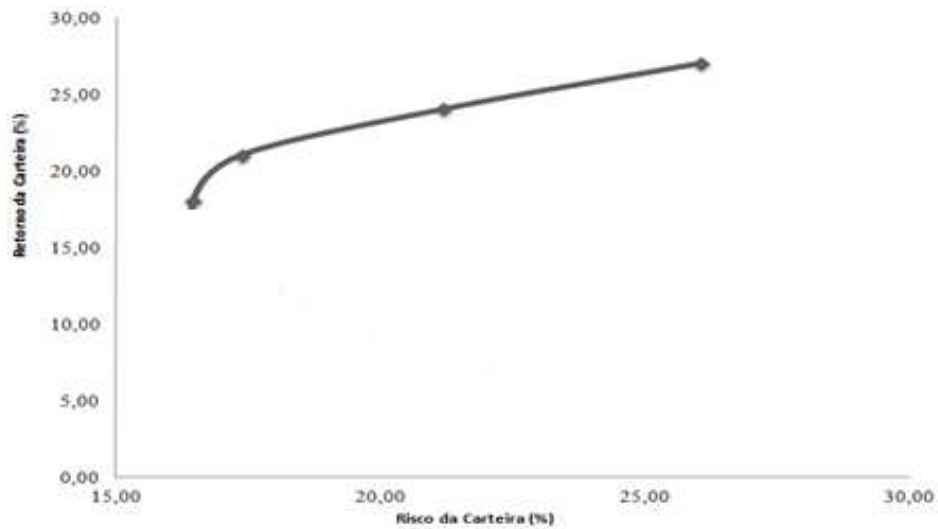
Onde,

- $w_a$  : peso de cada ativo na carteira
- $\bar{r}_a$  : retorno médio de cada ativo
- $E(r_p)$ : retorno esperado da carteira
- $\sigma_{ab}$  : covariância entre cada par de ativos

Variando-se o retorno esperado, é possível construir uma fronteira eficiente de investimentos composta pelas possíveis alocações ótimas de risco/retorno. A Figura 1 ilustra a ideia proposta por Markowitz:



**Figura 1- Fronteira Eficiente da carteira de investimento**



No entanto, segundo Black e Litterman (1992) ao aplicar o modelo de Markowitz na prática, as alocações das carteiras resultantes apresentam posições de venda muito grandes em alguns ativos. Mesmo colocando restrições no modelo para não permitir posições de venda, o modelo persiste inadequado exibindo “soluções de canto” com muitos ativos da carteira sem peso e outros ativos de maior risco com pesos muito altos.

Isso ocorre, como é discorrido pelos autores pela dificuldade de estimação de retornos esperados necessários para aplicar o modelo o que faz com que os gestores utilizem frequentemente os retornos históricos como base para suas estimações, tornando-as pouco confiáveis. Além disso, normalmente, investidores detêm conhecimento de retornos, absolutos ou relativos, somente de alguns ativos, sendo que os modelos de otimização exigem que seja estabelecido o retorno esperado de todos os ativos. Assim, os investidores são forçados a opinar sobre as expectativas de alguns ativos nos quais não detêm muita informação. Esse problema de assimetria de informação somado com a frequente ocorrência de concentração nos pesos dos ativos da carteira podem acarretar em uma carteira pouco eficiente.

Sendo assim, Black e Litterman (1992) propõem um novo modelo no qual os retornos esperados são gerados a partir do *Capital Asset Pricing Model* (CAPM) desenvolvido por Sharpe (1964), Lintner (1965) e Mossin (1966). O CAPM assume que os investidores só precificam o risco sistemático, e que o prêmio pelo risco é uma função linear do prêmio pelo risco de mercado, conforme a equação (5):

$$E(r_i) = r_f + \beta_i(E(r_m) - r_f) \quad (5)$$

Onde,

- $E(r_i)$  : retorno esperado do ativo i
- $r_f$  : taxa livre de risco
- $(E(r_m) - r_f)$  : prêmio pelo risco
- $\beta$  : coeficiente de excesso de retorno gerado pelo risco sistemático

O modelo pressupõe que o mercado é perfeito, ou seja, não existe assimetria de informação e todos investidores tem como objetivo maximizar o retorno esperado de suas carteiras minimizando o risco e foi construído com enfoque somente em investimentos *onshore*. Para ampliar a utilização do CAPM em um âmbito global os autores Roll e Solnik (1977) argumentaram que com mercados perfeitos, o consumo e produção de bens homogêneos entre os países, transporte instantâneos e sem custos além de expectativas similares entre os investidores o modelo do CAPM poderia ser expandido como forma mundial de precificação dos ativos.

Pode parecer que as hipóteses adotadas para isso sejam muito além da realidade, mas tratando-se de ativos financeiros nos dias de hoje em que praticamente todas as transações são feitas virtualmente com baixos custos e transferências automáticas, as suposições não ficam muito fora da realidade. Entretanto, existe a exposição cambial quando se aplica offshore. Para evitar o risco cambial, Black (1989) propôs a criação de um fator a ser acrescentado na precificação dos ativos globais com o objetivo de realizar uma proteção cambial.

O modelo de Black (1989) parte da ideia de que uma carteira de equilíbrio global pode ser criada através de uma proteção entre os ativos de uma mesma classe de dois países diferentes. Ao estender a análise para os investidores em todos os possíveis pares de países, observa-se que à proporção que cada investidor quer se proteger depende de três medidas: o excesso de retorno esperado sobre a carteira do mercado mundial; a volatilidade da carteira do mercado mundial e a média das volatilidades das taxas de câmbio dos países que compõem o portfólio. Com isso, chega-se ao seguinte parâmetro, que indica qual é a proporção em que as posições da carteira devem ser protegidas.

$$\text{fator de proteção} = \frac{\mu_m - \sigma_m^2}{\mu_m - \frac{1}{2}\sigma_e^2} \quad (6)$$

Onde,

- $\mu_m$  = excesso de retorno da carteira de mercado global
- $\sigma_m^2$  = volatilidade da carteira de mercado global
- $\sigma_e^2$  = média das volatilidades das taxas de câmbio de cada país da amostra

O investidor pode utilizar a fórmula de proteção mesmo com uma carteira que possui apenas uma pequena parte de investimentos *offshore*. Nos casos em que o investidor não utiliza uma carteira mundialmente diversificada o autor sugere as seguintes estratégias:

- I. Caso o investidor seja avesso ao risco cambial ele deve se proteger mais do que o parâmetro sugere.
- II. Caso o investidor seja avesso ao risco de capital estrangeiro, mesmo que seja otimamente coberto, ele deve utilizar um número menor do que a fórmula sugere.
- III. Caso o investidor seja avesso a ambos os riscos na mesma medida, faz sentido ele utilizar o valor sugerido pelo parâmetro.

O modelo proposto por Black – Litterman (1992) utiliza o *framework* do modelo proposto por Markowitz (1952) empregando a estimação de retorno dos ativos através de um CAPM global construindo, assim, uma carteira de equilíbrio global e a partir dessa o investidor poderá ou não incluir sua opinião.

### 3 Modelo de Black – Litterman

O modelo de Black Litterman (1992) parte de uma carteira de equilíbrio, na qual os autores fazem a suposição de que, na ausência de informações adicionais, o portfólio de equilíbrio não pode ser superado. Se o investidor concorda com todas as expectativas de retorno dos ativos desta carteira ela já está otimizada. No entanto, se ele discordar de algum retorno proposto pela carteira de equilíbrio, o modelo permite que ele incorpore sua opinião. Além disso, os investidores poderão aplicar um nível de confiança sobre suas visões, que será ponderado pelos retornos esperados da carteira de equilíbrio.

Como observam He e Litterman (1999) o CAPM gera os retornos da carteira de equilíbrio. Assumindo que existe N ativos no mercado e que o retorno desses ativos possuem uma distribuição Normal com  $\mu$  sendo o retorno esperado e  $\Sigma$  a matriz de covariância, temos:

$$r \sim N(\mu, \Sigma) \quad (7)$$

Onde, r é um vetor que representa o retorno dos ativos. Supondo que a tolerância mundial ao risco dos investidores seja representada pelo parâmetro de aversão ao risco  $\delta$ , o equilíbrio dos prêmios por riscos  $\Pi$  pode ser escrito como:

$$\Pi = \delta \cdot \Sigma \cdot p_{eq} \quad (8)$$

Em que  $p_{eq}$  são os pesos da carteira de equilíbrio de mercado. Sendo assim, temos que  $\mu$  (retornos esperados) são normalmente distribuídos com uma média igual a  $\Pi$ :

$$\mu = \Pi + \varepsilon^{(e)} \quad (9)$$

Da equação acima temos  $\varepsilon^{(e)}$  que é um vetor de erros normalmente distribuído com média zero e variância igual a  $\tau\Sigma$ , onde o  $\tau$  é um coeficiente que representa a incerteza na estimativa dos retornos esperados da carteira de equilíbrio. Quanto maior for o valor de  $\tau$  menor será a confiança nas estimativas.

Suponha que o V seja o número de visões que os investidores possuem e que P seja uma matriz V x N na qual as linhas representam os pesos das visões e Q seja um vetor com K linhas representando os retornos dessas carteiras. Sendo assim, a visão dos investidores pode ser expressa como:

$$P \cdot \mu = Q + \varepsilon^{(u)} \quad (10)$$

Onde,  $\varepsilon^{(u)}$  é uma variável aleatória que representa os erros das visões dos investidores. Ela possui média zero e variância  $\Omega$ . As visões dos investidores são independentes dos retornos de equilíbrios estabelecidos pelo CAPM iniciais e independentes entre si para diferentes ativos.

Combinando a carteira de equilíbrio com as visões dos investidores chegamos a um retorno esperado que segue uma normal com média  $\bar{\mu}$  e variância  $\Phi^{-1}$  onde:

$$\bar{\mu} = [(\tau \cdot \Sigma)^{-1} + P' \cdot \Omega^{-1} \cdot P]^{-1} [(\tau \cdot \Sigma)^{-1} \cdot \Pi + P' \cdot \Omega^{-1} \cdot Q] \quad (11)$$

$$\Phi^{-1} = [(\tau \cdot \Sigma)^{-1} + P' \cdot \Omega^{-1} \cdot P]^{-1} \quad (12)$$

Pelo fato de os retornos serem aleatórios e independentes no modelo Black Litterman a sua distribuição não é mais simplesmente  $N(\bar{\mu}, \Sigma)$ . De acordo com as equações (7), (11) e (12), temos que a distribuição do modelo é dada por:

$$r \sim N(\bar{\mu}, \bar{\Sigma}) \quad (13)$$

Onde,  $\bar{\Sigma} = \Sigma + \Phi^{-1}$ .

Com os valores de  $\bar{\mu}$  e  $\bar{\Sigma}$  praticados para a média e a matriz de covariância, respectivamente, o portfólio otimizado pode ser construído a partir de um modelo de média-variância. Assumindo que o investidor utilize  $\delta$  como o parâmetro de aversão ao risco, o problema de maximização pode ser escrito como:

$$\max \quad w' \cdot \bar{\mu} - \frac{\delta}{2} \cdot w' \cdot \bar{\Sigma} \cdot w \quad (14)$$

Com a primeira derivada chega-se que a carteira sem restrições é:

$$w^* = \frac{1}{\delta} \cdot \bar{\mu} \cdot \bar{\Sigma}^{-1} \quad (15)$$

Onde  $w^*$  é o vetor de pesos ótimos da carteira de investimento. Utilizando a equação (11), podemos escrever  $w^*$  da seguinte maneira:

$$w^* = \frac{1}{\delta} \cdot \bar{\Sigma}^{-1} \cdot \Phi^{-1} \cdot [(\tau \Sigma)^{-1} \cdot \Pi + P' \cdot \Omega^{-1} \cdot Q] \quad (16)$$

Note que:

$$\bar{\Sigma}^{-1} = (\Sigma + \Phi^{-1})^{-1} = \Phi - \Phi \cdot (\Phi + \Sigma^{-1})^{-1} \cdot \Phi \quad (17)$$

O termo  $\bar{\Sigma}^{-1} \cdot \Phi^{-1}$  pode ser simplificado por:

$$\bar{\Sigma}^{-1} \cdot \Phi^{-1} = \frac{\tau}{1 + \tau} \cdot \left( I - P' \cdot A^{-1} \cdot P \cdot \frac{\Sigma}{1 + \tau} \right) \quad (18)$$

Onde a matriz  $A = \frac{\Omega}{\tau} + \frac{P \cdot \Sigma}{(1 + \tau) \cdot P'}$ . Sendo assim o vetor de pesos ótimos pode, agora, ser escrito como:

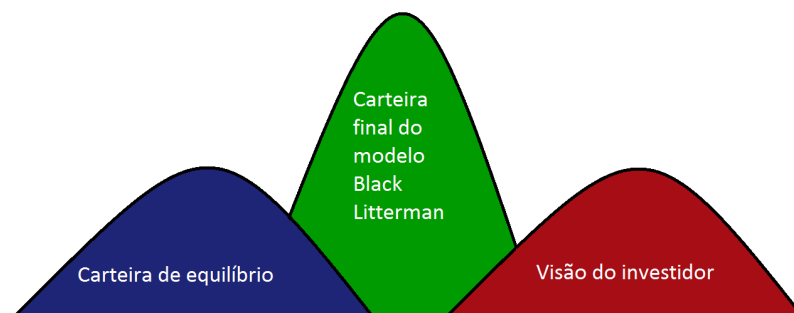
$$w^* = \frac{1}{1 + \tau} \cdot (p_{eq} + P' \cdot \Lambda) \quad (19)$$

Lembrando que  $p_{eq} = (\delta \cdot \Sigma)^{-1} \cdot \Pi$  são os pesos da carteira de equilíbrio. O vetor  $\Lambda$  pode ser escrito como:

$$\Lambda = \frac{\tau \cdot \Omega^{-1} \cdot Q}{\delta - A^{-1} \cdot P \cdot \frac{\Sigma}{1 + \tau} \cdot p_{eq}} - \frac{A^{-1} \cdot P \cdot \frac{\Sigma}{1 + \tau} \cdot P' \cdot \tau \cdot \Omega^{-1} \cdot Q}{\delta} \quad (20)$$

Como as colunas da matriz  $P'$  representam a visão dos investidores, a equação (19) demonstra que o portfólio ótimo pode ser obtido através da soma da carteira de equilíbrio com uma somatória ponderada das carteiras que formam as visões dos investidores e esse resultado é multiplicado por um fator  $(\frac{1}{1 + \tau})$  que medirá a precisão da estimativa dos retornos esperados. O peso de cada carteira é dado pelo elemento correspondente no vetor  $\Lambda$ . A Figura 2 procura demonstrar a ideia do modelo Black Litterman (1992) em que o resultado final é uma carteira com menor variância e, portanto, uma maior precisão.

**Figura 2: Intuição do modelo de Black-Litterman**



Fonte: [www.blacklitterman.org](http://www.blacklitterman.org)

## 4 Metodologia e Resultados

Para tentar a eficiência do modelo Black Litterman (1992) será feita uma comparação entre este modelo e o modelo de Markowitz (1952) através do índice Sharpe que é uma medida de excesso de retorno por unidade de desvio padrão numa estratégia de investimento. Será levada em conta também a alocação das duas carteiras no sentido de que posições de venda muito grandes e/ou altas concentrações em ativos de maior risco não fazem muito sentido para uma carteira globalmente diversificada no mundo real.

O portfólio para ambas as estratégias será composto por índices de ações de onze países e terá como a carteira de mercado o índice MSCI ACWI que é um índice que compõe ações do mundo inteiro. Dado que existem ETFs (Exchange Tradable Funds) para praticamente todos os principais índices mundiais, essa carteira pode ser construída na prática. Os dados foram coletados na base de dados da Bloomberg no período de 30/12/2005 até 30/12/2011. A tabela 1 apresenta os índices e países escolhidos.

**Tabela 1- Índices de ações utilizados**

PAÍS	ÍNDICE
Alemanha	DAX
Brasil	Ibovespa
Chile	IPSA
Espanha	IBEX 35
Estados Unidos	S&P 500
França	CAC 40
Itália	FTSE MIB
Hong Kong	Hang Seng
Japão	Nikkei 225
México	IPC
Reino Unido	FTSE 100

Fonte: Bloomberg

Como ativo livre de risco foi adotado o *US treasury Note* de 10 anos e como carteira de mercado o índice MSCI ACWI, que é um índice de ações que engloba papéis de países desenvolvidos e emergentes. Ambos ativos foram coletados na base de dados da Bloomberg.

## 4.1 Modelo de Markowitz (1952)

Para se estimar o retorno de uma carteira de ações global foi estimada a *Security Market Line* (SML) conforme a equação (21).

$$E(r_i) = r_f + \beta_i \cdot [E(r_m) - r_f] \quad (21)$$

Em que:

- $E(r_i)$  = retorno esperado do índice de ações  $i$
- $r_f$  = *US treasury Note* de 10 anos
- $\beta_i$  = medida de sensibilidade entre o retorno do ativo  $i$  com relação ao retorno da carteira de mercado
- $E(r_m)$  = retorno esperado do índice MSCI ACWI
- $E(r_m) - r_f$  = prêmio de risco da carteira de mercado.

O retorno esperado da carteira de mercado foi estimado pelo modelo de Gordon, que pode ser analisado na equação (22).

$$E(r_m) = \text{média}\left(\frac{D_1}{P}\right) + \text{média}(g) \quad (22)$$

No modelo de Gordon,  $P$  reflete o preço do índice de cada país e  $D_1$  os seus respectivos dividendos. A relação  $\frac{D_1}{P}$  são o *dividend yield* do índice MSCI ACWI que foi coletado na base de dados da Bloomberg para o período estudado. Para calcular o  $g$  (taxa de crescimento), foi utilizada a taxa e crescimento do PIB global obtida através do site do FMI (Fundo Monetário Internacional). Essa é uma *Proxy* razoável para representar a taxa de crescimento da carteira de mercado, pois como o índice MSCI ACWI possui papéis de diversas empresas do mundo inteiro, o crescimento dos países é um bom representante do quanto se espera que todas as empresas, na média, se valorizem. Os valores calculados podem ser observados na Tabela 2.



**Tabela 2- Paramentos utilizados para calcular o modelo de Gordon**

Ano	<i>Dividend Tiled</i> índice MSCI ACWI	Crescimento Global	E ( $r_m$ ) anual	E ( $r_m$ ) mensal
2012	2,72%	4,54% <sup>1</sup>	7,27%	0,61%
2011	2,84%	5,25%	8,09%	0,67%
2010	2,88%	5,40%	8,28%	0,69%
2009	2,35%	2,76%	5,11%	0,43%
2008	2,47%	-0,61%	1,86%	0,15%
2007	4,03%	5,27%	9,30%	0,77%
2006	2,34%	3,85%	6,19%	0,52%
2005	2,15%	3,53%	5,68%	0,47%

Fonte: Bloomberg e FMI

O último passo para se chegar à SML é a estimação do beta. Para isso foi feita uma regressão do excesso de retorno dos índices com relação ao excesso de retorno do índice MCSI ACWI, que representa a carteira de mercado, de acordo com a equação (23).

$$r_{i,t} - r_{f,t} = \alpha_i + \beta_i \cdot (r_{m,t} - r_{f,t}) \quad (23)$$

Onde,

- $r_{i,t}$  = retorno mensal dos índices de ações i entre o período de 2006 até 2011
- $r_{f,t}$  = retorno mensal do *US treasury Note* de 10 anos entre o período de 2006 até 2011
- $r_{m,t}$  = retorno mensal do índice MSCI ACWI entre o período de 2006 até 2011
- $\alpha_i$  = constante da regressão para o índice i
- $\beta_i$  = coeficiente que mede o risco sistemático para o índice i

Com os valores dos betas de todos os índices é possível estimar o retorno de cada índice para o próximo mês da amostra, que no caso é janeiro de 2012. A Tabela 3 demonstra os resultados obtidos.

<sup>1</sup> Expectativa do Fundo Monetário Internacional (FMI) do crescimento do PIB mundial em 2012.

**Tabela 3-Resultado dos betas e da expectativa de retorno de cada índice**

Índice	Beta	E ( $r_i$ ) mensal
S&P 500	0,86	0,54%
IPC	1,23	0,71%
IBOVESPA	1,59	0,88%
IPSA	0,85	0,54%
FTSE 100	1,01	0,62%
DAX	1,32	0,76%
FTSEMIB	1,37	0,78%
CAC 40	1,26	0,73%
IBEX	1,26	0,73%
Nikkei	0,77	0,51%
Hang Seng	1,08	0,65%

Fonte: Bloomberg, Benninga (2008) e análise própria.

A partir dos algoritmos descritos nas equações (21), (22) e (24) chegamos à carteira estimada pelo modelo de Markowitz (1952). O modelo de cálculo foi adaptado de Benninga (2008). A Tabela 4 contém a matriz de covariâncias e alocação obtida com o modelo. A matriz de covariância ( $\Sigma$ ) foi estimada pelo *single-index Model*. Bodie, Kane e Marcus (2009) afirmam que esse modelo, apesar de mais simples do que o método de cálculo da matriz de covariância sugerida por Markowitz (1952) pode ser mais eficiente. Isso pelo fato de que a matriz sugerida por Markowitz exige a estimação dos erros de muitos termos, o que pode gerar um menor grau de confiança. Sendo assim, a equação (24) demonstra como será estimada a covariância entre os ativos.

$$Cov(r_i, r_j) = \beta_i \cdot \beta_j \cdot \sigma_{mkt}^2 \quad (24)$$

Em que:

- $Cov(r_i, r_j)$  = covariância entre os retornos dos ativos i e j.
- $\beta_i$  e  $\beta_j$  = betas dos ativos i e j em relação à carteira de mercado.
- $\sigma_{mkt}^2$  = variância da carteira de mercado.

**Tabela 4 – Matriz de covariâncias e alocações obtidas com o modelo de Markowitz**

<b>Matriz de covariância do excesso de retorno dos ativos</b>											
	S&P 500	IPC	Ibovespa	IPSA	FTSE 100	DAX	FTSEMIB	CAC 40	IBEX	Nikkei	Hang Seng
S&P 500	0,0025	0,0034	0,0044	0,0023	0,0028	0,0036	0,0038	0,0035	0,0035	0,0021	0,0030
IPC	0,0034	0,0063	0,0063	0,0034	0,0040	0,0052	0,0054	0,0050	0,0050	0,0030	0,0043
Ibovespa	0,0044	0,0063	0,0113	0,0044	0,0052	0,0068	0,0070	0,0064	0,0064	0,0039	0,0055
IPSA	0,0023	0,0034	0,0044	0,0053	0,0028	0,0036	0,0037	0,0034	0,0034	0,0021	0,0030
FTSE 100	0,0028	0,0040	0,0052	0,0028	0,0036	0,0043	0,0044	0,0041	0,0041	0,0025	0,0035
DAX	0,0036	0,0052	0,0068	0,0036	0,0043	0,0065	0,0058	0,0053	0,0053	0,0033	0,0046
FTSEMIB	0,0038	0,0054	0,0070	0,0037	0,0044	0,0058	0,0072	0,0055	0,0055	0,0034	0,0047
CAC 40	0,0035	0,0050	0,0064	0,0034	0,0041	0,0053	0,0055	0,0058	0,0051	0,0031	0,0044
IBEX	0,0035	0,0050	0,0064	0,0034	0,0041	0,0053	0,0055	0,0051	0,0070	0,0031	0,0044
Nikkei	0,0021	0,0030	0,0039	0,0021	0,0025	0,0033	0,0034	0,0051	0,0031	0,0028	0,0027
Hang Seng	0,0030	0,0043	0,0055	0,0030	0,0035	0,0046	0,0047	0,0044	0,0044	0,0027	0,0053
<b>Alocação Obtida pelo método de Markowitz (1952)</b>											
Alocação	139%	-10%	-16%	9%	25%	-26%	-23%	-26%	-9%	38%	1%

Fonte: Bloomberg, Benninga (2008) e análise própria.

## 4.2 Modelo Black Litterman (1992)

Dado os resultados do modelo de Markowitz, agora será feita a modelagem do Black Litterman para realizarmos a comparação entre dois métodos. Black e Litterman (1991) partem do pressuposto que o investidor deve escolher um grupo de ativos que definirá a base da sua carteira de investimentos. Esse universo de ativos irá determinar a carteira de equilíbrio que será o ponto inicial da construção do modelo.

A construção da carteira de equilíbrio será feita a partir do índice MSCI ACWI que possui ações de países desenvolvidos e emergentes. A nossa construção será feita a partir de uma adaptação da proposta de Benninga (2008). Como nosso universo de ativos possui onze países, será feito um ajuste proporcional da exposição desses países no índice MSCI ACWI. Em outras palavras, pegamos a exposição desses países no índice e obtivemos um total de 74%. Os 26% restantes foram adicionados proporcionalmente ao peso original de cada um dos onze países de modo a alcançar uma magnitude de 100% na alocação de nossa carteira de equilíbrio. Os pesos da carteira de equilíbrio podem ser observados na Tabela 5.

**Tabela 5 – Pesos de cada país na carteira de equilíbrio**

	Original	Ajustada
Alemanha	3,21%	4,32%
Brasil	1,85%	2,49%
Chile	0,17%	0,23%
Espanha	1,83%	2,46%
EUA	42,41%	57,06%
França	4,24%	5,70%
Hong Kong	0,95%	1,28%
Itália	1,51%	2,03%
Japão	9,14%	12,30%
México	0,50%	0,67%
Reino Unido	8,52%	11,46%
<b>TOTAL</b>	<b>74%</b>	<b>100%</b>

Fonte: Fundo Monetário Internacional e análise própria

De acordo com Benninga (2008), uma carteira otimizada deve seguir a equação (25):

$$p_{eq} = \Sigma^{-1} \cdot [K - r_f] \quad (25)$$

Onde,

- $p_{eq}$  = matriz de pesos da carteira de equilíbrio
- $\Sigma^{-1}$  = matriz inversa de covariância
- $K$  = matriz que contém a expectativa do retorno dos ativos
- $r_f$  = ativo livre de risco

Partindo do pressuposto que uma carteira de investimentos na pode ser alavancada, o valor da soma de  $\Sigma^{-1} \cdot [K - r_f]$  tem que ser igual a um (ou 100%). O investidor, na ausência de conhecimentos ou informações adicionais sobre o mercado, utilizará os pesos sugeridos pela carteira de equilíbrio. Como pode ser observada na Tabela 2, a expectativa de retorno mensal para a carteira de mercado é de 0,61%. Sendo assim, invertendo a equação (25), Benninga (2008) adiciona um fator normalizador de modo que o resultado da expectativa de retorno da carteira deve ser igual ao que foi estimado. A equação (26) explica esse cálculo:

$$K = [p_{eq} \cdot \Sigma \cdot N] + r_f \quad (26)$$

$N$  é o fator normalizador que pode ser entendido pela equação (27):

$$(27)$$

$$N = \frac{E(r_m) - r_f}{p_{eq} \cdot \Sigma \cdot p'_{eq}}$$

Com isso chegamos aos retornos dos índices que estão dentro da carteira de equilíbrio. Os valores obtidos estão evidenciados na Tabela 6.

**Tabela 6 – Retorno dos índices derivados do fato normalizador**

Índice	Retorno mensal com o fator normalizador
S&P 500	0,56%
IPC	0,72%
IBOVESPA	0,90%
IPSA	0,55%
FTSE 100	0,63%
DAX	0,77%
FTSEMIB	0,79%
CAC 40	0,74%
IBEX 35	0,74%
Nikkei	0,53%
Hang Seng	0,66%

Fonte: Bloomberg, Benninga (2008) e análise própria.

Agora que temos a carteira de equilíbrio o próximo passo é atribuir a opinião do investidor na carteira que foi incorporada no modelo através do CAPM proposto por Black (1989). A Tabela 7 mostra o fator de proteção calculado através da equação (6).

**Tabela 7 – Cálculo do fator de proteção**

Expectativa de retorno do índice MSCI ACWI	7,27%
<i>US Treasury Note</i> de 10 anos	1,88%
Excesso de retorno esperado do índice MSCI ACWI	5,39%
Volatilidade do índice MSCI ACWI	0,32%
Média das taxas de cambio dos países dentro da carteira	0,12%
Fator de proteção	0,94

Fonte: Bloomberg, Black (1989) e análise própria.

Segundo Black (1989) essa é a proporção na qual o investidor deve se proteger dos ativos de sua carteira de investimentos, esse *hedge* representa no nosso modelo a visão do investidor. Sendo assim, a inclusão da opinião será feita de acordo com a equação (28).

$$E(r_{opini\tilde{a}o}) = p_{eq} \cdot \Sigma \cdot \Delta \quad (28)$$

Em que,

- $p_{eq}$  = matriz de pesos da carteira de equilbrio
- $\Sigma$  = matriz de covariâncias da carteira de equilbrio
- $\Delta$  = vetor que possui o fator de proteçao

Com esses retornos podemos encontrar agora os pesos dos ativos da carteira com a opinião do investidor. Benninga utiliza a equaçao (29) para se chegar aos pesos ótimos da carteira:

$$p_{opini\tilde{a}o} = \frac{\Sigma^{-1} \cdot [E(r_{opini\tilde{a}o}) - r_f]}{\text{soma}\{\Sigma^{-1} \cdot [E(r_{opini\tilde{a}o}) - r_f]\}} \quad (28)$$

Onde,

- $E(r_{opini\tilde{a}o})$  = matriz de retornos dos ativos da carteira ajustados pela opinião dos investidores
- $\Sigma^{-1}$  = matriz inversa da covariância da carteira de equilbrio
- $r_f$  = *US treasury Notes* de 10 anos

A incerteza da precisao com a qual os retornos esperados são estimados, que é medida pelo parâmetro  $\tau$ , é uma das maiores dificuldades para a implementaçao do modelo Black Litterman na prática, segundo Hsu et al (2008). Black e Litterman (1992) atribuíram um valor próximo de zero enquanto que Satchell e Scrowcroft (2000) defendem um valor aproximado a um. Já Hsu et al (2008) argumentam que a incerteza dos retornos esperados é menor do que a volatilidade dos retornos reais. Sendo assim, faz sentido atribuir um valor menor do que um para  $\tau$ . É intuitivo também pensar que quanto maior for a base de dados, menor seriam os erros das estimaçoes dos retornos e, portanto, mais preciso seria a estimativa de  $\Pi$ . Sendo assim, uma boa equaçao para calcular o valor de  $\tau$  seria,  $\tau = \frac{1}{T}$ . Onde, T seria o período da amostra em anos.

No entanto, é esperado que o gestor ajuste a confianca de suas previsões de acordo com as variáveis que julgue importantes ao longo do tempo. Em outras palavras, se ao longo do tempo suas previsões forem sendo atingidas, é razoável que o gestor passe aumentar sua confianca. Deste modo, neste trabalho fixamos o valor da confianca em um valor arbitrário de 0,5.

Benninga (2008) sugere que podemos simplificar a equação (20) e ajustar nossa confiança nas opiniões por meio de uma combinação da carteira de equilíbrio e da carteira com a visão do gestor. Essa ideia pode ser expressa por meio da equação (30).

$$p_{BL} = (1 - \tau) \cdot p_{eq} + \tau \cdot p_{opini\tilde{a}o} \quad (30)$$

O resultado do modelo de Black Litterman (1992) esta na Tabela 8 sendo que o detalhamento de todos os caulos feitos ate aqui estão demonstrados no apêndice deste trabalho.

**Tabela 8 - Resultado Final do Modelo Black Litterman**

	Pesos da carteira de equilbrio (Tabela 5)	Retorno com o fator normalizador (equação 26)	Fator de proteção (tabela 7)	Retorno da carteira com a opinião (equação 28)	Pesos da carteira com a opinião (equação 29)	Confiança na estimação dos parâmetros ( $\tau$ )	Pesos da carteira do modelo BL (equação 30)
S&P 500	57,06%	0,56%	0,94	1,875	-29,83%	0,50	13,61%
IPC	0,67%	0,72%	0,94	2,75%	14,87%	0,50	7,77%
IBOVESPA	2,49%	0,90%	0,94	3,62%	16,75%	0,50	9,62%
IPSA	0,23%	0,55%	0,94	2,01%	9,26%	0,50	4,74%
FTSE 100	11,46%	0,63%	0,94	2,22%	4,29%	0,50	7,87%
DAX	4,32%	0,77%	0,94	2,92%	19,75%	0,50	12,03%
FTSEMIB	2,03%	0,79%	0,94	3,03%	18,80%	0,50	10,41%
CAC 40	5,70%	0,74%	0,94	2,77%	19,54%	0,50	12,62%
IBEX 35	2,46%	0,74%	0,94	2,84%	14,53%	0,50	8,49%
Nikkei	12,30%	0,53%	0,94	1,72%	0,45%	0,50	6,37%
Hang Seng	1,28%	0,66%	0,94	2,43%	11,61%	0,50	6,44%

Fonte: Bloomberg e análise própria

### 4.3 Comparações entre os modelos

Como forma de comparação entre os dois modelos foi feito o cáculo do ndice Sharpe para cada um deles. Através do Sharpe podemos fazer uma avaliação quantitativa da sensibilidade do retorno da carteira para cada unidade de risco (desvio padrão). Além disso, como foi citado pelos autores Black e Litterman (1992), o modelo de Markowitz (1952) costuma apresentar resultados inviáveis no mundo real, como por exemplo, posições de venda muito grandes. Sendo assim, uma das propostas do modelo Black Litterman (1992)  corrigir esse problema de posições muito concentradas. Portanto, será levado em conta também na comparação entre os modelos o resultado obtido com as alocações de cada carteira. A equação (31) apresenta como é feito o cáculo do ndice Sharpe.

$$Sharpe = \frac{E(r_{carteira}) - r_f}{\sigma_{carteira}} \quad (31)$$

Onde,

- $E(r_{carteira})$  = retorno da carteira com um dos dois modelos
- $r_f$  = *US treasury Notes* de 10 anos
- $\sigma_{carteira}$  = desvio padrão da carteira

Para se chegar aos pesos de cada uma das carteiras (que foram explicados nas sessões 4.1 e 4.2) foram utilizados dados de 2006 até 2012. Para calcular o índice Sharpe de cada uma das carteiras, foi utilizado o retorno de cada um dos índices que compõem as carteiras entre o período de janeiro a abril de 2012. A tabela 9 apresenta os resultados obtidos:

**Tabela 9 – Índice Sharpe dos portfólios**

Mês	Índice Sharpe	
	Black Litterman	Markowitz
Janeiro	11,13	-0,78
Fevereiro	14,57	2,57
Março	-5,45	6,66
Abril	-11,99	3,11
Quadrimestre	0,61	1,17

Fonte: Bloomberg e análise própria

Como pode ser observada, nos dois primeiros meses, a carteira Black Litterman apresentou um melhor desempenho do que a carteira de Markowitz. No entanto, nos dois meses seguintes ocorreu o contrário. Essa superação da carteira de Markowitz nos dois últimos meses pode ser explicada pelo fato de que nela existem grandes posições vendidas e a maioria dos índices de ações apresentou, nesses meses, uma forte queda. Além disso, como demonstrado na Figura 2, era esperado que o desvio padrão da carteira resultante do modelo Black Litterman fosse menor do que a resultante do Markowitz e isso ocorreu nos quatro meses (os resultado podem ser observados com mais detalhes na Figura 1 do apêndice deste trabalho).

Com relação ao segundo critério de análise, o peso das carteiras, a distribuição dos pesos do portfólio resultante do modelo Black Litterman é menos concentrada do que a de Markowitz como se esperava. Vale ressaltar que apesar da carteira de Black Litterman não ter apresentado nenhuma posição vendida e a carteira de Markowitz apresentar algumas, ambos os modelos fora feitos sem nenhuma restrição. Ou seja, o fato da carteira de Black Litterman não ter posições vendidas foi um resultado natural do modelo.



**Tabela 10 – Comparação entre s pesos das duas carteiras**

Índice	Pesos da carteira de Black	
	Litterman	Markowitz
S&P 500	13,40%	138,73%
IPC	7,80%	-10,16%
IBOVESPA	9,66%	-16,41%
IPSA	4,75%	8,53%
FTSE 100	7,85%	25,09%
DAX	12,09%	-26,41%
FTSEMIB	10,47%	-23,24%
CAC 40	12,68%	-25,71%
IBEX 35	8,52%	-9,01%
Nikkei	6,33%	37,87%
Hang Seng	6,46%	0,71%

Fonte: análise própria

## 5 Conclusão

Efetuamos uma comparação entre os modelos de Black Litterman e Markowitz propondo a metodologia do CAPM de Black (1989) para atribuir as visões dos gestores e, assim, incorporá-las no primeiro modelo. Com relação aos resultados do trabalho, um deles foi atingido como era esperado e o outro não. O primeiro, diz respeito à alocação das carteiras. Uma das críticas que Black e Litterman (1992) fizeram ao modelo de Markowitz (1952) foi com relação aos pesos das carteiras alcançados quando este era aplicado. Os resultados não eram condizentes com a realidade, pois não é usual gestores alocarem suas carteiras com grandes posições vendidas ou posições muito concentradas em alguns ativos. O mais racional seria diversificar os investimentos para que o risco da carteira não seja muito alto e isso ocorreu com os pesos atingidos pela aplicação do modelo de Black Litterman chegando, portanto, a uma alocação mais equilibrada e realista.

O segundo resultado esperado era um desempenho melhor do índice Sharpe para a carteira de Black e Litterman. No entanto, no quadrimestre a carteira de Markowitz foi mais eficiente, principalmente pelo fato dos índices no mundo inteiro apresentarem quedas durante esse período e a carteira possui muitas posições vendidas.

Essa comparação poderia ser melhor se o período dela fosse maior, pois assim existiriam mais dados para se chegar a uma conclusão mais plausível de qual das duas carteiras apresenta um índice Sharpe mais eficiente. Além disso, a comparação poderia ser mais adequada com a inclusão de algumas restrições nos dois modelos, tornando-os mais realistas.

## Referências Bibliográficas

- BENNINGA, Simon. **Financial Modeling**. Cambridge: The MIT Press, 2008. 1169 p.
- BLACK, Fischer. Universal Hedging: Optimizing Currency Risk and Reward in International Equity Portfolios. **Financial Analysts Journal**, n. 45, n.4, p. 16-22, 1989.
- BLACK, Fischer; LITTERMAN, Robert. Global portfolio optimization. **Financial Analysts Journal**, v 48, n. 5, p. 28-43, 1991.
- BODIE, Zvi; KANE, Alex, MARCUS, Alan. Investments, New York: Mc Graw-Hill, 2009. 990p.
- HE, Guangliang; LITTERMAN, Robert. The Intuition Behind Black-Litterman Model Portfolios. **Investment Management Research**, 1999.
- HSU, John S. J.; BAGASHEVA, Biliانا S.; RACHEV, Svetlozar T. **Bayesian methods in finance**. New Jersey: Wiley, 2008. 329p.
- LINTNER, Jhon. The Valuation of Risk assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolio Selection. **Review of Economic and Statistics**, vol. 47, n. 1, p. 13-37, 1965.
- MANKERT, Charlotta. The Black Litterman Model – Mathematical and behavioral finance approaches towards its use in practice. Stockholm Royal Institute of Technology, 2006.
- MARKOWITZ, Harry. Portfolio Selection. **The Journal of Finance**, vol. 7, n. 1, p. 77-91, 1952.
- MERTON, Robert C. An Analytical Derivation of the Efficient Portfolio Frontier. **Journal of Financial and Quantitative Analysis** 7, pp. 1851-1872.
- MOSSIN, Jan. Equilibrium in Capital Asset Market. **Econometrica**, v. 34, n. 4, p. 91, 1966.
- PIVA, Andre. *O modelo Black-Litterman: um teste para o mercado brasileiro*. Monografia entregue ao curso de Ciências Econômicas da Faculdade IBMEC-SP, como requisito para a disciplina Monografia II, 2009.
- ROLL, Richard; SOLNIK, Bruno. A Pure Foering Exchange Asset Pricing Model. **Journal of International Economics**, v. 7, n. 2, p. 161-179, 1977.
- SATCHELL, Stephen; SCOWCROFT, Alan. A demystification of Black-Litterman model: Managing quantitative and traditional portfolio construction. **Journal of Asset Management**, vol. 1, n. 2, p. 138-150, 2000.
- SHARPE, Willian. Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibriem Under Conditions of Risk. **The Journal of Finance**, v. 19, n. 3, p. 425-442, 1964.

SHARPE, William F., ALEXANDER, Gordon J. e BAILEY, Jeffery V. Investments.  
New Jersey: Prentice Hall, Fifth Edition, 1995.

# APÊNDICE

Este apêndice tem como objetivo facilitar o entendimento do leitor com relação aos cálculos realizados neste trabalho. Nas tabelas abaixo, ao lado dos valores está explicado quais foram as fórmulas do Excel utilizadas no cálculo em casa passo do modelo. As fórmulas foram indicadas por cada coluna de uma determinada tabela, de modo que as fórmulas das células da mesma coluna seguem o mesmo padrão.

Para melhor entendimento desse processo observe o exemplo: caso a fórmula sugerida na coluna A for indicada por =B1+C\$2\$, significa que o resultado da célula A1 será o resultado de B1+C2. Devido aos cifrões a célula C2 é fixa para o cálculo de todas as outras células desta coluna. Portanto, outras células pertencentes à coluna A (A2, A3, A4, etc.) seguirão a mesma lógica, ou seja, a célula A2 será igual a B2+C\$2\$; A3 igual B3+C\$2\$ e assim por diante. No caso de cálculo de matrizes, a matriz inteira é representada pela mesma fórmula, sendo assim, a lógica citada acima não se faz necessária.

A primeira figura desse apêndice demonstra como foi calculado o índice Sharpe para as duas carteiras, Black e Litterman e Markowitz. A segunda demonstra os cálculos feitos para se atingir às alocações ótimas das duas carteiras.

**Figura 1 – Cálculo do índice Sharpe**

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10												
11												
12												
13												
14												
15												
16												
17												
18												
19												
20												
21												
22												
23												
24												
25												
26												
27												
28												
29												
30												
31												
32												
33												
34												
35												
36												
37												
38												
39												
40												
41												
42												
43												
44												
45												
46												
47												
48												
49												
50												
51												
52												
53												
54												
55												
56												
57												
58												
59												
60												
61												
62												
63												
64												
65												
66												
67												
68												
69												
70												
71												
72												
73												
74												
75												
76												
77												
78												
79												
80												
81												
82												
83												
84												
85												
86												
87												
88												
89												
90												
91												
92												
93												
94												
95												
96												
97												
98												
99												
100												

Figura 2 – Pesos das carteiras dos modelos Black Litterman e Markowitz

Ano	Estrutura de retornos		Estrutura de riscos		Estrutura de correlações		Estrutura de volatilidades		Estrutura de covariâncias	
	Retorno	Risco	Correlação	Volatilidade	Covariância	Retorno	Risco	Correlação	Volatilidade	Covariância
2000	1.2%	0.3%	0.1%	1.8%	0.01%	0.2%	0.1%	1.5%	0.005%	0.1%
2001	1.5%	0.4%	0.2%	2.0%	0.015%	0.3%	0.2%	1.7%	0.007%	0.15%
2002	1.8%	0.5%	0.3%	2.2%	0.02%	0.4%	0.3%	1.9%	0.009%	0.2%
2003	2.1%	0.6%	0.4%	2.4%	0.025%	0.5%	0.4%	2.1%	0.011%	0.25%
2004	2.4%	0.7%	0.5%	2.6%	0.03%	0.6%	0.5%	2.3%	0.013%	0.3%
2005	2.7%	0.8%	0.6%	2.8%	0.035%	0.7%	0.6%	2.5%	0.015%	0.35%
2006	3.0%	0.9%	0.7%	3.0%	0.04%	0.8%	0.7%	2.7%	0.017%	0.4%
2007	3.3%	1.0%	0.8%	3.2%	0.045%	0.9%	0.8%	2.9%	0.019%	0.45%
2008	3.6%	1.1%	0.9%	3.4%	0.05%	1.0%	0.9%	3.1%	0.021%	0.5%
2009	3.9%	1.2%	1.0%	3.6%	0.055%	1.1%	1.0%	3.3%	0.023%	0.55%
2010	4.2%	1.3%	1.1%	3.8%	0.06%	1.2%	1.1%	3.5%	0.025%	0.6%
2011	4.5%	1.4%	1.2%	4.0%	0.065%	1.3%	1.2%	3.7%	0.027%	0.65%
2012	4.8%	1.5%	1.3%	4.2%	0.07%	1.4%	1.3%	3.9%	0.029%	0.7%
2013	5.1%	1.6%	1.4%	4.4%	0.075%	1.5%	1.4%	4.1%	0.031%	0.75%
2014	5.4%	1.7%	1.5%	4.6%	0.08%	1.6%	1.5%	4.3%	0.033%	0.8%
2015	5.7%	1.8%	1.6%	4.8%	0.085%	1.7%	1.6%	4.5%	0.035%	0.85%
2016	6.0%	1.9%	1.7%	5.0%	0.09%	1.8%	1.7%	4.7%	0.037%	0.9%
2017	6.3%	2.0%	1.8%	5.2%	0.095%	1.9%	1.8%	4.9%	0.039%	0.95%
2018	6.6%	2.1%	1.9%	5.4%	0.1%	2.0%	1.9%	5.1%	0.041%	1.0%
2019	6.9%	2.2%	2.0%	5.6%	0.105%	2.1%	2.0%	5.3%	0.043%	1.05%
2020	7.2%	2.3%	2.1%	5.8%	0.11%	2.2%	2.1%	5.5%	0.045%	1.1%

Asset	Black-Litterman	Markowitz
S&P 500	0.32%	0.32%
MEIBCL	0.0044	0.0044
IBOVESPA	0.0044	0.0044
FSA	0.0044	0.0044
FTSE100	0.0044	0.0044
DXI	0.0044	0.0044
FTSEMIB	0.0044	0.0044
CAC40	0.0044	0.0044
IBEX	0.0044	0.0044
Nikkei	0.0044	0.0044
HangSeng	0.0044	0.0044

Asset	Black-Litterman	Markowitz
S&P 500	0.32%	0.32%
MEIBCL	0.0044	0.0044
IBOVESPA	0.0044	0.0044
FSA	0.0044	0.0044
FTSE100	0.0044	0.0044
DXI	0.0044	0.0044
FTSEMIB	0.0044	0.0044
CAC40	0.0044	0.0044
IBEX	0.0044	0.0044
Nikkei	0.0044	0.0044
HangSeng	0.0044	0.0044