Insper Instituto de Ensino e Pesquisa
Faculdade de Economia e Administração

Guilherme Ferreira Pelúcio Salomé

Superhedging em Mercados Incompletos

São Paulo
2011

Guilherme Ferreira Pelúcio Salomé

Superhedging em Mercados Incompletos

Monografia entregue ao Curso de Ciências Econômicas como requisito para sua conclusão.

Orientador:
Prof. Dr. José Heleno Faro – Insper

São Paulo
2011

Salomé, Guilherme Ferreira Pelúcio
Superhedging em mercados incompletos / Guilherme Ferreira Pelúcio Salomé. – São Paulo: Insper, 2011.
49 f.

Monografia: Faculdade de Economia e Administração. Insper Instituto de Ensino e Pesquisa.

Orientador: Prof. Dr. José Heleno Faro

1.*Superhedging* 2. Mercados Incompletos 3. Precificação de Ativos 4. Regulação

Guilherme Ferreira Pelúcio Salomé

Superhedging em Mercados Incompletos

Monografia apresentada à Faculdade de Economia do Insper, como parte dos requisitos para conclusão do curso de graduação em Economia.

Aprovado em Dezembro 2011

EXAMINADORES

Prof. Dr. José Heleno Faro
Orientador

Prof. Dr. Marco Lyrio
Examinador

Prof. Dr. Ricardo Brito
Examinador

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço à Deus por todas as oportunidades concedidas e pelos momentos de felicidade.

Em segundo, agradeço ao Prof. Dr. José Heleno Faro por sua orientação durante a realização desta monografia, por sua compreensão e apoio nos momentos de dúvida, e por sua extrema boa vontade em ajudar. A realização deste trabalho seria impossível sem seu auxílio.

Em especial, agradeço os professores que inspiraram e incentivaram minha grande dedicação ao curso de economia, permitindo meu amadurecimento e crescimento ao longo dos anos de faculdade.

Também agradeço àqueles amigos em quem sempre pude confiar e cuja amizade proporcionou muitos momentos de alegria.

Por fim, agradeço à minha família e principalmente aos meus tios, pelo apoio e carinho ao longo de minha vida.

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais, por sua infinita compreensão, amor e auxílio. Muito obrigado por tudo.

Resumo

SALOMÉ, Guilherme F. P. *Superhedging* em Mercados Incompletos. São Paulo, 2011. 48f. Monografia – Faculdade de Economia e Administração. Insper Instituto de Ensino e Pesquisa.

Este trabalho realiza estudos na área de mercados incompletos quanto ao uso da teoria de *superhedging,* desenvolvendo uma revisão da literatura que aborda os pré-requisitos matemáticos, estatísticos e financeiros para o uso desse ferramental. Embasado nesses conceitos, analisa-se tipos específicos de mercados incompletos, como o mercado de seguros de automóveis e de seguros de saúde, calculando preços de *superhedging* para diferentes situações e apresentando a intuição econômica dos resultados obtidos. Discute-se também qual o impacto da regulamentação em mercados incompletos, considerando um contexto de escolha amparada em curvas de utilidade.

Palavras-chave: *Superhedging*; Mercados Incompletos; Precificação de Ativos; Regulação.

Abstract

SALOMÉ, Guilherme F. P. *Superhedging* in Incomplete Markets. São Paulo, 2011. 48f. Monografia – Faculdade de Economia e Administração. Insper Instituto de Ensino e Pesquisa.

This work conducts research in the area of incomplete markets regarding the use of the superhedging theory and also develops a literature review that addresses the mathematical, statistical and financial prerequisites for the use of such tool. Grounded in these concepts, distinct incomplete markets are analyzed, providing the superhedging price for specific contracts and the economic intuition for the results obtained. Additionally, the impact of regulation on incomplete markets is discussed considering the context in which choices are supported by utility curves.

Keywords: *Superhedging*; Incomplete Markets; Asset Pricing; Regulation.

Sumário

1 Introdução ... **9**

2 Revisão da Literatura ... **13**

2.1 Álgebra Linear ... 13
2.1.1 Espaços Vetoriais e Subespaços Vetoriais ... 13
2.1.2 Espaços Vetoriais Finitamente Gerados, Dependência Linear, Base e Dimensão ... 14
2.1.3 Transformações Lineares e Produto Interno ... 16
2.1.4 Espaço Dual ... 16
2.1.5 Cotas Inferiores e Superiores, Supremos e Ínfimos ... 17

2.2 Elementos de Probabilidade ... 17
2.2.1 Medidas de Probabilidade ... 17
2.2.2 Esperança Matemática ... 18

2.3 Integral de Choquet ... 19

3 Metodologia ... **20**

3.1 Modelagem de Cenários, Ativos Financeiros e Preço ... 20

3.2 Princípio de Não Arbitragem ... 21

3.3 Medida Neutra ao Risco ... 21

3.4 Teorema Fundamental da Precificação de Ativos ... 22

3.5 Mudança de Base ... 23

3.6 Portfólios Replicáveis, Ativos Redundantes e Retorno ... 23

3.7 Contratos de Derivativos ... 24

3.8 Introdução e Precificação de um Novo Ativo e Preço de *Superhedging* ... 26

3.9 *Superhedging* para Opções ... 28

4 Aplicações do Ferramental de *Superhedging* ... **29**

4.1 Aplicação de *Superhedging* para o Mercado de Seguros de Automóveis ... 29

4.2 *Superhedging* com resultados não triviais ... 33

4.3 *Superhedging*, Regulação e Curvas de Utilidade ... 36
4.3.1 Regulação em um Ambiente de Indiferença ... 36
4.3.2 Regulação com Diferentes Métodos de Escolha ... 38

4.4 Comentários a Respeito da Regulação em Mercados Incompletos ... 43

5 Conclusão ... **47**

Referências ... **49**

1 Introdução

A precificação de ativos é um problema comum em diversos mercados, que ocorre quando se necessita calcular o preço justo de certo objeto, determinar o preço de um produto a ser lançado ou encontrar o preço de um bem que não é transacionado diretamente. Esse tema é relevante não apenas para o sucesso de empresas e instituições financeiras, mas também para a determinação da utilidade dos indivíduos e, consequentemente, influencia as relações de oferta e demanda por bens, trabalho, moeda, dentre outras. Como os preços definem as alocações de recursos que os agentes econômicos irão realizar, a sua exata determinação irá repercutir em bons ou maus investimentos, impactando diretamente o desenvolvimento de uma sociedade.

Nos casos em que se objetiva calcular o preço de um ativo já disponível no mercado ou de um novo ativo a ser comercializado, como o valor da ação de uma empresa que irá abrir seu capital, existem diversas teorias que propõem diferentes metodologias. De acordo com Duffie (2003, p.642), no contexto de mercados completos com ausência de arbitragem, pode-se reduzir esses tipos de problemas ao cálculo de *state prices*, noção originalmente proposta por Arrow (1953), conceito que implica que o valor de um ativo é a soma ponderada dos seus fluxos de caixa futuros descontados em cada momento pela taxa marginal de substituição entre oportunidades de investimento e oportunidades presentes de consumo. Dessa forma, as discussões subsequentes à respeito da precificação nesse tipo de situação passam a se referir às diferentes metodologias para estimar fluxos de caixa e suas taxas de desconto.

Já para os casos em que não há a disponibilidade do ativo ou contrato para negociação no mercado, outro método se faz necessário para a sua precificação. Pode-se elucidar o problema com um exemplo do mercado de seguros: muitas pessoas possuem um histórico familiar com tendência a desenvolver diabetes e, portanto, estariam dispostas a fazer um seguro para pagar pelo tratamento dessa doença caso ela se manifestasse – entretanto – não é possível contratar apenas esse serviço, isto é, deve-se adquirir um seguro que cubra diversas doenças. Dessa maneira, diz-se que há um problema de mercados incompletos, já que não é possível realizar o *hedge* perfeito referente a algumas contingências e, utiliza-se o ferramental de s*uperhedging* (proteção contra riscos ao menor custo possível) para estimar seus preços.

Nota-se então que a teoria de *superhedging*, como abordada por Föllmer & Schied (2004), é intrínseca ao ambiente de mercados incompletos, e visa capturar as consequências desta imperfeição na determinação dos preços.

Henderson & Hobson (2004) definem que uma carteira está protegida por um *superhedge*, ou foi super-replicada, quando o portfólio que realiza a sua proteção sempre gera um resultado maior ou igual ao da carteira. Ainda, discutem que o preço desse *hedge* é aquele que minimiza os gastos para gerar essa proteção. Outro exemplo do problema de *superhedging* é aquele aplicado ao mercado de derivativos, e que é citado por Argesanu (2004). Nesse caso, a carteira de *superhedging* é aquela que demanda a menor quantidade possível de capital, de modo que não se tenha riscos associados ao derivativo. Como exemplo, suponha que tal derivativo seja uma posição vendida em um contrato futuro de dólares e, dessa forma, o *hedge* imediato seria a compra do mesmo contrato. Porém, em função de iliquidez recente no mercado, suponha que seja impossível comprar tal derivativo. Assim, o portfólio que protegerá a posição, será a captação de dólares, operação que certamente possui um custo maior que a compra de um contrato futuro.

Pode-se entender esse problema também do ponto de vista da teoria da utilidade. Carasuss & Rásonyi (2005) explicam que o custo de *superhedging* é a menor riqueza inicial necessária para se proteger de oscilações, isto é, o custo que o agente está disposto a arcar, de modo que ele tenha a mesma utilidade protegido e não protegido (mas sem custos).

Resume-se então o problema de *superhedging* como a determinação do preço daquele contrato que garante o *hedge* – eliminação dos riscos - ao menor custo possível, que em geral implicará também na cobertura de algumas contingências adicionais. Observa-se que essa cobertura fará com que o preço da estratégia de *superhedging* seja sempre portencialmente maior que o preço do *hedge* caso o mercado fosse completo.

Ressalta-se que essa teoria se aplica em diversas áreas de interesse financeiro, desde renda fixa e renda variável, até opções exóticas – pois sempre que há mercados incompletos e necessidade de proteção da carteira, será necessário realizar uma operação de *superhedging* e, portanto, precificar tal operação.

Dessa forma, o objeto de estudo desse trabalho é a revisão do material teórico que embasa a teoria de *superhedging* e a aplicação desse modelo para o mercado de seguros e para o cálculo dos preços de *superhedging* para opções, num contexto de dois períodos e um número finito de estados da natureza. Por se tratar de uma teoria cujo estudo ganhou maior relevância recentemente, há potenciais impactos para a literatura econômica, pois oferece explicações adicionais à respeito da regulação financeira em mercados incompletos, que pode tornar algumas operações de *hedge* economicamente inviáveis, e acessa a dinâmica de *hedge* em mercados de seguros.

Na seção 2, realiza-se a revisão da literatura de álgebra linear (subseção 2.1) e elementos de probabilidade (subseção 2.2). A motivação para o estudo do primeiro tópico é baseada no fato de que os mercados de ativos (considerados neste trabalho) podem ser representados por vetores de preços e quantidades e, a relação entre esses, perpassa pelos conceitos de transformação linear e espaço dual. Ainda, a partir de ativos primitivos, consegue-se formar diversos portfólios e outros ativos de mercado, o que leva ao estudo de conceitos como os de espaços vetoriais, subespaços vetoriais, bases e combinações lineares. A motivação do segundo tópico se dá em função da modelagem do mercado financeiro, em que se utiliza um modelo de dois períodos com preços futuros e diferentes cenários, envolvendo o cálculo de probabilidades e esperanças. Também na seção 2, apresenta-se o conceito de integral de Choquet (subseção 2.3), que é aplicado em um caso especial (e recente na literatura) do problema de *superhedging*.

Na seção 3, apresenta-se a metodologia para o cálculo dos preços de *superhedging* e, para isso, introduz-se o modelo de dois períodos, os diferentes ativos financeiros, seus preços de mercado e os possíveis cenários de estados da natureza (subseção 3.1). Estuda-se então o princípio de não arbitragem (subseção 3.2) e a medida neutra ao risco (subseção 3.3), essenciais ao desenvolvimento do modelo e que aparecem no teorema fundamental da precificação de ativos (subseção 3.4). Em seguida, discute-se a comparação de preços em diferentes períodos (subseção 3.5). Na subseção 3.6, desenvolve-se o conceito de portfólios replicáveis, ativos redundantes e calcula-se o retorno esperado desses portfólios. Já na subseção 3.7, introduz-se diferentes contratos derivativos, os quais podem ser utilizados para precificar seguros. Finalmente, apresenta-se o conceito de preço *superhedging* na medida em que se introduz um novo ativo no mercado (subseção 3.8) e, expõe-se um exemplo de *superhedging* para opções (subseção 3.9).

Na seção 4, aplica-se o ferramental estudado para diferentes situações de mercados incompletos. Inicialmente, discute-se um exemplo de precificação para o mercado de seguros de automóveis e, relaciona-o a um problema de decisão de um agente racional (subseção 4.1). Em seguida, detalha-se um caso em que o resultado do problema de *superhedging* gera uma carteira de ativos cuja composição não é trivial e, apresenta-se outra visão acerca do mesmo problema (subseção 4.2). Na subseção 4.3, discute-se dois exemplos de mercados incompletos, nos quais o regulador da economia deve decidir acerca da criação de um novo contrato. Na primeira situação discutida, considera-se que o regulador é indiferente quanto às opções apresentadas, enquanto na segunda, a decisão do regulador é obtida através da consideração de curvas de utilidade. Finalmente, na subseção 4.4, analisa-se a situação em que o mercado de planos de saúde é alvo de regulação e, discutem-se quais os possíveis impactos para os diferentes tipos de usuários.

Na seção 5, discute-se os principais resultados encontrados com o modelo de *superhedging* e se apresenta críticas ao trabalho, juntamente com sugestões para futuras expansões e aplicações do modelo desenvolvido.

2 Revisão da Literatura

Nesta seção, apresenta-se as noções matemáticas que irão embasar os conceitos financeiros envolvidos. Motiva-se o estudo desse arcabouço matemático, pois um mercado financeiro em tempo discreto e com um número finito de estados da natureza pode ser visto como um determinado subespaço vetorial em que o preço dos ativos é dado por um funcional linear. Ainda, o estudo de operações de *hedge* depende de conceitos como combinação linear e espaço gerado, e, o conceito de mercados completos é intimamente relacionado ao conjunto de medidas neutras ao risco.

2.1 Álgebra Linear

As definições e demonstrações desta subseção estão baseadas em Callioli *et al* (1989, p. 42–151).

2.1.1 Espaços Vetoriais e Subespaços Vetoriais

O conceito de espaço vetorial surge do estudo de dois conjuntos (vetores da geometria e o conjunto de matrizes reais de m linhas e n colunas, por exemplo) que aparentemente não apresentam relação entre si. Todavia, quando se analisa a estrutura desses conjuntos, percebe-se que há uma série de similaridades quanto à diversas operações importantes. Desta forma, a definição de espaço vetorial pretende capturar todos aqueles conjuntos que possuam essas operações, para que se possa estudá-los de maneira agregada. Estes conjuntos apresentam íntima relação com o mercado financeiro, pois um portfólio de ações, por exemplo, possui as propriedades de um espaço vetorial como será exemplificado a seguir.

Definição. Um conjunto V não nulo é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ se e, somente se, tem-se definido as seguintes propriedades:

1. Existe a adição de dois elementos de V (u e v, por exemplo) que gere um novo elemento em V (elemento u+v), com as seguintes propriedades:
    a. Propriedade Comutativa: $u + v = v + u, \forall u, v \in V$
    b. Propriedade Associativa: $u + (v + w) = (u + v) + w, \forall u, v, w \in V$
    c. Existe o elemento neutro: $\exists\ o \in V\ |u + o = u, \forall u \in V$
    d. Existe elemento oposto: $\forall v \in V, \exists(-v) \in V \mid v + (-v) = 0$

2. Está definida uma multiplicação de um elemento do conjunto de números reais (α, por exemplo) por um elemento do espaço vetorial (u, por exemplo), com as seguintes propriedades:
    a. $\propto (\beta u) = (\alpha\beta)u \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\, e\, u \in V$
    b. $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\, e\, u \in V$
    c. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v \mid \alpha \in \mathbb{R}\, e\, u, v \in V$
    d. $1 * u = u \mid u \in V$

Analogamente, percebe-se que um portfólio é composto por elementos, neste caso ações, e a compra de uma ação A e de uma ação B não é diferente da compra de uma ação B e de uma ação A (propriedade comutativa). Ainda, pode-se tanto comprar um ação, quanto vendê-la a descoberto (existência de elemento oposto). Aceita-se também que quando se dobra a quantidade de ações em um portfolio, dobra-se a quantidade de cada ação (propriedade 2.c). Torna-se claro a importância da definição de espaços vetoriais para se entender as relações válidas em um portfólio.

Define-se então que subespaços vetoriais são conjuntos contidos em espaços vetoriais com propriedades semelhantes às definidas acima.

Definição. Seja V um espaço vetorial sobre ℝ. Um sub-espaço vetorial de V é um subconjunto $W \subset V$, tal que se observe as seguintes propriedades:

1. Existe o elemento neutro, como definido anteriormente, no conjunto W, isto é, $0 \in W$;
2. $u + v \in W \mid \forall u, v \in W$;
3. $(\alpha u) \in W \mid \forall \alpha \in \mathbb{R}\, e\, \forall u \in W$.

A partir desta definição, pode-se demonstrar que se W é um subespaço vetorial de V, e V é um subespaço vetorial sobre ℝ, então W também é um subespaço de ℝ. De fato pode-se entender uma carteira de ações contidas no portfólio de um banco como um subespaço vetorial do portfólio.

2.1.2 Espaços Vetoriais Finitamente Gerados, Dependência Linear, Base e Dimensão

Diversos espaços podem ser gerados a partir de combinações lineares de certos elementos, levando à definição de combinação linear e de espaço gerado.

Definição. Considere V um espaço vetorial sobre ℝ e $S = \{u_1, \dots, u_n\}$ um subconjunto contido em V. Pode-se construir um outro conjunto, denotado por $[S]$, ainda contido em V a partir de S, de modo que $[S] = \{\propto_1 u_1 + \cdots + \propto_n u_n | \propto_1, \ldots, \propto_n \in \mathbb{R}\}$, e se prova que esse subconjunto é um sub-espaço vetorial de V. Dá-se o nome de combinação linear à operação feita para formar os elementos de [S] e o nome de sub-espaço gerado por S para $[S]$.

Definição. Um espaço vetorial V é finitamente gerado se extiste um subconjunto S finito contido em V, tal que $V = [S]$.

Percebe-se que uma carteira de investimentos é uma combinação linear de ativos com a quantidade comprada de cada um deles e, quando um ativo é formado através da combinação linear de diversos outros ativos, diz-se que esse ativo é replicável. E, para que uma carteira (ou ativo) seja única, ela deve ser linearmente independente, o que suscita a próxima definição:

Definição. Dado um espaço vetorial V e um conjunto de elementos desse espaço $L = \{u_1, \ldots, u_n\} \subset V$, diz-se que o conjunto L é linearmente independente se, e somente se, a igualdade $\propto_1 u_1 + \cdots + \propto_n u_n = 0$ com $\propto_i \in \mathbb{R}$ só for possível para $\propto_1 = \cdots = \propto_n = 0$. Diz-se que é linearmente dependente se tal igualdade é possível sem que $\propto_i$ seja nulo, para algum i.

Um conjunto único de ações (independência linear) forma uma base de uma carteira, pois a partir de uma combinação de compra e venda destas ações (combinação linear), gera-se tal carteira (espaço vetorial finitamente gerado). Nota-se que a definição acima sugere que um mercado é não redundante, quando não existem ativos replicáveis, isto é, o portfólio de ações é linearmente independente.

Matematicamente define-se que a base de um espaço vetorial finitamente gerado é um subconjunto linearmente independente que é capaz de gerar esse espaço através de combinações lineares.

Definição. Uma base de um espaço vetorial V é um subconjunto finito B contido em V que verifica as seguintes propriedades:

1. $[B] = V$;
2. B é $linearmente\ independente$.

A definição de dimensão está relacionada a idéia de que um espaço gerado pode ser formado por diferentes bases, mas o tamanho dessas é o mesmo. Para formular a definição, deve-se antes expor o teorema da invariância, cuja demonstração é apresentada em Callioli *et al* (1989, p. 99-101).

Teorema da Invariância. Duas bases quaisquer de um espaço vetorial V finitamente gerado contém o mesmo número de vetores.

Definição. Define-se como dimensão de V o número de vetores de qualquer uma de suas bases.

Esta definição nos garante que um portfólio pode ser construído a partir de um conjunto de ativos primitivos (base) e, dessa forma, a dimensão de uma carteira define a quantidade de diferentes ativos que foram utilizados para formá-la, isto é, quanto maior for a dimensão de um portfólio, maior será a quantidade de ativos primitivos utilizados.

2.1.3 Transformações Lineares e Produto Interno

Analogamente aos espaços vetoriais, as transformações lineares são aplicações (entende-se por funções) de um espaço vetorial em outro que conservam as propriedades de soma vetorial e de multiplicação por escalar.

Definição. Dados dois espaços vetoriais U e V sobre ℝ, uma aplicação $F: U \rightarrow V$ é considerada uma transformação linear de U em V se, e somente se, observam-se as seguintes propriedades:

1. $F(u_1 + u_2) = F(u_1) + F(u_2), \forall\, u_1, u_2 \in U$
2. $F(\alpha u) = \alpha F(u), \forall\, \alpha \in \mathbb{R}\; e\; u \in U$

Definição. Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, o produto interno é denotado por $< x, y >$ e é definido como $< x, y >= \sum_{i=0}^{n} x_i y_i$.

A noção de produto interno suscita um importante exemplo de transformação linear de $\mathbb{R}^n$ em ℝ, pois dado $y \in \mathbb{R}^n$, a aplicação $\begin{aligned} \varphi_y &: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto < x, y > \end{aligned}$ é uma transformação linear. Esse conceito é utilizado para o cálculo do preço de um portfólio, pois envolve o produto interno de um vetor de quantidades e de um vetor de preços, que deve gerar um preço único para o portfólio. Utiliza-se nesse trabalho a notação x$\cdot\, y$ para representar a operação de produto interno $< x, y >.\; x \longmapsto < x, y >$

2.1.4 Espaço Dual

A definição de espaço dual perpassa pelos conceitos apresentados anteriormente, unindo-os em um conjunto de combinações lineares de espaços vetoriais.

Definição. Dado um espaço vetorial U sobre ℝ, podemos afirmar que a coleção de transformações lineares de U em ℝ também é um espaço vetorial sobre ℝ. Dessa forma, denota-se todas as combinações lineares de U em ℝ por $L(U, \mathbb{R})$ e, define-se esse conjunto como espaço vetorial dual de U. Ainda, dá-se o nome de forma linear sobre ℝ ou funcional linear sobre ℝ para cada elemento do espaço vetorial dual de U.

Encontra-se um resultado importante a partir desta definição. Dado um funcional linear $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, existe $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $F(x) =< x, y >, \forall x \in \mathbb{R}^n$. Ou seja, toda transformação linear é representada por um produto interno.

2.1.5 Cotas Inferiores e Superiores, Supremos e Ínfimos

Um conjunto $S \subset \mathbb{R}$ é limitado superiormente quando existe algum $\pi_{Superior} \in \mathbb{R}$ tal que $s^i \leq \pi_{Superior}, \forall s^i \in S$. Neste caso, diz-se que $\pi_{Superior}$ é uma cota superior de S. Um conjunto $S \subset \mathbb{R}$ é limitado inferiormente quando existe algum $\pi_{Inferior} \in \mathbb{R}$ tal que $s^i \geq \pi_{Inferior}, \forall s^i \in S$. Diz-se que $\pi_{Inferior}$ é uma conta inferior de S. Se S é limitado superior e inferiormente, diz-se que S é um conjunto limitado, isto é, $\exists k > 0: s^i \in S \Longrightarrow |s^i| \leq k$.

Seja $S \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente e não-vazio. Um número $\pi_{Sup} \in \mathbb{R}$ é dito supremo do conjunto S quando é a menor das cotas superiores de S:

a. Para todo $s^i \in S$, tem-se $s^i \leq \pi_{Sup}, \pi_{Sup} \in \mathbb{R}$;

b. Se $\pi_{Superior} \in \mathbb{R}$ é tal que $s^i \leq \pi_{Superior}$ para todo $s^i \in S$, então $\pi_{Sup} \leq \pi_{Superior}$.

Escreve-se $\pi_{Sup} = \sup S$.

Seja $S \subset \mathbb{R}$ limitado inferiormente e não-vazio. Um número $\pi_{Inf} \in \mathbb{R}$ é dito ínfimo do conjunto S quando é a maior das cotas inferiores de S:

a. Para todo $s^i \in S$, tem-se $s^i \geq \pi_{Inf}, \pi_{Inf} \in \mathbb{R}$;

b. Se $\pi_{Inferior} \in \mathbb{R}$ é tal que $s^i \geq \pi_{Inferior}$ para todo $s^i \in S$, então $\pi_{Inf} \geq \pi_{Inferior}$.

Escreve-se $\pi_{Inf} = \inf S$.

Os conceitos acima definidos são importantes para o entendimento do cálculo das cotas livres de arbitragem para ativos financeiros, permitindo a identificação do preço de *superhedging* e do intervalo de preços livre de arbitragem.

2.2 Elementos de Probabilidade

Discute-se nesta subseção os fundamentos estocásticos para a formulação dos modelos de *superhedging* e para a exploração de certos conceitos financeiros sob a ótica probabilística, baseado em Fernandez (2009, pg. 25–30 e 87).

2.2.1 Medidas de Probabilidade

Discute-se primeiramente o que é um espaço amostral. Suponha um experimento aleatório qualquer, como o lançamento de uma moeda, diz-se que um conjunto Ω é o espaço amostral desse experimento se para cada resultado da experiência, se associa um valor neste conjunto, isto é, quando se obtém cara no lançamento da moeda, associa-se o valor 1, e quando se observa coroa, associa-se 0 (os valores 1 e 0 são o espaço amostral desse experimento). Define-se então como evento qualquer subconjunto de Ω, ou seja, o exemplo citado 1 é um evento, 0 é um outro evento, assim como 1 e 0. Ainda, chama-se de eventos elementares os eventos que possuam apenas um elemento. Deseja-se estudar a frequência com que os eventos ocorrem, mais especificamente a frequência relativa desses eventos, e, para isso, usa-se uma função que associa a cada evento uma probabilidade de ocorrência. A essa função se dá o nome de medida de probabilidade. Todavia, nem todo espaço amostral pode possuir probabilidade calculável para todos eventos e, dessa forma, necessita-se definir o conceito de sigma-álgebra.

Definição. Uma classe de eventos $\mathcal{F}$ em Ω é uma sigma-álgebra quando:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$;
2. Se $A \in \mathcal{F}$, então $A^C \in \mathcal{F}$;
3. Se $\{A_1, \dots\} \subset \mathcal{F}$, então $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Dá-se à dupla $(\Omega;\ \mathcal{F})$ o nome de espaço mensurável, pois se refere àqueles eventos em que é possível se atribuir uma medida de probabilidade, definida a seguir.

Definição. Para que uma função P seja uma medida de probabilidade em uma sigma-álgebra $\mathcal{F}(\Omega)$, deve-se osbervar as seguintes propriedades:

1. $P: \mathcal{F} \to [0; 1]$ e $P(\Omega) = 1$;
2. Se $\{A_1, \dots, A_i, \dots\} \subset \mathcal{F}$ de modo que $A_i \cap A_j\ , i \neq j$, então $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$. Esta propriedade recebe o nome de probabilidade sigma-aditiva.

Finalmente, denomina-se $(\Omega; \mathcal{F}; \mathrm{P})$ como o espaço de probabilidades. Essa definição é fundamental para o estudo de finanças, pois permite associar diferentes probabilidades de ocorrência aos eventos, isto é, permite acessar a expectativa dos agentes

2.2.2 Esperança Matemática

O valor esperado de uma variável aleatória é dado pela sua média, isto é, aquele valor que se espera observar quando se realiza o experimento. Apresenta-se a definição geral de esperança matemática.

Definição. Dada uma variável aleatória $X: \Omega \to \mathbb{R}$ que seja $\mathcal{F} - mensurável$ e limitada, define-se a esperança dessa variável com respeito a uma medida de probabilidade P como:

$$E(X) = \int XdP := \int_{-\infty}^{0} (P(\{w \in \Omega: \mathrm{X(w)} \geq \lambda\}) - 1)\mathrm{d}\lambda + \int_{0}^{+\infty} P(\{w \in \Omega: \mathrm{X(w)} \geq \lambda\})\mathrm{d}\lambda$$

Para o caso finito, tem-se:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} X(\omega_i)P(\omega_i)$$

2.3 Integral de Choquet

Baseado em Castro & Faro (2005), expõe-se o conceito de integral de Choquet. Esse conceito é uma expansão da integral usual, pois incorpora casos de funções discretas e, associado à teoria da probabilidade, utiliza a noção de capacidade.

Definição. Tomando-se um conjunto $\Omega = \{1, \dots, K\}$ e, considerando-se a família de subconjuntos $2^{\Omega} \in S$, define-se uma capacidade v como a aplicação $v: 2^{\Omega} \to [0;1]$ que cumpre as seguintes propriedades:

1. $v(0) = 0 \ e \ v(\Omega) = 1;$
2. $\forall\, E, F \in 2^{\Omega}: E \subset F \Longrightarrow v(E) \leq v(F).$

Note que, ao contrário do caso de probabilidades, uma capacidade não necessariamente respeita a propriedade aditiva, isto é, há casos em que $v(E+F) \neq v(E) + v(F)$. De fato, essa propriedade nos permite melhor estudar os problemas decorrentes de algumas falhas de mercado, tais como incompletude ou custos de transação. Por exemplo, alguns bens quando adquiridos conjuntamente podem custar mais que a soma do custo de cada um deles adquiridos separadamente.

Definição. Dada uma função a, e supondo sua imagem $Im(a) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$, de modo que $\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_N$, e, definindo-se $E_j = a^{-1}(\propto_i)$, escreve-se a integral de Choquet como:

$$I_v(a) = \sum_{i=1}^{N} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) * v\left(\bigcup_{j=1}^{i} (E_j)\right)$$

Note que quando v é uma medida de probabilidade, volta-se ao caso clássico de esperança matemática visto anteriormente.

Um caso especial de capacidade que aparecem no estado de mercados incompletos é dado por:

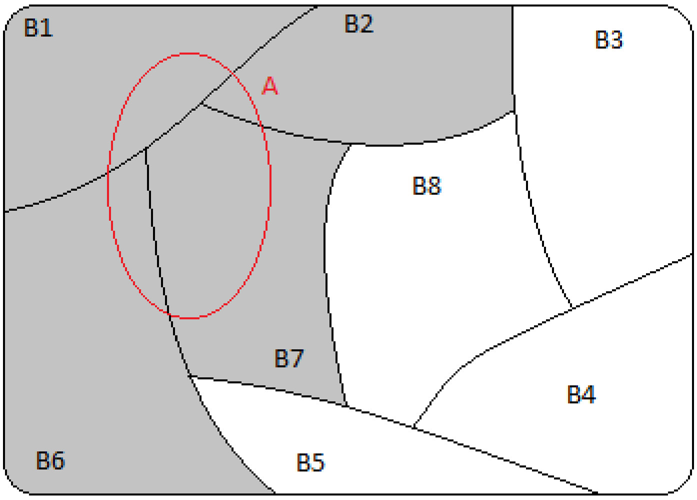
$$v: 2^{\Omega} \to [0,1]$$

Onde existe uma partição $\{B_k\}_{k=1}^{k}$ de Ω, isto é, $B_k \cap B_j = \emptyset, \forall k \neq j$ e $\bigcup_{k=1}^{k} B_k = \Omega$, e existe uma medida de probabilidade P tal que para qualquer evento $A \subseteq \Omega$:

$$v(A) = \sum_{k: B_k \cap A \neq \emptyset} P(B_k)$$

Pode-se exemplificar tal medida com a figura abaixo:

Figura 1: Exemplo com Partições



Fonte: Elaborado pelo autor

Onde se calcula $v(A) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_6) + P(B_7)$. No exemplo, quando se quer a proteção A contra as contingências B_1, B_2, B_6 e B_7 será necessário desembolsar a soma do preço de cada uma delas.

Neste caso,

$$I_v(a) = \sum_{k=1}^{k} \max_{w \in B_k} a(w) * P(B_k)$$

3 Metodologia

Apresentar-se-á nesta seção o modelo financeiro que permite o cálculo de preços de *superhedging* para ativos de mercado e os conceitos financeiros necessários para o seu entendimento. A exposição realizada a seguir é baseada em Föllmer & Schied (2004), e para uma abordagem incorporando vários períodos ou tempo contínuo, veja, por exemplo, Schachermayer (2003).

3.1 Modelagem de Cenários, Ativos Financeiros e Preço

Pode-se descrever e modelar ativos financeiros, preços e cenários com base nas definições apresentadas de álgebra linear e elementos de probabilidade. Suponha que o funcionamento de um mercado se dê em dois períodos (não há perdas de generalidade), o presente (tempo $t = 0$) – em que se conhece os preços de mercado, e o futuro (tempo $t = 1$) – cujos preços são aleatórios. Assume-se a existência de $d + 1$ ativos nesse mercado, isto é, a existência do ativo 0 - no caso, o ativo livre de risco - ao ativo d. Dessa forma, o conjunto $\bar{\pi} = \{\pi^0, \pi^1, \dots, \pi^d\} = \{\pi^0, \pi\} \in \mathbb{R}^{d+1}$ descreve os preços dos diversos ativos π^i no tempo $t = 0$. Já o conjunto de preços futuros estão associados a uma medida de incerteza, isto é, são descritos por um espaço de probabilidades $(\Omega; \Sigma; \mathrm{P})$, de modo que há uma função S que define os preços futuros dependendo de um cenário $\omega \in \Omega$, em que Ω é o conjunto de estados da natureza (existem finitos estados e cada estado $\omega \in \Omega$ possui uma probabilidade física $P(\omega)$ de ocorrência positiva). Tem-se que $S^i(\omega)$ é o preço ou *payoff* do ativo i quando o cenário ω ocorre, de forma genérica, $\bar{S} = \{S^0, S^1, \dots, S^d\} = \{S^0, S\} \in \mathbb{R}^{d+1}$ é o conjunto de preços dos ativos no tempo $t = 1$. Para o caso do ativo livre de risco, tem-se que $\pi^0 = 1$ (normalização), e $S^o = 1 + r,\ \forall \omega \in \Omega$, em que r representa a taxa de juros livre de risco da economia. Definidos os preços, um investidor deve escolher uma combinação de ativos para comprar, tal escolha é dada por $\bar{\xi} = \{\xi^0, \xi^1, \dots, \xi^d\} = \{\xi^0, \xi\} \in \mathbb{R}^{d+1}$, que representa a quantidade de cada ativo que é comprada ou vendida.

3.2 Princípio de Não Arbitragem

Conhecendo-se os custos e *payoff*s de um certo portfólio, diz-se que um mercado é livre de arbitragem quando não é possível gerar ganhos sem correr riscos e sem a necessidade de investimentos.

Definição. De maneira similar a Araujo *et al* (2011), um portfólio $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^{d+1}$ é dito uma oportunidade de arbitragem se, e somente se, $\bar{\pi} \cdot \bar{\xi} \leq 0$, $\bar{\xi} \cdot \bar{S} \geq 0$ com $P\left(\left\{\bar{\xi} \cdot \bar{S} \geq 0\right\}\right) = 1$ e $P\left(\left\{\bar{\xi} \cdot \bar{S} > 0\right\}\right) > 0$. Ainda, diz-se que não há arbitragem quando $\bar{\pi} \cdot \bar{\xi} = 0 \leftrightarrow \bar{\xi} \cdot \bar{S} = 0$ ou $\bar{\xi} \cdot \bar{S} > 0 \leftrightarrow \bar{\pi} \cdot \bar{\xi} > 0$.

O conceito de mercado livre de arbitragem é uma hipótese relevante na maioria dos modelos de finanças e, justifica-se seu uso através do argumento de que quando alguma oportunidade arbitragem surge, os agentes econômicos logo fazem uso dela, de modo que os preços se alteram e tal oportunidade desaparece.

3.3 Medida Neutra ao Risco

Apresenta-se abaixo conceito fundamental para o desenvolvimento do problema de *superhedging*.

Definição. Uma medida de probabilidade P^* é dita uma medida neutra ao risco se:

$$\pi^i = E_{P^*}\left(\frac{S^i}{1 + r}\right), i = 0,1, \dots, d$$

Essa definição elucida que, em um ambiente neutro ao risco e livre de arbitragem, o preço de um ativo é dado pelo valor esperado dos *payoff*s descontados com respeito a medida de probabilidade neutra ao risco. Desconsiderando-se momentaneamente a taxa de juros $(r = 0)$, temos:

$$E_{P^*}(S) = \sum_{w \in \Omega} S(w) P^*(w)$$

De fato, não existe apenas uma medida de probabilidade definida para o espaço de probabilidades $(\Omega; \mathcal{F}; \mathrm{P})$, já que além das diversas medidas neutras ao risco, existe a medida de probabilidade física ou real (não neutra ao risco) e, dessa forma, define-se Δ como sendo o conjunto de todas as medidas de probabilidade sobre $(\Omega; \mathcal{F})$. Define-se também o conjunto que reúne apenas as medidas neutras ao risco equivalentes à medida física:

Definição. Uma medida de probabilidade P^* definida sobre $(\Omega; \mathcal{F})$ é dita equivalente a uma medida de probabilidade P, também definida sobre o mesmo espaço mensurável, se, e somente se, concordam sobre os mesmos eventos, isto é, associam probabilidades nulas para os mesmos eventos e probabilidades positivas (possivelmente de diferentes magnitudes) para os outros eventos. Formalmente:

$$P^* \approx P \Leftrightarrow [\forall A \in \mathcal{F}, P^*(A) = 0 \Leftrightarrow P(A) = 0]$$

Como estamos supondo que $P(\omega) > 0, \forall \omega \in \Omega$, temos que:

$$P^* \approx P \Leftrightarrow P^*(\omega) > 0, \forall \omega \in \Omega$$

E escrevemos $P^* \gg 0$.

Com isso, deseja-se identificar aquelas medidas neutras ao risco que possuam uma medida não neutra ao risco equivalente, de modo que a escolha entre essas medidas não altere a solução do preço de *superhedging*.

Definição. Define-se o conjunto de medidas neutras ao risco equivalentes (também denotado por conjunto de medidas martingal equivalentes), como:

$$\mathcal{P} \coloneqq \{P^* \in \Delta : P^* \text{ é } uma\ medida\ neutra\ ao\ risco\ e\ P^* \approx P\}$$

3.4 Teorema Fundamental da Precificação de Ativos

O conjunto definido na subseção anterior apresenta fundamental relevância para o estudo dos mercados financeiros e se faz presente no teorema fundamental da precificação de ativos. Portanto, detalha-se a seguir alguns elementos relevantes para a melhor compreensão desse teorema.

Teorema Fundamental da Precificação de Ativos. Um mercado financeiro $M = \{(S^0, S^1, \dots, S^d); (1, \pi^1, \dots, \pi^d)\}$ é livre de arbitragem se, e somente se, $\mathcal{P} \neq \emptyset$.

Logo, para que não haja possibilidades de arbitragem em um mercado, deve haver pelo menos uma medida neutra ao risco, mas note que isso não exclui a possibilidade de existirem outras medidas neutras ao risco.

3.5 Mudança de Base ou Numerário

Ao se tratar de um mercado financeiro, ressalta-se que é comum realizar a conversão de preços para uma base comum, de modo que a comparação entre os preços hoje e os preços no futuro seja possível sem o viés de efeitos inflacionários, por exemplo. Para isso, define-se $\tilde{\pi} \coloneqq \frac{\pi^i}{\pi^1}$ e $\tilde{S} \coloneqq \frac{S^i}{S^1}$ e, pode-se demonstrar que se o mercado financeiro $M = \{S^i; \pi^i\}_{i=0}^d$ é livre de arbitragem, então o mercado financeiro $\widetilde{M} = \{\tilde{S}^i; \tilde{\pi}^i\}_{i=0}^d$ também é, independente da escolha do numerário.

3.6 Portfólios Replicáveis, Ativos Redundantes e Retorno

Considere $\mathrm{N} \coloneqq \{\bar{\xi} \cdot \bar{S}: \bar{\xi} \in \mathbb{R}^{d+1}\} = span\{S^0, S^1, \dots, S^d\}$, que representa o subespaço vetorial de todos os *payoff*s que podem ser gerados por algum portfólio. Denomina-se qualquer elemento $\nu \in \mathrm{N}$ de *payoff* replicável, pois representa uma combinação linear dos ativos base. Sabe-se também que quando não há oportunidades de arbitragem, o preço de um *payoff* replicável está bem definido, isto é, $\forall \nu \in \mathrm{N}, \pi(\nu) \coloneqq \bar{\pi} \cdot \bar{\xi}$ se $\nu = \bar{\xi} \cdot \bar{S}$. Nota-se que $\forall P^* \in \mathcal{P}$ e $\exists \bar{\xi} \in \mathbb{R}^{d+1}\ tal\ que\ \nu = \bar{\xi} \cdot \bar{S}$, temos:

$$\pi(\nu) = \pi(\bar{\xi} \cdot \bar{S}) = \sum_{i=0}^d \xi^i \pi(S^i) = \sum_{i=0}^d \xi^i E_{P^*}\left(\frac{S^i}{1+r}\right) = E_{P^*}\left(\frac{\sum_{i=0}^d \xi^i S^i}{1+r}\right) = E_{P^*}\left(\frac{\nu}{1+r}\right)$$

para qualquer $\nu \in \mathrm{N}$.

Observa-se que quando há ausência de arbitragem, a condição $\bar{\xi} \cdot \bar{S} = 0\ P.q.c.$ (significa que $P(\{\bar{\xi} \cdot \bar{S} = 0\}) = 1$) implica que $\bar{\pi} \cdot \bar{\xi} = 0$ é válida. Podemos assumir sem perda de generalidade que $\bar{\xi} \cdot \bar{S} = 0 \Longrightarrow \bar{\xi} = 0$, pois caso não fosse verdade existiria $\xi^i \neq 0$ para algum $i \in \{0,1, \dots, d\}$ e o ativo i poderia ser escrito como combinação linear dos demais ativos $\pi^i = \frac{1}{\xi^i} \sum_{j \neq i} \pi^j \xi^j$ e $S^i = \frac{1}{\xi^i} \sum_{j \neq i} S^j \xi^j$. Dessa forma, diria-se que $S^i = \frac{1}{\xi^i} \sum_{j \neq i} S^j \xi^j$ é um ativo redundante, já que ele pode ser formado pela combinação dos outros ativos no mercado. Define-se então quando um mercado financeiro é ou não redundante.

Definição. Um mercado financeiro $M = \{S^i; \pi^i\}_{i=0}^d$ é dito não-redundante se $\bar{\xi} \cdot \bar{S} = 0 \Longrightarrow \bar{\xi} = 0$. Ainda, a condição também é válida para o vetor de ganhos líquidos descontados, isto é, $\bar{\xi} \cdot \bar{Y} = 0 \Longrightarrow \bar{\xi} = 0$.

Percebe-se que a definição acima pode ser reescrita em termos de dependência linear, isto é, um mercado financeiro é não-redundante se o portfólio de ações é linearmente independente.

Pode-se definir também o retorno de um *payoff* replicável.

Definição. Considerando um mercado M livre de arbitragem e $\nu \in$ N um *payoff* replicável tal que $\pi(\nu) \neq 0$, define-se retorno de ν como $R(\nu) := \frac{\nu - \pi(\nu)}{\pi(\nu)}$. Observe que $R(\nu)$ é uma variável aleatória, pois $R(\nu): \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, e no caso do ativo livre de risco, $R(S^0)$ é uma função constante $R(S^0) = \frac{S^0(w) - \pi^0}{\pi^0} = r$.

Calcula-se então o retorno de um payoff replicável.

Proposição. Considerando um mercado M livre de arbitragem e $\nu \in$ N um *payoff* replicável tal que $\pi(\nu) \neq 0$.

a. Considerando qualquer medida neutra ao risco P^*, o valor sperado do retorno de ν é igual ao retorno do ativo livre e risco, isto é, $E_{P^*}\big(R(\nu)\big) = r$;

b. Considerando qualquer $P^* \approx P$ tal que $E_P\big(|S^i|\big) < \infty, \forall i$, então o retorno esperado de ν é dado por $E_P\big(R(\nu)\big) = r - Cov_{P^*}\left(\frac{dP^*}{dP}; R(\nu)\right)$.

De fato, por considerarmos agentes neutros ao risco, espera-se que não haja exigência de retornos extraordinários, isto é, a remuneração de um portfólio replicável é igual a taxa de juros livre de risco.

3.7 Contratos de Derivativos

Outro aspecto relevante dos mercados financeiros está relacionado aos derivativos. Derivativos são contratos que dependem do valor de outros ativos através de uma relação não linear. Tais contratos possuem um preço de exercício denominado por K, que corresponde ao preço do ativo contratado hoje para o futuro. Ainda, denomina-se o *payoff* de um derivativo como $C^i_{Derivativo}$. Apresenta-se abaixo diversos tipos de contratos derivativos.

Forward Contract. Neste tipo de contrato o agente concorda em vender um ativo no período $t = 1$ por um preço K determinado no período $t = 0$. O ganho para o vendedor do *forward contract* ocorre quando o preço de mercado do ativo no futuro S^i é menor que o preço de exercício K, pois dessa forma estaria vendendo por um valor acima do de mercado. Similarmente, o comprador desse contrato ganha quando o preço do ativo no futuro é maior que o preço de exercício contratado. Formalmente, um *forward contract* sobre S^i é dado por $C^i_{FC}: \begin{matrix} \Omega \to \mathbb{R} \\ \mathrm{w} \mapsto C^i_{FC}(w) \coloneqq S^i - K \end{matrix}$, para o comprador do contrato.

Call Option. Uma opção de compra dá o direito, mas não a obrigação, de comprar o ativo i no período $t = 1$ por um preço fixado K. Formalmente, uma *call option* sobre S^i é dada por $C^i_{Call}: \begin{matrix} \Omega \to \mathbb{R} \\ \mathrm{w} \mapsto C^i_{Call}(w) \end{matrix}$, em que $C^i_{Call}(w) \coloneqq \text{máx}\{0; S^i(w) - K\} = \left(S^i(w) - K\right)^+$.

Put Option. Uma opção de venda dá o direito, mas não a obrigação de vender o ativo i no período $t = 1$ por um preço fixado K. Formalmente, uma *put option* sobre S^i é dada por $C^i_{Put}: \begin{matrix} \Omega \to \mathbb{R} \\ w \mapsto C^i_{Put}(w) \end{matrix}$, em que $C^i_{Put}(w) \coloneqq \text{máx}\{0; K - S^i\} = \left(K - S^i(w)\right)^+$

Put-Call Parity. A combinação da compra de uma *call option* e da venda de uma *put option* para o mesmo preço de exercício K geram o *payoff* de um *forward contract*, pois acima do preço contratado para $t = 1$, recebe-se $S^i(w) - K$ e, abaixo do preço contratado para $t = 1$, recebe-se $-\left(S^i(w) - K\right)$. Logo, tem-se:

$$C^i_{Call} - C^i_{Put} = S^i(w) - K$$

Dessa forma, se o preço de uma *call option* $\pi\left(C^i_{Call}\right)$ é dado no mercado, encontra-se o preço da *put option* correspondente $\pi\left(C^i_{Put}\right)$. Ainda, extende-se tal relação a:

$$\pi\left(C^i_{Call}\right) - \pi\left(C^i_{Put}\right) = \pi^i - \frac{K}{1 + r}$$

Os contratos derivativos não necessariamente se concentram apenas em ativos específicos, mas também podem abrigar portfólios ou índices de ativos. Uma opção sobre o valor $\nu = \bar{\xi} \cdot \bar{S}$ de um portfólio é denominada *basket* ou *index option*.

Basket Call. Uma *basket call* apresenta a mesma relação que uma *call option*, porém se refere a um portfólio, ao invés de apenas um ativo. Formalmente, $\nu \in \mathrm{N}, C^\nu_{Call} \coloneqq (\nu - K)^+$.

Straddle: Uma *straddle* é uma combinação de compras de opção de compra e opção de venda para o mesmo preço de exercício K, que deve ser igual ao preço em $t = 0$ do ativo objeto (ou do portfólio objeto), isto é, uma combinação de opções de compra e venda *at the money*. Formalmente $C^\nu_{Straddle}: \begin{matrix} \Omega \to \mathbb{R} \\ \mathrm{w} \mapsto C^\nu_{Straddle}(w) \end{matrix}$, isto é:

$$C^\nu_{Straddle} \coloneqq (\nu - K)^+ + (K - \nu)^+ = |\nu - K|$$

Como as opções são *at the money*:

$$C^\nu_{Straddle} \coloneqq [\nu(w) - \pi(w)]^+ + [\pi(w) - \nu(w)]^+ = |\nu(w) - \pi(w)|$$

Percebe-se que o *payoff* de uma *straddle* aumenta na medida em que o preço do portfólio se desvia do seu preço atual, não importando a direção da mudança.

Butterfly Spread. Uma *butterfly spread* é um derivativo cujo valor aumenta na medida em que o preço do portfólio em $t = 1$ se aproxima do seu valor presente, isto é, aposta-se que o preço do portfólio não se alterará. Formalmente, $C_{BS}^{\nu}\colon \begin{array}{c}\Omega \to \mathbb{R} \\ \mathrm{w} \mapsto C_{BS}^{\nu}(w)\end{array}$, em que $C_{BS}^{\nu} \coloneqq (K - |\nu(w) - \pi(w)|)^{+}$.

Certificado de Desconto. Um certificado de desconto sobre certo portfólio pode ser definido como $C_{CD}^{\nu}\colon \begin{array}{c}\Omega \to \mathbb{R} \\ \mathrm{w} \mapsto C_{CD}^{\nu}(w)\end{array}$, em que $C_{CD}^{\nu} \coloneqq \min\{\nu(w); K\} = \nu - (\nu - K)^{+}$. De fato, esse derivativo pode ser chamado de certificado de desconto, pois se recebe o valor do portfólio descontado pela diferença com relação a uma taxa K. Ainda, esse derivativo equivale a compra de um portfólio e a venda de uma opção de compra do mesmo, estabelecendo uma lei de determinação de preços:

$$\pi(C_{CD}^{\nu}) = \pi(\nu) - \pi(C_{Call}^{\nu})$$

Percebe-se que os contratos de derivativos possuem alta flexibilidade e podem ser adaptados à diversas situações, criando desde contratos de renda fixa artificiais (através da compra e venda de duas opções de compra e duas opções venda) até contratos de seguro, como a opção de vender um carro batido à seguradora.

3.8 Introdução e Precificação de um Novo Ativo e Preço de *Superhedging*

Discute-se a seguir as implicações da introdução de um novo ativo no mercado, como se calcula o seu preço no momento de entrada e os teoremas relacionados. Para isso, introduz-se o conceito de *contingent claim*, que é um derivativo com negociação no período $t = 0$, que paga um valor no período $t = 1$ em função do estado da natureza e, por suposição, foca-se apenas nos contratos que geram *payoff*s não negativos.

Definição. Uma *contingent claim* é uma variável aleatória em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, em que $0 \leq C < \infty \; P.q.c.$. Também dizemos que uma *contingent claim* é um derivativo de ativos primitivos $S^0, \dots, S^d$ se C for mensurável com respeito a $\mathcal{F}(S^0, \dots, S^d)$, equivalentemente, se $\exists f\colon \mathbb{R}^{d+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ mensurável tal que $C = f(S^0, \dots, S^d)$. Identifica-se $\pi^{d+1} \coloneqq \pi^C$ e $S^{d+1} \coloneqq S^C$.

Com a introdução de um novo ativo no mercado, faz-se necessário calcular o seu preço para que não haja arbitragem.

Definição. Um número π^C é dito um preço livre de arbitragem para C se o mercado estendido $M' = \{(S^0, \dots, S^d, S^{d+1}); (\pi^0, \dots, \pi^d, \pi^{d+1})\}$ é livre de arbitragem.

Utiliza-se a notação $\pi(C)$ para o conjunto de preços livre de arbitragem para C e, supõe-se que a introdução de um novo ativo não altera o preço dos ativos já existentes. Essa hipótese é razoável quando o volume de troca do novo ativo é pequeno, todavia em geral essa suposição não é válida. Caracteriza-se então os preços livre de arbitragem para C.

Teorema. Suponha que o conjunto $\mathcal{P}$ de medidas neutras ao risco equivalentes do mercado original seja não-vazio, ou seja, não há arbitragem no mercado original. Então, o conjunto de preços livres de arbitragem para uma contingent-claim C é não vazio e é dado por:

$$\pi(C) = \left\{E_{P^*}\left(\frac{C}{1+r}\right) : P^* \in \mathcal{P}\right\}$$

Discute-se então uma caracterização dual para cotas inferiores e superiores de $\pi(C)$ e utiliza-se a seguinte notação:

$$\pi_{inf}(C) \coloneqq \inf[\pi(C)] \;\; e \; \pi_{sup}(C) \coloneqq \sup[\pi(C)]$$

Teorema. Em um mercado livre de arbitragem M, as cotas de arbitragem para uma *contingent claim* C são dadas por:

$$\pi_{inf}(C) = \inf_{P^* \in \mathcal{P}} E_{P^*}\left(\frac{C}{1+r}\right) = \max\left\{m \geq 0 : \exists \xi \in \mathbb{R}^d \; com \; m + \bar{\xi} \cdot Y \leq \frac{C}{1+r} \; P - q.c.\right\}$$

$$\pi_{sup}(C) = \sup_{P^* \in \mathcal{P}} E_{P^*}\left(\frac{C}{1+r}\right) = \min\left\{m \geq 0 : \exists \xi \in \mathbb{R}^d \; com \; m + \bar{\xi} \cdot Y \geq \frac{C}{1+r} \; P - q.c.\right\}$$

O resultado do teorema acima mostra que $\pi_{Sup}(C)$ é o menor preço possível para um portfólio $\bar{\xi} \cdot \bar{S} \geq C \; P.q.c.$. Esse portfólio é chamado de estratégia de *superhedging* de C e as identididades obtidas no teorema são chamadas de *superhedging duality relation*.

Tendo identificado o que é o preço de *superhedging*, faz-se necessário entender quando tal fenômeno ocorre, isto é, quando de fato há um intervalo de preços livre de arbitragem. Define-se inicialmente quando uma *contingent claim* é replicável

Definição. C é replicável se $C = \bar{\xi} \cdot \bar{S} \; P.q.c.$ para algum $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^{d+1}$. Esse portfólio $\bar{\xi}$ é chamado portfólio que replica C.

Essa definição gera o seguinte colorário:

Colorário. Suponha um mercado livre de arbitragem e C uma contingent claim.

a. C é replicável se, e somente se, C admite um único preço de não arbitragem;

b. Se C não é replicável, então $\pi_{Inf}(C) < \pi_{Sup}(C)$ e $\pi(C) = \left(\pi_{Inf}(C); \pi_{Sup}(C)\right)$.

Logo, observa-se que existirá preço de *superhedging* e, consequentemente, intervalo de preços livre de arbitragem, quando a *contingent claim* não for replicável, o que elucida a próxima definição.

Definição. Um mercado livre de arbitragem é dito completo se toda *contingent claim* é replicável.

Desse modo, tem-se um mercado incompleto quando existe pelo menos uma *contingent claim* não replicável. Relaciona-se esse conceito ao conjunto de medidas neutras ao risco.

Teorema. Um modelo livre de arbitragem é completo se, e somente se, existe uma única medida neutra ao risco, ou seja, $\#\mathcal{P} = 1$.

Quando existe mais de uma medida neutra ao risco, temos que o mercado não somente é livre de arbitragem, como também é incompleto. Por ser incompleto, temos que alguma *contingent claim* não é replicável e, dessa forma, existe um intervalo de preços livre de arbitragem para esse ativo, em que $\pi_{Sup}(C)$ representa o seu preço de *superhedging*. Na próxima subseção, aplica-se o ferramental de *supehdgin*g para um caso com opções.

3.9 *Superhedging* para Opções

Aplica-se nesta seção os conceitos anteriormente estudados, encontrando o intervalo de preços livre de arbitragem para opções de compra e opções de venda. Considere um mercado livre de arbitragem M com $C^i_{Call} \coloneqq \left(S^i - K\right)^+$. Como $C^i_{Call} \leq S^i$, temos que $\forall P^* \in \mathcal{P} \quad E_{P^*}\left(\frac{C^i_{Call}}{1+r}\right) \leq E_{P^*}\left(\frac{S^i}{1+r}\right) = \pi^i$. Note que $x \mapsto x^+ = \begin{cases} x, x > 0 \\ 0, x \leq 0 \end{cases}$ é uma função convexa, ou seja, o *payoff* de uma *call option* também é uma função convexa. Assim, pela desigualdade de Jensen para funções convexas, como apresentada em Jensen (1906), obtemos que $\pi^i \geq E_{P^*}\left(\frac{C^i_{Call}}{1+r}\right) = E_{P^*}\left(\frac{\left(S^i-K\right)^+}{1+r}\right) \geq \left[E_{P^*}\left(\frac{S^i-K}{1+r}\right)\right]^+ = \left[\pi^i - \frac{K}{1+r}\right]^+, \forall P^* \in \mathcal{P}$. Portanto, têm-se as seguintes cotas universais para um mercado livre de arbitragem:

$$\left[\pi^i - \frac{K}{1+r}\right]^+ \leq \pi_{Inf}(C) \leq \pi_{Sup}(C) \leq \pi^i$$

Tem-se o seguinte resultado para a *put option* equivalente:

$$\left[\frac{K}{1+r} - \pi^i\right]^+ \leq \pi_{Inf}(C) \leq \pi_{Sup}(C) \leq \frac{K}{1+r}$$

Nota-se que se a taxa de juros for não negativa ($r \geq 0$) teremos $\pi_{Inf}\left(C^i_{Call}\right) \geq \left(\pi^i - K\right)^+$, isto é, o valor de um direito de compra de um ativo i em $t = 0$ para o preço K é estritamente menor que qualquer preço livre de arbitragem para a C^i_{Call}. Logo, há um valor temporal para a *call option* e, chama-se $\left(\pi^i - K\right)^+$ de valor intrínseco de uma *call option*.

4 Aplicações do Ferramental de *Superhedging*

Apresentam-se nessa seção aplicações de *superhedging* para mercados de seguros de automóveis e de planos de saúde, discutindo a precificação de diferentes contratos e o problema de *hedge* para os consumidores. Também explora-se outros métodos de cálculo para o preço de estratégias de *superhedging* e, apresenta-se um exemplo em que a solução desse problema gera um resultado não trivial. Por fim, discute-se quais os impactos da regulação sobre mercados incompletos e como se dá o processo de decisão dessa regulação.

4.1 Aplicação de *Superhedging* para o Mercado de Seguros de Automóveis

Nesta subseção, analisa-se um mercado de seguros de automóveis com um número finito de contratos, sob a ótica da problemática de *superhedging*. Suponha que no momento $t = 0$ seja possível contratar quatro tipos de contrato de seguro de automóvel, o primeiro que garante a proteção contra batidas, o segundo que protege contra falhas mecânicas e incêndios, o terceiro que segura o proprietário contra roubo do automóvel e roubo de aparelhos eletrônicos utilizados dentro do veículo, e um quarto tipo que oferece a proteção contra todas as eventualidades citadas nos outros contratos. Dessa forma, define-se o conjunto Ω de estados da natureza como $\Omega = \left\{ \begin{matrix} \text{batidas; falhas mecânicas; incêndios;} \\ \text{roubo do automóvel; roubo de aparelhos eletrônicos} \end{matrix} \right\}$ e a sigma-álgebra $\mathcal{F}$ como todas as possíveis combinações de estados da natureza, desconsiderando repetições. Considere uma probabilidade P sobre $\mathcal{F}$.

O custo de cada contrato é dado por:

$$\pi = \{\pi^1, \pi^2, \pi^3, \pi^4\}$$

Como simplificação, supõe-se que a seguradora pague ao segurado o valor do automóvel (uma unidade monetária) quando haja a ocorrência de algum estado da natureza especificado no seguro, isto é, para o primeiro contrato se recebe o valor prometido na ocorrência de uma batida, porém, caso ocorram falhas mecânicas, incêndios ou roubos, não há prêmio a ser recebido. Como a mesma situação ocorre para os outros contratos, os *payoffs* são descritos como:

$$S^1 = \{1; 0; 0; 0; 0\}$$
$$S^2 = \{0; 1; 1; 0; 0\}$$
$$S^3 = \{0; 0; 0; 1; 1\}$$
$$S^4 = \{1; 1; 1; 1; 1\}$$

Verifica-se então se há oportunidades de arbitragem nesse mercado, isto é, calcula-se quantas medidas neutras ao risco existem nesse modelo. Para isso, recorde-se que uma medida de probabilidade P é dita neutra ao risco se:

$$\pi^i = E_P\left(\frac{S^i}{1+r}\right), i = 1,2,3,4$$

Tome $P = \{(\alpha;\beta;\gamma;\varepsilon;1-\alpha-\beta-\gamma-\varepsilon): \alpha,\beta,\gamma,\varepsilon \in (0,1)\}$ e suponha, sem perdas de generalidade, que $r = 0$. Então P deve satisfazer:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \varepsilon \\ 1-\alpha-\beta-\gamma-\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^1 \\ \pi^2 \\ \pi^3 \\ \pi^4 \end{pmatrix}$$

A operação matricial acima pode ser reescrita como:

$$\begin{cases} \alpha = \pi^1 \\ \beta + \gamma = \pi^2 \\ \varepsilon + 1 - \alpha - \beta - \gamma - \varepsilon = \pi^3 \\ \alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon + 1 - \alpha - \beta - \gamma - \varepsilon = \pi^4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = \pi^1 \\ \gamma = \pi^2 - \beta \\ 1 - \alpha - \beta - \gamma = \pi^3 \\ 1 = \pi^4 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow 1 - \pi^1 - \beta - \gamma + \beta + \gamma = \pi^3 + \pi^2$$

$$\Rightarrow \pi^4 = \pi^1 + \pi^2 + \pi^3 = 1$$

Como P é uma medida de probabilidade, $\{\alpha;\beta;\gamma;\varepsilon;1-\alpha-\beta-\gamma-\varepsilon\}$ também devem ser probabilidades. Logo:

$$\begin{cases} 0 \leq \alpha = \pi^1 \leq 1 \\ 0 \leq \gamma = \pi^2 - \beta \leq 1 \\ 0 \leq 1 - \alpha - \beta - \gamma - \varepsilon \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \beta \leq \pi^2 \\ 0 \leq 1 - \pi^1 - \beta - \pi^2 + \beta - \varepsilon \leq 1 \end{matrix} \Rightarrow \varepsilon \leq 1 - \pi^1 - \pi^2$$

Dessa forma, $\alpha \in (0;1), \beta \in (0;\pi^2), \varepsilon \in (0;1-\pi^1-\pi^2)$ e, supondo $\pi^1 = 0{,}2$, $\pi^2 = 0{,}4$, $\pi^3 = 0{,}4$ e $\pi^4 = 1$, percebe-se que existem diversas medidas neutras ao risco, já que, dados α e ε, temos $\beta \in (0;0{,}4)$, que é um intervalo que contém infinitos números. Assim, conclui-se que o mercado é livre de arbitragem, porém é incompleto, já que possui mais do que uma medida neutra ao risco e, caso um agente queira comprar um contrato que não possa ser replicado, como proteção apenas contra roubo de aparelhos eletrônicos, não será possível. Faz-se necessário então calcular o preço para as estratégias de *superhedging* nesse mercado. Exemplifica-se o cálculo para cada contrato que segura apenas contra um estado da natureza, começando pelo contrato contra roubos de aparelhos eletrônicos.

Já que o mercado é incompleto, temos que há um intervalo de preços livre de arbitragem para o contrato e, o preço de *superhedging* é dado por:

$$\pi_{sup}(roubo\ de\ aparelhos\ eletrônicos) = \pi_{sup}\big((0{,}0{,}0{,}0{,}1)\big)$$
$$= \sup_{P \in \mathcal{P}} E_P\big((roubo\ de\ aparelhos\ eletrônicos)\big)$$

Calculando a esperança com relação à medida neutra ao risco, encontra-se:

$$\pi_{sup}(roubo\ de\ aparelhos\ eletrônicos) = \sup_{P \in \mathcal{P}} (1 - \alpha - \beta - \gamma - \varepsilon) * 1$$
$$= \sup_{\beta \in (0;\pi^2),\, \varepsilon \in (0;\, 1 - \pi^1 - \pi^2)} (1 - \pi^1 - \beta - \pi^2 + \beta - \varepsilon)$$
$$= \sup_{\varepsilon \in (0;\, 0{,}4)} (0{,}4 - \varepsilon)$$

Deve-se encontrar a menor das cotas superiores de $(0{,}4 - \varepsilon)$, em que $\varepsilon \in (0; 0{,}4)$. Afirma-se que 0,4 é uma cota superior, pois $\forall \varepsilon \in (0; 0{,}4)$, tem-se que $0{,}4 \geq 0{,}4 - \varepsilon$. Falta provar que 0,4 é a menor das cotas superiores e, para isso, tome $k \in (0, \infty)$, então é válido afirmar que $0{,}4 - k < 0{,}4 - \varepsilon, \forall \varepsilon \in (0; 0{,}4) e\ \forall k \in (0, \infty)$. Portanto, 0,4 é a menor das cotas superiores. Tem-se que:

$$\pi_{sup}(roubo\ de\ aparelhos\ eletrônicos) = 0{,}4 = \pi^3$$

De fato, caso queira se proteger apenas contra o roubo de aparelhos eletrônicos, o resultado ótimo, dadas as restrições do mercado, seria comprar o terceiro contrato. Como essa compra também gera uma proteção adicional contra o roubo de automóveis, paga-se um prêmio com relação ao contrato que se teria em um mercado completo. Apesar do quarto contrato também oferecer essa proteção, o prêmio pelas proteções adicionais e não requisitadas é muito maior, já que protege contra todos os estados da natureza.

Calcula-se então o preço de *superhedging* para o contrato que protege contra o roubo do automóvel.

$$\pi_{sup}(roubo\ do\ automóvel) = \pi_{sup}\big((0{,}0{,}0{,}1{,}0)\big) = \sup_{P \in \mathcal{P}} \varepsilon = \sup_{\varepsilon \in (0;\, 1 - \pi^1 - \pi^2)} \varepsilon$$
$$= \sup_{\varepsilon \in (0;\, 0{,}4)} \varepsilon = 0{,}4 = \pi^3$$

O contrato mais barato que protege contra roubo de automóvel é o terceiro contrato, pois o prêmio pelas proteções adicionais é menor em relação ao quarto contrato.

Calcula-se então o preço de *superhedging* para o contrato que protege contra incêndio apenas.

$$\pi_{sup}(incêndio) = \pi_{sup}\big((0,0,1,0,0)\big) = \sup_{P \in \mathcal{P}} \gamma = \sup_{\beta \in (0;\pi^2)} \pi^2 - \beta$$
$$= \sup_{\beta \in (0;0{,}4)} 0{,}4 - \beta$$

Deve-se primeiro provar que 0,4 é uma cota superior de $0{,}4 - \beta, \beta \in (0; 0{,}4)$. De fato, é válido afirmar que $0{,}4 \geq 0{,}4 - \beta, \forall \beta \in (0; 0{,}4)$, logo 0,4 é uma cota superior. Prova-se então que 0,4 é a menor cota superior. Tomando $k \in (0, \infty)$, tem-se que $0{,}4 - k < 0{,}4 - \beta, \beta \in (0; 0{,}4)$ e, portanto, 0,4 é a menor cota superior. Logo:

$$\pi_{sup}(incêndio) = 0{,}4 = \pi^2$$

Assim, o segundo contrato é aquele que garante o *hedge* ao menor custo possível.

Calcula-se então o preço de *superhedging* para o contrato que protege contra falha mecânica apenas.

$$\pi_{sup}(falha\ mecânica) = \pi_{sup}\big((0,1,0,0,0)\big) = \sup_{P \in \mathcal{P}} \beta = \sup_{\beta \in (0;\pi^2)} \beta = \sup_{\beta \in (0;0{,}4)} \beta$$
$$= 0{,}4 = \pi^2$$

Conclui-se então que o segundo contrato é aquele que garante o *hedge* contra falhas mecânicas ao menor custo possível.

Calcula-se então o preço de *superhedging* para o contrato que protege contra batidas apenas. Porém, como esse contrato já existe no mercado, o seu preço é único e será igual ao preço de *superhedging*.

$$\pi_{sup}(batida) = \pi_{sup}\big((1,0,0,0,0)\big) = \sup_{P \in \mathcal{P}} \alpha = \sup_{P \in \mathcal{P}} \pi^1 = \pi^1 = 0{,}2$$

Com isso, verifica-se a afirmação da igualdade entre os preços.

Considere agora que neste mercado financeiro exista um agente econômico interessado em se proteger contra possíveis danos em seu veículo. Por se tratar de um agente racional, assume-se que seu problema é dado pela minimização do custo de proteção, sujeito a um nível mínimo de utilidade, como exposto abaixo.

$$\min \pi_{sup}(S)$$
$$s.a.: U(S) = S^i\big(w_j\big) \geq \bar{U}$$

Onde S representa o portfólio de contratos e Ū o nível de segurança mínimo exigido pelo indivíduo. Nota-se que a função objetivo não é diferenciável e, para simplificar a análise, restringir-se-á ao caso discreto.

Assume-se então que o nível de segurança mínimo do agente independe do cenário da natureza, isto é, um nível de segurança unitário pode ser satisfeito com qualquer contrato que segure o agente contra pelo menos um dos danos. Dessa forma, define-se $\bar{U} \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$, que implica na suposição de que o agente não queira se proteger contra "meio evento".

Observa-se que quando o agente econômico define um nível de segurança nulo ($\bar{U} = \{0\}$), aceita *ex ante* que sua utilidade no dia seguinte, por exemplo, possa ser muito reduzida. A solução para o problema do agente quando a utilidade mínima exigida é dada por $\bar{U} = \{1\}$ é alcançada escolhendo o contrato mais barato que gere uma proteção contra pelo menos um dos estados da natureza. Relembrando que $\pi^1 = 0{,}2$, $\pi^2 = 0{,}4$, $\pi^3 = 0{,}4$ e $\pi^4 = 1$, a otimização do problema é dada por $S = S^1$.

Para o caso em que $\bar{U} = \{2\}$, temos $S \in \{S^1; S^2\}$. Quando $\bar{U} = \{3\}$, a solução é dada por $S \in \{(S^1; S^2); (S^1; S^3)\}$. No caso em que $\bar{U} = \{4\}$, tem-se $S \in \{S^2; S^3\}$ e, quando $\bar{U} = \{5\}$, $S \in \{S^4\}$.

Percebe-se que muitas das estratégias acima podem ser replicadas através da combinação do último contrato com os outros. Por exemplo, quando o nível de utilidade mínimo é de quatro, uma solução equivalente (com um contrato também equivalente) é vender o primeiro contrato e comprar o quarto contrato.

Com este exemplo, nota-se que a aplicação do *superhedging* permite a solução de problemas de escolha da contratação de seguros.

4.2 *Superhedging* com resultados não triviais

Apresenta-se abaixo um modelo de mercado financeiro no qual o preço de *superhedging* é determinado como na subseção anterior, porém o portfólio que se usa para gerar o menor custo de *hedge* para um contrato não replicável não é determinado de forma imediata. Ao contrário do exemplo anterior, o contrato que gera o *superhedge* será determinado como uma combinação linear de todos os outros contratos, de modo a minimizar o custo da proteção.

Suponha um mercado financeiro em que se encontram disponíveis três contratos – contratos A, B e C. Defina o conjunto de estados da natureza como $\Omega \coloneqq \{w^1, w^2, w^3, w^4\}$ e a sigma-álgebra $\mathcal{F}$ como $\mathcal{F} = 2^\Omega$. Dessa forma, os *payoffs* de cada contrato são dados por $S^1 = \{S^1(w^1) = 1; S^1(w^2) = 1; S^1(w^3) = 1; S^1(w^4) = 1\} = \{1; 1; 1; 1\}$, $S^2 = \{S^2(w^1) = 1; S^2(w^2) = 1; S^2(w^3) = 1; S^2(w^4) = 0\} = \{1; 1; 1; 0\}$ e $S^3 = \{S^3(w^1) =$

$0; S^3(w^2) = 1; S^3(w^3) = 1; S^3(w^4) = 1\} = \{0; 1; 1; 1\}$. Define-se também o preço de cada contrato como $\pi^1 = 1$, $\pi^2 = \frac{3}{4}$ e $\pi^3 = \frac{3}{5}$.

Verifica-se então se esse mercado é livre de arbitragem e incompleto. Utilizando o espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, em que $P = \{\alpha, \beta, \gamma, 1 - \alpha - \beta - \gamma\}$, calcula-se quais são as medidas de probabilidade neutras ao risco. Logo, é válido afirmar que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ 1 - \alpha - \beta - \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/4 \\ 3/5 \end{pmatrix}$$

A operação matricial acima pode ser reescrita como:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + 1 - \alpha - \beta - \gamma = 1 \\ \alpha + \beta + \gamma = \frac{3}{4} \\ \beta + \gamma + 1 - \alpha - \beta - \gamma = \frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = \frac{3}{4} \\ 1 - \alpha = \frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = \frac{3}{4} \\ \alpha = \frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow \left\{ \beta + \gamma = \frac{7}{20} \right.$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{7}{20} - \beta$$

Como P é uma medida de probabilidade sobre o espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{F})$, a desigualdade abaixo deve ser válida:

$$0 \leq \gamma = \frac{7}{20} - \beta \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{7}{20} - \beta \Rightarrow \beta \leq \frac{7}{20}$$

O conjunto de medidas neutras ao risco é dado por $\mathcal{P} = \left\{ \alpha = \frac{2}{5}; \beta; \frac{7}{20} - \beta; 1 - \alpha - \beta - \left(\frac{7}{20} - \beta\right) \right\} : \beta \in \left(0; \frac{7}{20}\right) \Rightarrow \mathcal{P} = \left\{ \frac{2}{5}; \beta; \frac{7}{20} - \beta; \frac{1}{4} \right\} : \beta \in \left(0; \frac{7}{20}\right)$. Percebe-se que existem infinitas medidas neutras ao risco e, portanto, esse mercado financeiro é livre de arbitragem e incompleto. Deseja-se então calcular o preço de *superhedging* para um contrato D definido como $D \coloneqq \{0; 1; 0; 0\}$. Supondo (sem perdas de generalidade) $r = 0$:

$$\pi_{sup}(D) = \sup_{P \in \mathcal{P}} E_P(D) = \sup_{P \in \mathcal{P}} \beta = \sup_{\beta \in \left(0; \frac{7}{20}\right)} \beta = \frac{7}{20}$$

Observe que o preço de *superhedging* para o contrato D não é dado diretamente por nenhum outro contrato disponível no mercado. Logo, essa estratégia de proteção foi criada a partir de uma combinação linear dos ativos replicáveis do mercado. Para demonstrar qual é a escolha ótima dos ativos para formar a super-replicação, utiliza-se um problema de otimização.

Defina θ_A, θ_B e θ_C como sendo os pesos de cada ativo A,B e C no portfólio criado para super-replicar D. Devemos escolher θ_A, θ_B e θ_C de modo a minimizar o custo do ativo, porém sujeito às restrições do contrato $D = \{0; 1; 0; 0\}$. Logo, tem-se:

$$\min_{\theta_A, \theta_B, \theta_C} \left\{ 1 * \theta_A + \frac{3}{4}\theta_B + \frac{3}{5}\theta_C : (\theta_A + \theta_B; \theta_A + \theta_B + \theta_C; \theta_A + \theta_B + \theta_C; \theta_A + \theta_C) \right.$$
$$\left. \geq (0; 1; 0; 0) \right\}$$

O problema de minimização acima representa a compra de θ_A contratos do tipo A, θ_B contratos do tipo B e θ_C contratos do tipo C, ao menor custo possível. Porém, essa combinação deve gerar um contrato que satisfaça $D = \{0; 1; 0; 0\}$, isto é, o *payoff* da combinação do contrato A,B e C devem ser iguais ao *payoff* do contrato D. Como exemplo, tome o *payoff* de D quando o estado da natureza w^1 ocorre - $S^D(w^1) = 0$. A compra dos contratos A, B e C irá gerar um *payoff* de $1 * \theta_A + 1 * \theta_B + 0 * \theta_C$ quando w^1 ocorre, pois $S^A(w^1) = S^B(w^1) = 1$ e $S^C(w^1) = 0$. Aplicando o mesmo raciocínio, encontra-se o problema exposto acima.

Pode-se reescrever tal minimização como:

$$\min_{\theta_A, \theta_B, \theta_C} \left\{ 1 * \theta_A + \frac{3}{4}\theta_B + \frac{3}{5}\theta_C : \begin{pmatrix} \theta_A + \theta_B \geq 0 \\ \theta_A + \theta_B + \theta_C \geq 1 \\ \theta_A + \theta_B + \theta_C \geq 0 \\ \theta_A + \theta_C \geq 0 \end{pmatrix} \right\}$$

A segunda equação das restrições torna a terceira equação desnecessária, já que $\theta_A + \theta_B + \theta_C \geq 1 \geq 0$. Subtraindo da segunda equação a primeira, temos $\theta_C \geq 1$. Subtraindo da segunda equação a quarta equação, temos $\theta_B \geq 1$. Subtraindo da segunda equação a primeira e a quarta, temos $-\theta_A \geq 1 \Rightarrow \theta_A \leq -1$.

Como se trata de um problema de minimização com relação a θ_A, θ_B e θ_C, temos de escolhê-los o mais próximo de zero possível e, dessa forma, temos $\theta_A = -1$, $\theta_B = 1$ e $\theta_C = 1$, os quais satisfazem as restrições. Com essas quantidades escolhidas, o preço do ativo D será de $-1 + \frac{3}{4} + \frac{3}{5} = \frac{7}{20}$ e a estratégia envolve a venda do contrato A e a compra do contrato B e do contrato C. Note que outro método de resolução do problema de minimização seria através da utilização das condições de Karush-Kuhn-Tucker, como demonstrado em Karush (1939) e Kuhn & Tucker (1951).

Conclui-se que o cálculo do *superhedging* permite a geração de estratégias não óbvias para o *superhedging* de contratos em mercados incompletos.

4.3 *Superhedging*, Regulação e Curvas de Utilidade

Os mercados incompletos estão relacionados à impossibilidade de replicação de alguns contratos de mercado, causando uma perda de utilidade para aqueles agentes obrigados a executar uma estratégia de *superhedging*, já que irão despender capital com a proteção de contingências "em princípio" desnecessárias. Baseado nessa discussão apresenta-se nas próximas duas subseções exemplos em que, dado um mercado incompleto, o órgão regulador tenta intervir nas atividades a fim de melhorar a utilidade dos consumidores. No primeiro exemplo, explora-se o caso em que, confrontado por duas opções de política, o regulador fica indiferente quanto à execução delas. Enquanto no segundo exemplo, essas opções geram resultados diferentes, tornando a análise dependente do problema de maximização da utilidade do regulador.

4.3.1 Regulação em um Ambiente de Indiferença

Considere um mercado financeiro em que se encontram disponíveis três contratos – contratos A, B e C. Defina o conjunto de estados da natureza como $\Omega \coloneqq \{w^1, w^2, w^3, w^4\}$ e a sigma-álgebra $\mathcal{F}$ como $\mathcal{F} = 2^\Omega$. Dessa forma, os *payoffs* de cada contrato são dados por $S^A = \{S^A(w^1) = k; S^A(w^2) = k; S^A(w^3) = k; S^A(w^4) = k\} = \{k; k; k; k\}$, $S^B = \{S^B(w^1) = 0; S^B(w^2) = k; S^B(w^3) = k; S^B(w^4) = k\} = \{0; k; k; k\}$ e $S^C = \{S^C(w^1) = k; S^C(w^2) = k; S^C(w^3) = k; S^C(w^4) = 0\} = \{k; k; k; 0\}$. Define-se também o preço de cada contrato como π^A, π^B e π^C.

Utilizando o espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, em que $P = \{\alpha, \beta, \gamma, 1 - \alpha - \beta - \gamma\}$, calcula-se quais são as medidas de probabilidade neutras ao risco. Tem-se a relação:

$$\begin{pmatrix} k & k & k & k \\ 0 & k & k & k \\ k & k & k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ 1 - \alpha - \beta - \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^A \\ \pi^B \\ \pi^C \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} k(\alpha + \beta + \gamma + 1 - \alpha - \beta - \gamma) = \pi^A \\ k(\beta + \gamma + 1 - \alpha - \beta - \gamma) = \pi^B \\ k(\alpha + \beta + \gamma) = \pi^C \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi^A = k \\ \alpha = \dfrac{k - \pi^B}{k} \\ \gamma = \dfrac{\pi^C - k + \pi^B - k\beta}{k} \end{cases}$$

Determina-se o conjunto de medidas neutras ao risco:

$$0 \leq \gamma \leq 1 \Rightarrow \beta \leq \frac{\pi^C - k + \pi^B}{k}$$

$$\mathcal{P} = \left\{ \left(\frac{k - \pi^B}{k}; \beta; \frac{\pi^C - k + \pi^B - k\beta}{k}; \frac{k - \pi^C}{k} \right) : \beta \in \left(0; \frac{\pi^C - k + \pi^B}{k} \right) \right\}$$

Logo, o mercado é incompleto e livre de arbitragem. Defina $e_j \coloneqq \{0, \ldots, 0, k, 0, \ldots, 0\}$, em que k está situado na $j - ésima$ coluna do vetor. Nota-se que e_j representa cada um dos ativos base que compõem esse mercado financeiro. Calcula-se então, o preço de *superhedging* para esses ativos:

$$\pi_{sup}(B_1) = \sup_{P \in \mathcal{P}} E_P(B_1) = \sup_{P \in \mathcal{P}} \mathrm{k} \left(\frac{k - \pi^B}{k} \right) = k - \pi^B$$

$$\pi_{sup}(B_2) = \sup_{P \in \mathcal{P}} E_P(B_2) = \sup_{P \in \mathcal{P}} \mathrm{k}\beta = \pi^C - k + \pi^B$$

$$\pi_{sup}(B_3) = \sup_{P \in \mathcal{P}} E_P(B_3) = \sup_{P \in \mathcal{P}} \mathrm{k} \left(\frac{\pi^C - k + \pi^B - k\beta}{k} \right) = \pi^C - k + \pi^B$$

$$\pi_{sup}(B_4) = \sup_{P \in \mathcal{P}} E_P(B_4) = \sup_{P \in \mathcal{P}} \mathrm{k} \left(\frac{k - \pi^C}{k} \right) = k - \pi^C$$

Suponha que exista um órgão regulador nesse mercado e que ele deva optar entre a criação de dois novos contratos a serem transacionados. Define-se um dos contratos como $D = \{0; k; 0; 0\}$ e o outro como $E = \{k; k; 0; 0\}$.

A análise a ser feita deve estar amparada na incompletude de mercado, ou seja, deve-se escolher aquele contrato que, quando implementado no mercado, faça com que os preços de *superhedging* dos ativos base sejam reduzidos na maior quantidade possível. Analisa-se apenas os ativos base, pois os preços de *superhedging* de quaisquer outros ativos são dados por um funcional linear do preço dos ativos base. Ainda, pode-se compreender essa decisão através da comparação dos preços de *superhedging* após a criação do novo ativo, com os preços de *superhedging* antes da criação.

Considere que o governo escolha o contrato D. Para criar esse contrato, deve-se antes escolher o preço ao qual ele será negociado e, como não se objetiva introduzir oportunidades de arbitragem no mercado, deve-se escolher algum preço dentro do intervalo de preços livre de arbitragem. Primeiramente, calcula-se esse intervalo:

$$\pi_{sup}(D) = \underset{P \in \mathcal{P}}{\sup} E_P(D) = \underset{P \in \mathcal{P}}{\sup} \mathrm{k}\beta = \pi^C - k + \pi^B$$

$$\pi_{inf}(D) = \underset{P \in \mathcal{P}}{\inf} E_P(D) = \underset{P \in \mathcal{P}}{\inf} \mathrm{k}\beta = 0$$

Observe que a direção da movimentação do preço de *superhedging* dos ativos base depende do preço escolhido para o novo contrato. Por simplicidade, utiliza-se a média entre os preços do intervalo, isto é, define-se $\pi^D \coloneqq \frac{\pi_{sup}(D)+\pi_{inf}(D)}{2} = \frac{\pi^C-k+\pi^B}{2}$. Calcula-se o novo conjunto de medidas neutras ao risco:

$$\begin{pmatrix} k & k & k & k \\ 0 & k & k & k \\ k & k & k & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ 1-\alpha-\beta-\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^A \\ \pi^B \\ \pi^C \\ \pi^D \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{k-\pi^B}{k} \\ \beta = \dfrac{\pi^C - k + \pi^B}{2k} \\ \gamma = \dfrac{\pi^C - k + \pi^B}{2k} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\mathcal{P} = \left\{ \left(\frac{k-\pi^B}{k}; \frac{\pi^C - k + \pi^B}{2k}; \frac{\pi^C - k + \pi^B}{2k}; \frac{k-\pi^C}{k} \right) \right\}$$

Perceba que a cardinalidade de $\mathcal{P}$ é unitária, isto é, há apenas uma medida neutra ao risco. Logo, ao inserir o contrato D no mercado ao preço livre de arbitragem, o governo tornou o mercado completo e os preços dos ativos base sofreram a maior redução possível, dado o preço do novo contrato. Por ter tornado o mercado completo, pode-se dizer que a criação desse contrato foi a escolha ótima realizada pelo governo, já que diminuiu ineficiências de mercado.

Caso o governo escolhesse criar o contrato E, teríamos resultado idêntico. Isso ocorre, pois sua criação tornaria possível a existência dos ativos base no mercado (também completaria o mercado), já que poderíamos criá-los através da combinação linear dos contratos A, B, C e D ou A, B, C e E.

4.3.2 Regulação com Diferentes Métodos de Escolha

Considere um mercado financeiro em que estão disponíveis dois contratos – contratos A e B. Defina o conjunto de estados da natureza como $\Omega \coloneqq \{w^1, w^2, w^3, w^4\}$ e a sigma-álgebra $\mathcal{F}$ como $\mathcal{F} = 2^\Omega$. Dessa forma, os *payoffs* de cada contrato são dados por $S^A = \{S^A(w^1) = 1; S^A(w^2) = 1; S^A(w^3) = 0; S^A(w^4) = 0\} = \{1;1;0;0\}$ e $S^B = \{S^B(w^1) = 0; S^B(w^2) = 0; S^B(w^3) = 0; S^B(w^4) = 0\} = \{0;0;1;1\}$. Define-se também o preço de cada contrato como π^A e π^B e utiliza-se o espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, em que $P = \{(p_1;p_2;p_3;p_4): p_1 + p_2 = \alpha, p_3 + p_4 = (1-\alpha), p_i > 0, \forall i \ e \ \sum_{i=1}^4 p_i = 1\}$.

Considere então a definição de partição, como exposta em Araujo *et al* (Preprint, 2010).

Definição. Considere o conjunto $\Omega = \{w^1, \ldots, w^n\}$. Chama-se de partição de Ω uma família de subconjuntos $\{B_j\}_{j=1}^{J}$ de Ω tal que $\bigcup_{j=1}^{J} B_j = \Omega$ e $\forall i, j, i \neq j, B_i \cap B_j = \emptyset$.

Quando um mercado é formado por uma partição, o conjunto de preços livres de arbitragem pode ser calculado através das relações apresentadas em Araujo *et al* (Preprint, 2010, Teorema 17):

$$\pi_{sup}(C) = \sum_{j=1}^{J} P(B^j) * \max_{w \in B^j} C(w), \forall C \in \mathbb{R}^n$$

$$\pi_{inf}(C) = \sum_{j=1}^{J} P(B^j) * \min_{w \in B^j} C(w), \forall C \in \mathbb{R}^n$$

O que captura exatamente o caso onde se obtém uma integral de Choquet. Nota-se que essas relações apresentam um método mais direto de cálculo, porém são equivalentes às apresentadas anteriormente.

Percebe-se que o mercado $M = \{A; B\}$ pode ser descrito por duas partições $B^1 = \{w^1, w^2\}$ e $B^2 = \{w^3, w^4\}$, pois a união desses contratos forma Ω, ao mesmo tempo em que a sua interseção é vazia, de modo que se torna possível o uso da relação acima apresentada para o cálculo do preço de *superhedging* para uma carteira $C = \{c^1; c^2; c^3; c^4\}$ em que $c^i = S(w^i)$. Tal relação é dada para este caso por:

$$\pi_{sup}(C) = P(\{w^1, w^2\}) * \max\{c^1; c^2\} + P(\{w^3, w^4\}) * \max\{c^3; c^4\}$$

$$\pi_{inf}(C) = P(\{w^1, w^2\}) * \min\{c^1; c^2\} + P(\{w^3, w^4\}) * \min\{c^3; c^4\}$$

Deseja-se calcular os preços de *superhedging* para os ativos de Arrow, que são definidos como $e_j \coloneqq \{0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0\}$ em que 1 se localiza na j-ésima coluna do vetor. Neste caso, os ativos de Arrow são dados por $e_1 = \{1; 0; 0; 0\}, e_2 = \{0; 1; 0; 0\}, e_3 = \{0; 0; k; 0\}$ e $e_4 = \{0; 0; 0; k\}$. Temos então:

$$\pi_{sup}(e_1) = (\alpha) * \max(1; 0) + (1 - \alpha) * \max(0; 0) = \alpha$$

$$\pi_{sup}(e_2) = (\alpha) * \max(0; 1) + (1 - \alpha) * \max(0; 0) = \alpha$$

$$\pi_{sup}(e_3) = (\alpha) * \max(0; 0) + (1 - \alpha) * \max(1; 0) = (1 - \alpha)$$

$$\pi_{sup}(e_4) = (\alpha) * \max(0; 0) + (1 - \alpha) * \max(0; 1) = (1 - \alpha)$$

$$\pi_{inf}(e_1) = (\alpha) * \min(1; 0) + (1 - \alpha) * \min(0; 0) = 0$$

$$\pi_{inf}(e_4) = (\alpha) * \min(0;0) + (1-\alpha) * \min(0;1) = 0$$

Considere então que exista um órgão regulador nesse mercado que irá intervir para criar um novo contrato a ser transacionado, com o objetivo de reduzir a incompletude de mercado. Todavia, esse governo deve optar entre dois contratos – D e E, os quais são definidos como $D = \{1;0;0;0\}$ e $E = \{0;0;0;1\}$. Utilizando a mesma estática comparativa aplicada na subseção anterior, calculamos os preços de *superhedging* dos ativos base.

Inicialmente, considere que o contrato D seja escolhido pelo governo, ou seja, o mercado agora é dado por $M' = \{A;B;D\}$. Como explicado anteriormente, define-se o preço do novo contrato através da média dos preços de intervalo de preços livre de arbitragem.

$$\pi^D = \frac{\pi_{sup}(D) + \pi_{inf}(D)}{2} = \frac{\alpha}{2}$$

Observe que a partição é alterada para $B^1 = \{w^1\}$, $B^2 = \{w^2\}$ e $B^3 = \{w^3, w^4\}$. Novamente calcula-se os preços de *superhedging* para os ativos base:

$$\pi_{sup}(e_1) = \left(\frac{\alpha}{2}\right) * 1 + \left(\frac{\alpha}{2}\right) * 0 + (1-\alpha) * \max(0;0) = \frac{\alpha}{2}$$

$$\pi_{sup}(e_2) = \left(\frac{\alpha}{2}\right) * 0 + \left(\frac{\alpha}{2}\right) * 1 + (1-\alpha) * \max(0;0) = \frac{\alpha}{2}$$

$$\pi_{sup}(e_3) = \left(\frac{\alpha}{2}\right) * 0 + \left(\frac{\alpha}{2}\right) * 0 + (1-\alpha) * \max(1;0) = (1-\alpha)$$

$$\pi_{sup}(e_4) = \left(\frac{\alpha}{2}\right) * 0 + \left(\frac{\alpha}{2}\right) * 0 + (1-\alpha) * \max(0;1) = (1-\alpha)$$

Considere que o contrato E tenha sido escolhido pelo governo, de modo que o mercado é dado por $M'' = \{A;B;E\}$. Definimos o seu preço livre de arbitragem como:

$$\pi^E = \frac{\pi_{sup}(E) + \pi_{inf}(E)}{2} = \frac{(1-\alpha)}{2}$$

Observe que a partição é alterada para $B^1 = \{w^1, w^2\}$, $B^2 = \{w^3\}$ e $B^3 = \{w^4\}$. Calcula-se os preços de *superhedging* para os ativos base:

$$\pi_{sup}(e_1) = (\alpha) * \max(1;0) + \frac{(1-\alpha)}{2} * 0 + \frac{(1-\alpha)}{2} * 0 = \alpha$$

$$\pi_{sup}(e_2) = (\alpha) * \max(0;1) + \frac{(1-\alpha)}{2} * 0 + \frac{(1-\alpha)}{2} * 0 = \alpha$$

$$\pi_{sup}(e_3) = (\alpha) * \max(0;0) + \frac{(1-\alpha)}{2} * 1 + \frac{(1-\alpha)}{2} * 0 = \frac{(1-\alpha)}{2}$$

$$\pi_{sup}(e_4) = (\alpha) * \max(0;0) + \frac{(1-\alpha)}{2} * 0 + \frac{(1-\alpha)}{2} * 1 = \frac{(1-\alpha)}{2}$$

Resumem-se os resultados encontrados na tabela abaixo:

Tabela 1: Resultados Resumidos

Preço de *Superhedging*	Mercado		
	Original	M'	M''
$\pi_{sup}(A_1)$	α	$\frac{\alpha}{2}$	α
$\pi_{sup}(A_2)$	α	$\frac{\alpha}{2}$	α
$\pi_{sup}(A_3)$	$(1-\alpha)$	$(1-\alpha)$	$\frac{(1-\alpha)}{2}$
$\pi_{sup}(A_4)$	$(1-\alpha)$	$(1-\alpha)$	$\frac{(1-\alpha)}{2}$
Cardinalidade de $\mathcal{P}$	Superior a 1	Superior a 1	Superior a 1

Fonte: Elaborado pelo autor

Percebe-se que mesmo após a criação de novos contratos, o mercado continua incompleto. Porém, o preço de *superhedging* de cada ativo base sofre uma redução após a criação de D ou E. Ao contrário do caso apresentado na subseção anterior, a decisão a ser tomada pelo governo não é trivial, já que nenhum dos contratos completa o mercado. Dessa forma, a resolução desse problema perpassa pela maximização da utilidade do órgão regulador.

Considera-se então distintos critérios de escolha para o regulador e explica-se o racional atribuído a cada um deles. Assume-se ainda, que o objetivo para o regulador é maximizar a utilidade para os consumidores, de modo que está sendo desconsiderada a utilidade das firmas no problema.

Considere que o governo seja utilitarista, isto é, todos os contratos são igualmente relevantes para a sua função objetivo. Dessa forma, a decisão ótima para o governo é aquela em que se reduza o preço de todos os contratos ao mínimo possível. A intuição econômica envolvida nesta análise é a de que não há uma classe social a ser mais beneficiada que outra, ou seja, as decisões do regulador não são influenciadas pela maioria votante, mas apenas pelo benefício total que a política gerará. Tal utilidade pode ser escrita como:

$$U_{Governo}(\pi_{sup}) = -\sum_{i=1}^{4} \pi_{sup}(e_i)$$

A solução do problema é dada pela maximização da utilidade do governo com relação aos preços de *superhedging* para os ativos de Arrow nos diferentes mercados:

$$U_{Governo,Mercado\ Original} = -\big(\alpha + \alpha + (1-\alpha) + (1-\alpha)\big) = -2$$

$$U_{Governo,Mercado\ M'} = -\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} + (1-\alpha) + (1-\alpha)\right) = \alpha - 2$$

$$U_{Governo,Mercado\ M''} = -\left(\alpha + \alpha + \frac{(1-\alpha)}{2} + \frac{(1-\alpha)}{2}\right) = -1 - \alpha$$

Assim, quando $\alpha > 0{,}5$, a melhor escolha para o governo é o contrato D. Porém, se $\alpha < 0{,}5$, o contrato E é o melhor a ser escolhido. Em ambos os casos, os mercados M' e M'' são melhores que o mercado original, já que são menos incompletos.

Considere agora que o mercado em análise envolva duas classes econômicas e que a utilidade do governo dependa apenas da utilidade daqueles na pior situação possível. Considere ainda que cada um dos ativos base represente um contrato de consumo para diferentes rendas, ou seja, o ativo base mais barato representa o que a classe com menor poder aquisitivo pode adquirir, enquanto o ativo base mais caro representa o que a classe com maior poder aquisitivo pode adquirir. Como o governo quer melhorar a situação dos mais pobres, diz-se que sua curva de utilidade é Walrasiana e, podemos escrevê-la como:

$$U_{Governo} = -\min\{\pi_{sup}(e_i)\}_{i=1}^{4}$$

Observa-se que a resolução do problema de maximização do governo é dada pelo contrato que gera a maior redução de preço para o ativo mais barato:

$$U_{Governo,Mercado\ Original} = \begin{cases} -\alpha, se\ \alpha < 0{,}5 \\ -(1-\alpha), se\ \alpha > 0{,}5 \end{cases}$$

$$U_{Governo,Mercado\ M'} = \begin{cases} -\frac{\alpha}{2}, se\ \alpha < 0{,}5 \\ -(1-\alpha), se\ \alpha > 0{,}5 \end{cases}$$

$$U_{Governo,Mercado\ M''} = \begin{cases} -\alpha, se\ \alpha < 0{,}5 \\ -\frac{(1-\alpha)}{2}, se\ \alpha > 0{,}5 \end{cases}$$

A maximização da utilidade do governo com respeito a M' e M'' aponta que, quando $\alpha < 0{,}5$, a decisão ótima é criar o contrato D, mas, quando $\alpha > 0{,}5$, a melhor decisão é a criação do contrato E.

Podemos pensar no caso em que o governo deseja dar preferência para aquele contrato com maior preço. No caso do setor de serviços de saúde, essa situação pode ser justificada para o caso de tratamento de doenças raras, já que o custo do seguro para esse tipo de evento é elevado. Dessa forma, o governo estaria dando suporte para a redução do preço de *superhedging* para esse tipo de seguro, reduzindo o custo de sobrevivência para aqueles com essas doenças. Podemos definir a função de utilidade do governo como:

$$U_{Governo} = -\max\{\pi_{sup}(e_i)\}_{i=1}^{4}$$

Observa-se então que a resolução do problema de maximização do governo é dada pelo contrato que gera a maior redução de preço para o ativo mais caro:

$$U_{Governo,Mercado\ Original} = \begin{cases} -\alpha, se\ \alpha > 0{,}5 \\ -(1-\alpha), se\ \alpha < 0{,}5 \end{cases}$$

$$U_{Governo,Mercado\ M'} = \begin{cases} -\dfrac{\alpha}{2}, se\ \alpha > 0{,}5 \\ -(1-\alpha), se\ \alpha < 0{,}5 \end{cases}$$

$$U_{Governo,Mercado\ M''} = \begin{cases} -\alpha, se\ \alpha > 0{,}5 \\ -\dfrac{(1-\alpha)}{2}, se\ \alpha < 0{,}5 \end{cases}$$

A maximização da utilidade do governo com respeito a M' e M'' aponta que, quando $\alpha > 0{,}5$, a decisão ótima é criar o contrato D, mas, quando $\alpha < 0{,}5$, a melhor decisão é a criação do contrato E.

Podemos ainda considerar uma curva de utilidade com pesos genéricos. Considere um vetor de ponderação para os preços dos contratos $\theta = \{\theta^1; \theta^2; \theta^3; \theta^4\}$ tal que $\sum_{i=1}^{4} \theta^i = 1$ e $\theta^i > 0$. Temos então que a utilidade do governo é dada por:

$$U_{Governo} = \theta^1 \pi_{sup}(e_1) + \theta^2 \pi_{sup}(e_2) + \theta^3 \pi_{sup}(e_3) + \theta^4 \pi_{sup}(e_4)$$

Teremos um resultado semelhante ao primeiro exemplo de curvas de utilidade apresentado quando $\theta^i = 1, i \in \{1; 2; 3; 4\}$. Essa definição de utilidade apresenta uma forma mais genérica, já que considera uma combinação linear dos preços de *superhedging* dos ativos base no seu cálculo.

4.4 Comentários a Respeito da Regulação em Mercados Incompletos

Nesta subseção, trata-se de outro meio de regulamentação em mercados incompletos, não mais através da criação de novos contratos, mas da modificação daqueles já existentes. Com base nos resultados do problema de *superhedging* apresentados nas subseções anteriores, comentam-se os impactos da regulação em mercados incompletos nesta subseção. Considere um mercado incompleto, como o mercado de planos de saúde. De fato, esse mercado pode ser assim classificado, pois nele existem inúmeros contratos não replicáveis, ou seja, não se consegue contratar um plano de saúde que cubra apenas a necessidade se realizar tratamentos muito específicos.

O mercado em análise será composto por dois planos de saúde, um plano A que garante a cobertura de serviços mínimos e um plano B' que contém serviços adicionais ao plano A. Definindo o conjunto de estados da natureza como $\Omega \coloneqq \{w^1, w^2, w^3, w^4\}$ e a sigma-álgebra $\mathcal{F}$ como $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$. Temos que os *payoffs* de cada plano são dados por $S^A =$

$\{S^A(w^1) = 1; S^A(w^2) = 1; S^A(w^3) = 0; S^A(w^4) = 0\} = \{1; 1; 0; 0\}$ e $S^{B'} = \{S^{B'}(w^1) = 0; S^{B'}(w^2) = 0; S^{B'}(w^3) = 0; S^{B'}(w^4) = 0\} = \{1; 1; 1; 1\}$. Observe que podemos substituir $S^{B'} = \{1; 1; 1; 1\}$ por um plano $S^B = \{0; 0; 1; 1\}$, pois $S^{B'}$ pode ser formado pela combinação linear de S^A e S^B. Define-se também o preço de cada contrato como π^A e π^B e utiliza-se o espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, em que $P = \{(p_1; p_2; p_3; p_4): p_1 + p_2 = \alpha, p_3 + p_4 = (1-\alpha), p_i > 0, \forall i\ e\ \sum_{i=1}^{4} p_i = 1\}$.

Percebemos que o mercado $M = \{A, B\}$ é composto por duas partições $B^1 = \{w^1, w^2\}$ e $B^2 = \{w^3, w^4\}$ e, portanto, podemos utilizar a relação de cálculo exposta anteriormente para encontrar os preços de *superhedging* de alguns contratos:

$$\pi_{sup}(A) = (\alpha) * \max(1; 1) + (1-\alpha) * \max(0; 0) = \alpha$$

$$\pi_{sup}(B) = (\alpha) * \max(0; 0) + (1-\alpha) * \max(1; 1) = (1-\alpha)$$

$$\pi_{sup}(\{1; 1; 1; 0\}) = (\alpha) * \max(1; 1) + (1-\alpha) * \max(1; 0) = \alpha + (1-\alpha) = 1$$

$$\pi_{inf}(\{1; 1; 1; 0\}) = (\alpha) * \min(1; 1) + (1-\alpha) * \min(1; 0) = \alpha$$

$$\pi_{sup}(\{0; 0; 0; 1\}) = (\alpha) * \max(0; 0) + (1-\alpha) * \max(0; 1) = (1-\alpha)$$

$$\pi_{inf}(\{0; 0; 0; 1\}) = (\alpha) * \min(0; 0) + (1-\alpha) * \min(0; 1) = 0$$

Considere agora que a Agência Nacional de Saúde Suplementar decida expandir o plano de saúde mínimo A, para que este possua uma maior quantidade de serviços, garantindo à população uma maior qualidade de vida. Suponha que o *payoff* do novo plano de saúde seja dado por $\bar{A} = \{1; 1; 1; 0\}$. Dessa forma, o plano de serviços adicionais B será alterado para $\bar{B} = \{0; 0; 0; 1\}$.

Observe que podemos particionar o mercado $M' = \{\bar{A}, \bar{B}\}$ em $B^1 = \{w^1, w^2, w^3\}$ e $B^2 = \{w^4\}$ e, utilizando a regra de preço $\pi^i = \frac{\pi_{sup}(i) + \pi_{inf}(i)}{2}$, temos $\pi^{\bar{A}} = \frac{1+\alpha}{2}$ e $\pi^{\bar{B}} = \frac{1-\alpha}{2}$. Calculamos então o preço de *superhedging* para os novos contratos e para os contratos $\bar{A}$ e $\bar{B}$:

$$\pi_{sup}(A) = \left(\frac{1+\alpha}{2}\right) * \max(1; 1; 0) + \left(\frac{1-\alpha}{2}\right) * 0 = \left(\frac{1+\alpha}{2}\right)$$

$$\pi_{sup}(B) = \left(\frac{1+\alpha}{2}\right) * \max(0; 0; 1) + \left(\frac{1-\alpha}{2}\right) * 1 = \left(\frac{1+\alpha}{2}\right) + \left(\frac{1-\alpha}{2}\right) = 1$$

Podemos concluir importantes fatos a respeito dos impactos da regulação sobre os preços dos diferentes planos de saúde. Primeiramente, percebemos que o preço do plano de saúde mínimo (plano A no mercado original e $\bar{A}$ no mercado alterado) sofreu aumento e, portanto, aqueles que conseguiam adquirir A anteriormente, podem não conseguir adquiri-lo na nova situação, ou seja, uma parcela da sociedade perdeu acesso aos planos de saúde. Ainda, aqueles que não precisavam ter acesso aos novos serviços, isto é, necessitavam apenas do plano A, terão de despender um maior capital para comprá-lo, já que A se tornou um contrato não replicável no mercado alterado.

Porém, é correto supor que a política foi criada, pois havia indivíduos que necessitavam da cobertura de alguns serviços adicionais, como $\{w^3\}$, mas não possuíam capital para adquirir ambos os planos. Assim, a política da ANS beneficia esses indivíduos reduzindo o preço do plano $\bar{A}$, já que no mercado original $\pi_{sup}(\{1;1;1;0\}) = 1$ e no mercado alterado $\pi_{sup}(\{1;1;1;0\}) = \frac{1+\alpha}{2} < 1$.

Outro efeito da política se manifesta no preço do contrato B, pois aqueles indivíduos que contratavam apenas esse plano gastavam uma quantia $(1-\alpha)$, mas após a expansão do plano A, B se torna não replicável e seu preço de *superhedging* passa a ser 1.

Evidenciam-se então os efeitos de tal política sobre os preços a serem pagos pelos planos de saúde. De fato, essa política só será favorável quando o governo considerar que o benefício para os indivíduos que utilizarão o contrato $\bar{A}$ superam todas as outras perdas de utilidade.

Para que essa análise possua maior validade, devemos considerar o caso em que o plano de saúde B não é reduzido para $\bar{B}$, ou seja, o mercado alterado é composto por $M' = \{\bar{A}, B\}$. Nota-se, porém, que neste mercado, o ativo $B' = \{1;1;1;1\}$, antes considerado redundante, não o é mais, e, dessa forma, deve-se incluí-lo na análise (o contrato está disponível no mercado). Observa-se também que o contrato A é replicável através da compra de B' e venda de B, implicando que $\pi_A = \alpha$ e $\pi_B = 1-\alpha$.

Se ambos os contrato $\bar{A}$ e B fossem comprados, gerar-se-ia uma proteção superior àquela gerada por B', assim, o custo de sua compra também deve ser superior ao custo de B'. De fato:

$$\pi_{\bar{A}} + \pi_B \geq \pi_{\bar{A}+B} = \pi_{\{1;1;2;1\}} \geq \pi_{\{1;1;1;1\}} = 1 = \pi_{B'}$$

Temos ainda a seguinte relação:

$$\pi_{\bar{A}} + \pi_B \geq 1 \Rightarrow \pi_{\bar{A}} + (1-\alpha) \geq 1 \Rightarrow \pi_{\bar{A}} \geq \alpha$$

Como $B' = \{1;1;1;1\}$ e $\pi_{B'} = 1$, é verdadeiro que:

$$\pi_{\bar{A}} \leq 1$$

Assim $1 \geq \pi_{\bar{A}} \geq \alpha$.

Caso o regulador, prevendo a saída de diversos agentes do plano de saúde básico, decida fixar o preço do novo plano igual ao preço do plano anterior à política, isto é, $\pi_{\bar{A}} = \alpha$, observaríamos dois principais efeitos. O primeiro é que, apesar de esta medida aumentar de maneira relevante os benefícios da política para os consumidores, a margem operacional para os provedores de planos de saúde também seriam fortemente reduzida, tornando discutível a aplicabilidade dessa regulação na prática, já que se comprometeria a sustentabilidade financeira das empresas e haveria forte pressão por parte de lobistas para reverter a decisão do regulador. Em segundo, se $\pi_{\bar{A}} = \alpha$, então é possível comprar o contrato $\bar{A}$ com a receita resultante da venda do contrato A, resultando em um contrato $\bar{A} - A = \{0; 0; 1; 0\}$ com um custo de operação nulo, ou seja, a expansão do plano de saúde mínimo com a manutenção dos preços irá gerar oportunidades de arbitragem, pressionando o governo a liberar o movimento de preços. Assim, conclui-se que se $\bar{A}$ é introduzido no mercado e não há oportunidades de arbitragem, então $\pi_{\bar{A}} > \alpha$.

É relevante ressaltar que essa análise é válida quando o contrato B' está disponível no mercado e, caso não esteja, faz-se necessário utilizar outro ferramental para analisar os movimentos no mercado. Ainda, deve-se supor que não haja nenhum custo de transação que impeça a execução de arbitragem com planos de saúde.

5 Conclusão

O estudo da problemática de *superhedging* permitiu a identificação de ineficiências de mercado decorrentes da existência de contratos não replicáveis. Nas situações de mercados incompletos analisadas, como o mercado de seguros de automóveis e o de planos de saúde, a ineficiência surgiu quando os agentes despendiam capital em contingências adicionais desnecessárias para criar uma proteção contra eventos específicos, os quais eram não replicáveis. De fato, na medida em que se reduz a quantidade de contratos que possam ser utilizados para a proteção contra estados da natureza desfavoráveis, aumenta-se a riqueza a ser despendida com a operação de *hedge* (a recíproca implica em redução dos custos, já que se teriam mais opções para *hedge*). Dessa forma, a incompletude de mercado gera ineficiências, pois impede a alocação dos contratos demandados para aqueles que os demandam, elevando também os custos de proteção quando comparados a uma situação de mercado completo.

As análises dos modelos que envolviam a intervenção por parte de um regulador, explicitaram os efeitos positivos e negativos dessas decisões. Na subseção 4.3, explorou-se o caso em que se criaria um novo contrato a ser transacionado, cujo efeito era de expansão dos ativos disponíveis no mercado. Essa intervenção então causava um aumento da completude de mercado, reduzindo as ineficiências provenientes da impossibilidade de replicação de alguns contratos. No primeiro desses exemplos, a introdução de qualquer um dos novos contratos tornava o mercado completo, reduzindo o preço de *superhedging* de todos os ativos base. Já no segundo exemplo, a escolha dos contratos perpassava pela maximização da utilidade do governo, todavia, o resultado final apresentou a mesma direção do anterior, isto é, a introdução de um contrato não replicável no mercado, reduz o preço dos ativos base e, portanto, reduz as ineficiências geradas por um mercado incompleto. Assim, a intervenção em mercados seria justificada pela análise de preços ao consumidor.

Na subseção 4.4, porém, tornou-se evidente os efeitos perversos da regulação em mercados incompletos. A análise do modelo demonstrou que a expansão da cobertura dos planos de saúde acarreta na perda de utilidade para diversos consumidores, os quais passam a ter que realizar super-replicações dos contratos que antes eram disponíveis em mercado. Mesmo que os benefícios para a parcela da população que ganha com a expansão do plano de saúde básico seja mais relevante para o órgão regulador, justificando a intervenção, há outros fatores a serem questionados. Como o modelo considera apenas o benefício para os consumidores, mas não para as firmas, ou mesmo para o governo (como ganhos com taxação), é de grande relevância questionar se a introdução desse novo contrato não seria impossível do ponto de vista operacional. Ou seja, indagar se o mercado era incompleto em função dos custos altos para tornar um plano de saúde expandido economicamente viável e, se a obrigatoriedade desse novo plano faria com que o número de prestadoras de serviço fosse reduzido.

Logo, a intervenção em mercados incompletos não possui um sentido claro quanto aos seus benefícios e malefícios, sendo necessária uma análise profunda da estrutura de mercado e do tipo de intervenção para que decisões desse tipo sejam recomendáveis.

Dessa forma, conclui-se que o uso do ferramental de *superhedging* possui relevância para a análise de situações de mercados incompletos, permitindo tanto a resolução de problemas não triviais de minimização de custos, quanto acessar diferentes dinâmicas de intervenções no mercado. Embora o modelo construído norteie os resultados esperados em situações de *superhedging*, é de fundamental importância a aplicação desse estudo para dados de mercado, o que permitiria verificar na prática, se diferentes mercados de seguros, por exemplo, são incompletos e, se um novo contrato fosse criado, qual seria o intervalo de preços livre de arbitragem. Além de um estudo estatístico, uma interessante expansão para o modelo seria aquela que considerasse custos de transação, permitindo a análise de outras ineficiências de mercado e políticas intervencionistas, como aumento de alíquotas de imposto e pioras no sistema judicial.

REFERÊNCIAS

ARAUJO, Aloisio; CHATEAUNEUF, Alain; FARO, José H. Pricing rules and Arrow Debreu ambiguous valuation. In: Autor do Livro. **Economic Theory**. Heidelberg: Springer Berlin, 2011, p.1-35. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/s00199-011-0660-4>. Acesso em: 17 ago 2011.

ARGESANU, George. **Risk analysis and hedging in incomplete markets**. 2004. Dissertação (Doutorado)- Universidade do Estado de Ohio, Columbus, Ohio, 2004. Disponível em: <http://etd.ohiolink.edu/view.cgi?acc_num=osu1079923360>. Acesso em: 01 abr 2011.

ARROW, Kenneth. **Le rôle des valeurs bousières pour la repartition la meillure des risques**. Paris: Centre National de la Recherche Scientifique, 1953.

CALLIOLI, Carlos A.; DOMINGUES, Hygino H.; COSTA, Roberto C. F. **Álgebra Linear e Aplicações**. 6ª edição. São Paulo: Atual, 1989.

CASTRO, Luciano I.; FARO, José H. **Introdução à Teoria da Escolha**. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

DUFFIE, Darrell. Intertemporal Asset Pricing Theory. In: DUFFIE, Darrell. **Handbook of The Economics of Finance**. Amsterdam: Elsevier North-Holland, v. 1, p. 642, 2003.

FERNANDEZ, Pedro J. **Introdução à Teoria das Probabilidades**. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – IMPA, 2009.

FÖLLMER, Hans; SCHIED, Alexander. **Stochastic finance**: an introduction in discrete time. 2 ed. Berlim: Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, 2004.

HENDERSON, Vicky; HOBSON, David. **Utility Indiference Pricing** – An Overview. Bath: University of Bath, 2004.

JENSEN, Johan L. W. V. **Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes**. Acta Mathematica, Volume 30, Número 1, 1906.

KARUSH, William. **Minima of Functions of Several Variables with Inequalities as Side Constraints**. 1939. Dissertação (Mestrado)-Departamento de Matemática, Universidade de Chicago, Chicago, Illinois, 1939.

KUHN, Harold W.; TUCKER, Albert W. **Nonlinear programming**. Proceedings of 2nd Berkeley Symposium. Berkeley: University of California Press. p. 481–492, 1951.

SCHACHERMAYER, Walter. **Introduction to the Mathematics of Financial Markets**. Heidelberg: Springer Verlag, 2003.