

**Insper Instituto de Ensino e Pesquisa  
Programa de Mestrado Profissional em Economia**

**André do Sacramento Barbosa**

**OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS COM RESTRIÇÃO DE VAR:  
ESTUDO PARA O MERCADO BRASILEIRO**

**SÃO PAULO  
2013**

André do Sacramento Barbosa

**OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS COM RESTRIÇÃO DE VAR:  
ESTUDO PARA O MERCADO BRASILEIRO**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Economia do Insper Instituto de Ensino e Pesquisa, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Economia.

Área de concentração: Finanças Aplicadas

Orientador: Prof. Dr. Michael Viriato Araujo – Insper  
Instituto de Ensino e Pesquisa

**SÃO PAULO  
2013**

Barbosa, André do Sacramento

Otimização de carteiras com restrição de VaR: estudo para o mercado brasileiro / André do Sacramento Barbosa; orientador: Michael Viriato Araujo; – São Paulo: Insper, 2013.

62 f.

Dissertação (Mestrado – Programa de Mestrado Profissional em Economia. Área de concentração: Finanças Aplicadas) – Insper Instituto de Ensino e Pesquisa.

1. Fronteira Eficiente 2. Otimização de carteiras 3. Value-at-Risk

# FOLHA DE APROVAÇÃO

André do Sacramento Barbosa

Otimização de carteiras com restrição de VaR: estudo para o mercado brasileiro

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Economia do Insper - Instituto de Ensino e Pesquisa, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Economia.  
Área de concentração: Finanças Aplicadas.

Aprovado em: Janeiro/2014

## Banca Examinadora

Prof. Dr. Michael Viriato Araujo

Instituição: Insper

Assinatura: \_\_\_\_\_

Prof. Dr. Marcelo Leite Moura

Instituição: Insper

Assinatura: \_\_\_\_\_

Prof. Dr. Oswaldo Luiz do Valle Costa

Instituição: Escola Politécnica - USP

Assinatura: \_\_\_\_\_

**À minha esposa Lisangela  
e aos meus pais, Carlos e Inez.**

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a minha esposa Lisangela, cujo companheirismo, dedicação, paciência e disciplina foram fundamentais para que pudéssemos realizar essa jornada.

Aos meus pais, Carlos e Inez, por estarem sempre presentes e por serem exemplos de disciplina e determinação.

Ao meu orientador Prof. Dr. Michael Viriato Araujo pela atenção durante o desenvolvimento do trabalho.

Aos meus colegas e professores do mestrado, por todo conhecimento transmitido ao longo do curso. Um agradecimento especial para o Prof. Me. André Ng pelos conselhos e colaboração durante o desenvolvimento do trabalho.

## RESUMO

BARBOSA, André do Sacramento. **Otimização de carteiras com restrição de VaR: estudo para o mercado brasileiro**, São Paulo: Insper, 2013. 62 f. Dissertação (Mestrado) – Insper Instituto de Ensino e Pesquisa, São Paulo, 2013.

Este estudo tem como objetivo avaliar carteiras formadas por ativos de risco do mercado Brasileiro (ações e renda fixa) através do modelo de otimização com restrição de VaR proposto por Campbell, Huisman e Koedijk (2001) fazendo um paralelo com o modelo de média-variância. Podemos ver que a estrutura dos índices de performance utilizados nas maximizações apresentam características semelhantes entre os modelos analisados. No modelo de otimização com restrição de VaR, a fronteira eficiente é definida em termos do retorno esperado e do VaR expresso em valores financeiros ao invés de uma medida de dispersão como a variância. Podemos destacar duas características importantes do modelo com restrição de VaR: (1) é possível incorporarmos a não normalidade da distribuição dos retornos esperados dos ativos de risco; (2) a aversão ao risco dos investidores é capturada através do VaR sem a necessidade de assumirmos premissas sobre a sua função utilidade e coeficientes de aversão ao risco. Em linhas gerais, isso nos leva a alocação dos ativos de maneira mais intuitiva para os investidores, podendo o modelo ser facilmente aplicado ao dia-a-dia do mercado financeiro.

Códigos JEL: G11

Palavras-chaves: Fronteira eficiente, Otimização de carteiras e Value-at-Risk.

## ABSTRACT

BARBOSA, André do Sacramento. **Portfolio optimization under VaR constraints: study for brazilian market**, São Paulo: Insper, 2013. 62 f. Dissertation (Mastership) – Insper Instituto de Ensino e Pesquisa, São Paulo, 2013.

This study aims to evaluate portfolios with risk assets of Brazilian market (stocks and fixed income) through portfolio optimization with VaR constraint proposed by Campbell , Huisman and Koedijk (2001) by drawing a parallel with the model mean-variance. We can see that the structure of performance indexes used in the optimizations is similar between the models analyzed. In the optimization with VaR constraint model, the efficient frontier is defined in terms of expected return and the VaR is expressed in financial values instead of a measure of dispersion like the variance. We can highlight two important features of optimization portfolio with VaR constraint model: (1) it is possible to incorporate the non-normality of expected returns of risk assets distributions; (2) the use of VaR captures the risk aversion of investors without assumptions about their utility function and risk aversion coefficients. In general, this leads us to define the allocation of assets in a more intuitive way for investors, so the model can be easily applied to financial market.

JEL Codes: G11

Keywords: Efficient Frontier, Optimal portfolio selection and Value-at-Risk.

## Lista de Figuras

|  |    |
|--|----|
| Figura 1 – Exemplo do Risco x Retorno de algumas ações do mercado brasileiro...  | 16 |
| Figura 2 – Exemplo de Fronteira Eficiente para uma carteira com os ativos que compõe o IGC .....                           | 19 |
| Figura 3 – Exemplo de Fronteira Eficiente com CML .....  | 22 |
| Figura 4 – Exemplo de Fronteira Eficiente e preferência do investidor .....  | 24 |
| Figura 5 – Exemplo das linhas de preferência constante do critério de Roy .....  | 26 |
| Figura 6 – Exemplo do problema de escolha do investidor pelo critério de Telser....  | 27 |
| Figura 7 – Exemplo de distribuição empírica e VaR Histórico de uma carteira comprada no IGC .....                          | 30 |
| Figura 8 – Comparação das distribuições Normal e <i>t-Student</i> .....  | 33 |
| Figura 9 – Série dos log retornos do IGC e do IRF-M .....  | 42 |
| Figura 10 – Distribuição de frequência da amostra do IGC .....   | 43 |
| Figura 11 – Distribuição de frequência da amostra do IRF-M .....   | 43 |
| Figura 12 – Fronteiras Eficientes com restrição de VaR .....   | 45 |
| Figura 13 – Destaque das Fronteiras Eficientes com restrição de VaR .....  | 45 |
| Figura 14 – Destaque das CMLs para diferentes tipos de VaR .....   | 46 |
| Figura 15 – Comparação do VaR Histórico e do VaR Paramétrico Normal .....  | 47 |
| Figura 16 – Fronteira Eficiente para o modelo de média-variância .....   | 50 |
| Figura 17 – Comparação das Fronteiras Eficientes do modelo de média-variância e do modelo de restrição com VaR Normal..... | 51 |
| Figura 18 – Digrama da classe PortfolioVaRCampbell .....   | 55 |

## Lista de Tabelas

|   |    |
|---|----|
| Tabela 1 – Estatísticas descritivas dos dados.....  | 41 |
| Tabela 2 – Resumo dos valores diários e anuais.....   | 42 |
| Tabela 3 – Exemplo do cálculo dos pontos das fronteiras eficientes .....  | 44 |
| Tabela 4 – Carteira ótima com restrição de VaR Histórico.....   | 48 |
| Tabela 5 – Carteira ótima com restrição de VaR Histórico para diferentes níveis de confiança.....                             | 49 |
| Tabela 6 – Carteira ótima com restrição de VaR Paramétrico Normal e <i>t-Student</i> para diferentes níveis de confiança..... | 50 |
| Tabela 7 – Exemplo de como foram calculados os pontos da curva Média-Variância da Figura 17 .....                             | 51 |

## SUMÁRIO

|  |    |
|--|----|
| 1. INTRODUÇÃO.....   | 12 |
| 2. REFERENCIAL TEÓRICO.....  | 15 |
| 2.1 SELEÇÃO DE CARTEIRAS ATRAVÉS DO MODELO DE MÉDIA-VARIÂNCIA .....      | 15 |
| 2.2 MODELOS ALTERNATIVOS DE SELEÇÃO DE CARTEIRAS .....                   | 24 |
| 2.3 VAR, SIMULAÇÃO HISTÓRICA E MODELOS PARAMÉTRICOS .....                | 29 |
| 2.4 MODELO DE OTIMIZAÇÃO COM RESTRIÇÃO DE VAR.....                       | 34 |
| 3. DESCRIÇÃO DOS DADOS .....   | 39 |
| 4. RESULTADOS EMPÍRICOS.....   | 41 |
| 4.1 RESUMO DAS ESTATÍSTICAS .....  | 41 |
| 4.2 APLICAÇÃO DO MODELO COM RESTRIÇÃO DE VAR AO MERCADO BRASILEIRO ..... | 44 |
| 5. CONCLUSÃO .....   | 52 |
| REFERÊNCIAS.....   | 53 |
| ANEXO.....   | 55 |

## 1. INTRODUÇÃO

De forma geral os investidores desejam aumentar sua riqueza e possuem características de aversão ao risco, ou seja, dado um mesmo valor de retorno esperado, preferem investimentos que oferecem o menor risco. Nesse cenário o problema de como alocar a riqueza disponível de forma a maximizar o retorno esperado e minimizar os riscos associados, é imposto tanto para gestores de fundos responsáveis por grandes volumes financeiros, quanto indivíduos preocupados com seus investimentos pessoais. Ao longo do tempo o desenvolvimento da chamada “Moderna Teoria de Carteiras” nos traz os modelos e o ferramental necessário para a resolução desse problema de otimização.

Esse trabalho tem como objetivo avaliar carteiras formadas por ativos de risco do mercado Brasileiro (ações e renda fixa), levando em consideração características presentes no dia-a-dia do mercado financeiro, como: aversão ao risco dos investidores, assimetria em relação as probabilidades de eventos positivos (ganhos) e negativos (perdas), não linearidade dos ativos e não normalidade dos retornos esperados. Além disso, como contribuição desse estudo, podemos citar: (1) apresentação de um modelo alternativo e mais intuitivo para os investidores; (2) apresentação de exemplos práticos da aplicação do modelo de otimização de carteiras com restrição de VaR a ativos de risco do mercado brasileiro fazendo um paralelo do modelo de média-variância.

Podemos dizer que o desenvolvimento da chamada “Moderna Teoria de Carteiras” tem início com Markowitz (1952) com o desenvolvimento do modelo de média-variância. Nele é apresentado como definir carteiras ótimas levando em consideração o universo possível de combinações dos ativos, os retornos esperados, as variâncias e a correlação entre eles. Mais tarde, Sharpe (1964), Lintner (1965) e Mossin (1966), evoluíram o modelo de média-variância, aplicando conceitos econômicos como: eficiência de mercado, racionalidade dos agentes e maximização da função utilidade que descreve as preferências dos indivíduos. Em paralelo a evolução do modelo baseado em média-variância, uma outra abordagem para o assunto tomou forma, Roy (1952), Telser (1955) e Arzac e Bawa (1977)

trabalharam em modelos baseados em restrições de risco que ficaram conhecidos como modelos de segurança em primeiro lugar (“Safety First”). Ao invés de buscar maximizar a função utilidade do investidor essa outra família de modelos, além das restrições, incorpora características como por exemplo: a assimetria dos eventos “críticos” dando maior relevância a eventos negativos do que para eventos positivos. Leibowitz (1989) trabalha num outro aspecto dessa mesma abordagem utilizando como restrição na otimização eventos “extremos” da distribuição de probabilidade dos retornos esperados, ou restrição “shortfall”. Mais recentemente Campbell, Houisman e Koedijk (2001) evoluem o modelo geral de segurança em primeiro lugar proposto por Arzac e Bawa (1977) e apresentam um modelo onde é utilizado como medida de risco o conceito de VaR (“Value at Risk”) que define a pior perda esperada dado um nível de confiança em relação a riqueza inicial do investidor para um horizonte de tempo T.

Para o desenvolvimento desse trabalho foi tomado como referência o modelo de otimização com restrição de VaR proposto por Campbell, Houisman e Koedijk (2001). Além de aplicarmos o modelo para construção das carteiras e da fronteira eficiente utilizando ativos do mercado brasileiro, ao considerarmos a distribuição normal e o VaR paramétrico normal como medida de risco, foi possível fazermos um paralelo em relação ao modelo de média-variância. Os ativos utilizados no trabalho foram: o IGC, o IRF-M e o CDI (detalhados na Seção 3) pois podem ser considerados aproximações do mercado de ações negociadas em bolsa, títulos de renda fixa e taxa livre de risco para o mercado brasileiro. A escolha desses ativos buscou fazer uma analogia aos dados utilizados no artigo de referência: S&P 500, o 10-year datastream benchmark US government bond e o 3-month US Treasury Bill como ativo livre de risco.

Os resultados apresentam fronteiras eficientes com regiões muito estreitas em relação aos retornos esperados e ao risco associado as carteiras. Além disso, as carteiras são composta quase em sua totalidade por ativos de renda fixa para todos os modelo de VaR empregados na restrição da otimização. Ao avaliarmos as estatísticas básicas como a média e a variância dos dados do mercado brasileiro utilizados no trabalho, podemos ver que o índice das ações apresenta um retorno

esperado muito próximo do índice dos títulos de renda fixa com níveis de risco muito distintos. Em relação ao paralelo entre os modelos de otimização com restrição de VaR e média-variância, podemos citar os seguintes pontos: (1) ambos os modelos possuem estruturas semelhantes para os índices de performance (prêmio de risco por unidade de risco) utilizados nas maximizações; (2) a fronteira eficiente do modelo com restrição de VaR é definida em termos do retorno esperado e do VaR (expresso em valores financeiros) ao invés de uma medida de dispersão como no modelo de média-variância; (3) no modelo com restrição de VaR é possível incorporarmos a não normalidade da distribuição dos retornos esperados dos ativos de risco; e (4) a aversão ao risco dos investidores é capturada através do VaR sem a necessidade de assumirmos premissas sobre a sua função utilidade e coeficientes de aversão ao risco.

Em linhas gerais, podemos dizer que a aversão ao risco é expressa pelos investidores através do nível de confiança associado ao VaR e que o modelo de otimização com restrição de VaR apresenta uma maneira mais intuitiva para os investidores, dado que a perda potencial é estabelecida em termos de valores financeiros.

Na Seção 2 são apresentados os principais conceitos relacionados com os modelos de otimização de carteiras, a definição do VaR para distribuições empíricas e paramétricas e finalmente o modelo de otimização com restrição de VaR definido por Campbell, Huisman e Koedijk (2001). Nas Seções 3 e 4 são detalhadas as características dos dados utilizados para a análise e os resultados da aplicação dos modelos para o mercado brasileiro. Para encerrarmos, na Seção 5 temos a apresentação das conclusões e discussão sobre possíveis desdobramentos do trabalho.

## **2. REFERENCIAL TEÓRICO**

Nesta seção apresentamos os principais conceitos para entendimento do modelo de otimização de carteiras com restrição de VaR proposto por Campbell, Houisman e Koedijk (2001). Primeiramente temos um resumo sobre a seleção de carteiras através do modelo de média-variância e os principais aspectos envolvidos na construção da fronteira eficiente. Em seguida são apresentados os modelos alternativos de segurança em primeiro lugar e as definições para estimação do VaR através de simulação histórica e modelos paramétricos. Para finalizar, esta seção descreve o modelo de otimização de carteiras com restrição de VaR utilizado para análise dos dados do mercado brasileiro.

### **2.1 Seleção de carteiras através do modelo de média-variância**

A forma como um investidor aloca sua riqueza em busca de um retorno positivo no futuro é um assunto sempre presente no estudo da economia. Podemos dizer que a chamada “Moderna Teoria de Carteiras” teve seu início com Markowitz em 1952 com seu trabalho sobre seleção de carteiras. Desde então, diversos autores vêm contribuindo ao longo do tempo para o desenvolvimento de novas teorias relacionadas ao assunto. A seguir são apresentados de forma resumida os principais pontos detalhados de forma muito didática por Elton (2004) a respeito das teorias desenvolvida por Markowitz (1952 e 1959), Sharpe (1964), Lintner (1965), Mossin (1966).

O modelo de Markowitz (1952) utiliza apenas os dois primeiros momentos da distribuição dos retornos dos ativos de risco para descrever a forma como os investidores irão alocar sua riqueza. A esperança dos retornos dos ativos de risco como estimativa do retorno futuro para um período é obtida através da média, e a medida de dispersão associada ao risco do ativo é calculada através do desvio padrão obtido a partir da variância dos retornos. Tais conceitos são apresentados nas Eq. (2.1-1 à 4).

$$\text{Retorno do Ativo } i = R_i = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}; \quad (2.1 - 1)$$

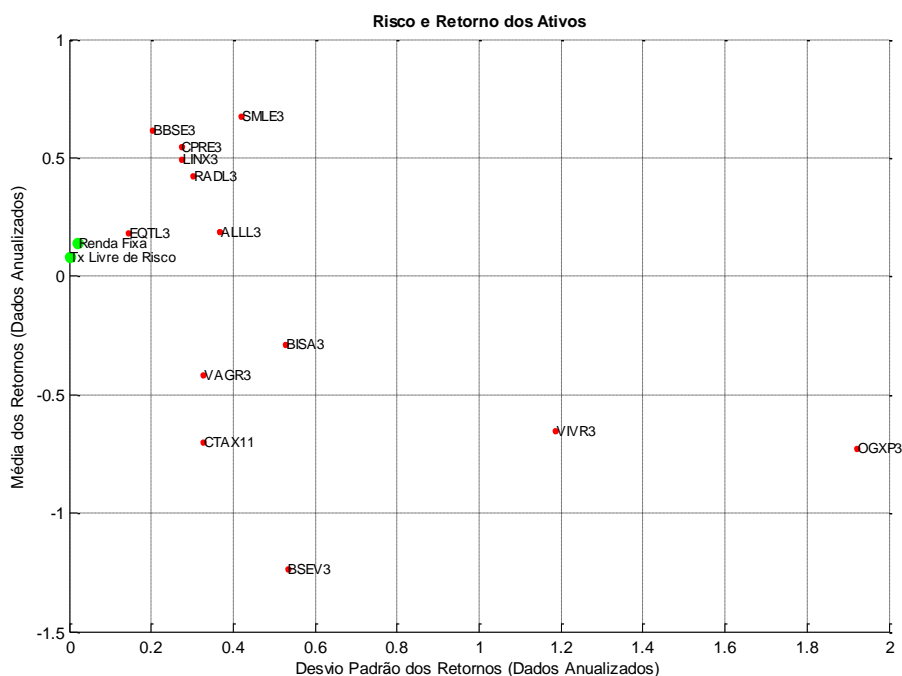
$$\text{Média dos Retornos do Ativo } i = \bar{R}_i = \frac{\sum_{j=1}^N R_{ij}}{N}. \quad (2.1 - 2)$$

$$\text{Desvio Padrão do Ativo } i = \sigma_i = \sqrt{\sigma_i^2} \quad (2.1 - 3)$$

$$\text{Variância do Ativo } i = \sigma_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^N (R_{ij} - \bar{R}_i)^2}{N}. \quad (2.1 - 4)$$

A Figura 1 apresenta um exemplo da média dos retornos de alguns dos ativos que compõe o índice IGC<sup>1</sup> da BM&FBovespa em relação aos seus respectivos desvios padrão.

**Figura 1 – Exemplo do Risco x Retorno de algumas ações do mercado brasileiro**



Fonte: Gráfico elaborado pelo autor, dados: Economatica.

<sup>1</sup> O índice IGC e o período da série histórica utilizados na figura são descritos na Seção 3.

Para investidores com aversão ao risco, os ativos que apresentam retornos esperados maiores para um mesmo nível de risco, ou que apresentam um risco menor para um mesmo nível de retorno esperado, serão preferidos em relação aos demais. Utilizando como exemplo alguns ativos da Figura 1, um investidor com aversão ao risco iria preferir investir no ativo CPRE3 em relação ao LINX3 ou então no ativo EQTL3 em relação ao ALLL3.

### Fronteira Eficiente

Quando consideramos uma carteira formada por vários ativos, uma carteira ótima é aquela onde para um determinado valor de risco (desvio padrão), temos uma combinação de ativos que maximiza o retorno esperado, ou então, para um determinado retorno esperado, temos uma combinação de ativos que minimiza o risco da carteira. Conforme visto anteriormente, para investidores com aversão ao risco as carteiras ótimas serão preferidas em relação as demais. Ao considerarmos os pontos referentes a Risco x Retorno Esperado a curva formada por todas as carteiras ótimas é chamada de fronteira eficiente.

Para encontrarmos qual o conjunto de pontos ótimos é preciso antes definirmos o retorno esperado e risco da carteira formada por um conjunto de  $n$  ativos  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Sendo uma carteira, uma combinação linear de ativos, Markowitz (1952) define o retorno esperado da carteira de acordo com a Eq. (2.1-5) e o desvio padrão conforme a Eq. (2.1-6).

$$\text{Retorno Esperado da Carteira} = R_p = \sum_{i=1}^N w_i \bar{R}_i, \quad (2.1 - 5)$$

onde:

$w_i$  : é o peso ou participação do ativo  $i$  na carteira;

$\bar{R}_i$  : é o retorno esperado do ativo  $i$ .

$$\text{Desvio Padrão da Carteira} = \sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij}}, \quad (2.1 - 6)$$

onde:

$\sigma_{ij}$ : é a covariância<sup>2</sup> dos ativos  $a_i$  e  $a_j$ , sendo que para  $i = j$  temos a variância do ativo  $a_i$ ;

$w_i$ : é o peso ou participação do ativo  $i$  na carteira;

$w_j$ : é o peso ou participação do ativo  $j$  na carteira.

A fronteira eficiente será formada pelo conjunto de pontos ótimos que correspondem a diferentes composições de carteiras que atendem ao requisito de minimizarmos o risco da carteira para um dado retorno esperado  $R_p$  (ou maximizarmos o retorno esperado dado um determinado nível de risco  $\sigma_p$ ). Para construirmos a fronteira eficiente devemos encontrar os pesos  $w_i$  que satisfazem Eq. (2.1-7) ou então a Eq. (2.1-8). Em ambos os casos estamos considerando apenas carteiras não alavancadas<sup>3</sup>, ou seja, estamos considerando apenas que a riqueza disponível é investida em posições compradas.

$$\min \sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij}} \quad (2.1 - 7)$$

sujeito as restrições:

- $R_p = \sum_{i=1}^N w_i \bar{R}_i$  (retorno esperado da carteira)
- $\sum_{i=1}^N w_i = 1$  (todo capital disponível é investido)
- $0 \leq w_i \leq 1$  (sem alavancagem)

---

<sup>2</sup> Elton (2004) define a covariância dos retornos de dois ativos  $i$  e  $j$  como:

$$\sigma_{ij} = E\{[R_i - E(R_i)][R_j - E(R_j)]\}.$$

<sup>3</sup> O desenvolvimento desse trabalho teve como objetivo fazer a aplicação do modelo de otimização com restrição de VaR conforme descrito por Campbell, Houisman e Koedijk (2001), e portanto, considerou apenas carteiras sem alavancagem. Um estudo completo sobre carteiras com e sem alavancagem pode ser encontrado em Elton (2004).

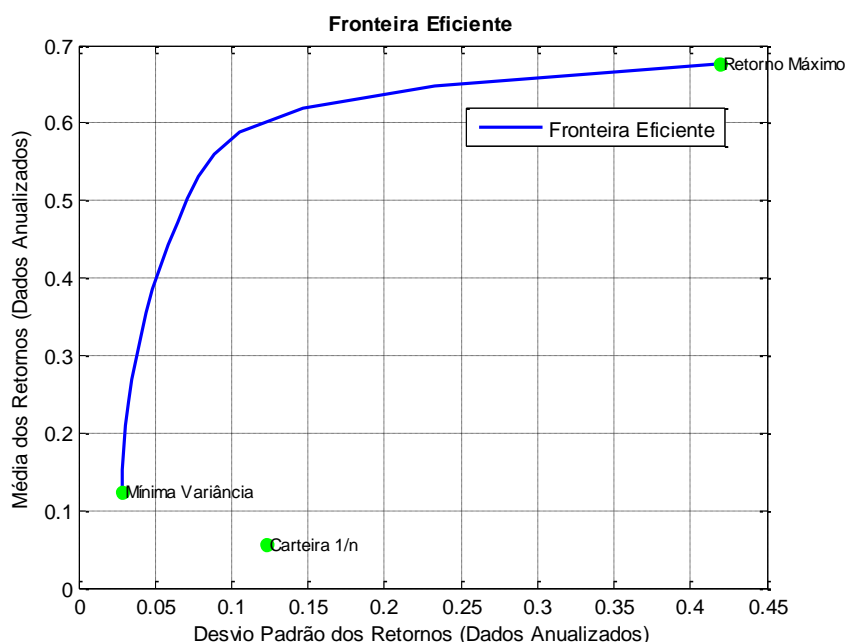
$$\max R_p = \sum_{i=1}^N w_i \bar{R}_i \quad (2.1 - 8)$$

sujeito as restrições:

- $\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij}}$  (risco)
- $\sum_{i=1}^N w_i = 1$  (todo capital disponível é investido)
- $0 \leq w_i \leq 1$  (sem alavancagem)

A Figura 2 apresenta a fronteira eficiente de uma carteira sem alavancagem formada pelos ativos que compõe o IGC<sup>4</sup>. Podemos ver neste exemplo, que um indivíduo que decidisse investir sua riqueza em partes iguais, aplicando numa carteira com peso  $w_i = 1/n$  para todos os ativos, teria um resultado ineficiente dado que a carteira 1/n apresenta um retorno bem inferior a carteira da fronteira eficiente para o mesmo valor de risco (desvio padrão).

**Figura 2 – Exemplo de Fronteira Eficiente para uma carteira com os ativos que compõe o IGC**



Fonte: Gráfico elaborado pelo autor, dados: Economatica.

<sup>4</sup> IGC é descrito mais adiante da seção 3.

Outros dois pontos importantes identificados na Figura 2 são os extremos da fronteira eficiente. O ponto de Mínima Variância representa a carteira com o menor risco possível dentre as pertencentes a fronteira eficiente. Ele poderá ser considerado pelos investidores interessados apenas em investir sua riqueza de forma a obter o menor risco possível sem se preocupar com o retorno esperado. Por outro lado, os investidores interessados apenas em maximizar o retorno esperado sem se preocupar com o nível de risco, deverão considerar a carteira referente ao ponto de Retorno Máximo da fronteira eficiente.

### **Ativo livre de risco e carteira tangente**

Até o momento a fronteira eficiente foi construída apenas alterando a composição dos pesos dos ativos de risco, porém os investidores podem optar por incluir um ativo livre de risco a carteira. Demodaram (2008) define um ativo livre de risco como um ativo que não apresenta variações em relação ao retorno esperado ao longo do tempo, ou seja, o retorno real ao final do período de investimento é igual ao retorno esperado no momento inicial. Para que um ativo seja considerado livre de risco é preciso que ele possua características específicas: (1) o emissor da dívida não pode apresentar risco de falha<sup>5</sup>; (2) não pode haver risco de reinvestimento entre o período final e inicial do investimento (como por exemplo no caso de pagamento de cupons); e (3) o retorno do ativo livre de risco não pode apresentar correlação com qualquer outro ativo de risco no mercado financeiro.

Conforme a definição acima, podemos ver que a inclusão de um ativo livre de risco na carteira, não altera o fronteira eficiente dos ativos de risco devido à ausência de correlação e ao seu desvio padrão ser muito próximo de zero. Considerando a nova carteira formada por ativos de risco e o ativo livre de risco, uma nova fronteira eficiente é formada e seu comportamento é descrito pela Eq. (2.1-9).

---

<sup>5</sup> De acordo como Demodaram (2008), risco de falha ou “default risk” é o risco do detentor da dívida não honrar seus compromissos fazendo com que o credor perca todo ou parte do seu investimento.

$$\bar{R}_C = R_F + \left( \frac{\bar{R}_A - R_F}{\sigma_A} \right) \sigma_C \quad (2.1 - 9)$$

onde:

$\bar{R}_C$ : Retorno esperado da nova carteira formada por ativos de risco e o ativo livre de risco;

$R_F$ : Retorno do ativo livre de risco;

$\bar{R}_A$ : Retorno esperado da carteira formada apenas pelos ativos de risco;

$\sigma_A$ : Desvio padrão da carteira formada apenas pelos ativos de risco;

$\sigma_C$ : Desvio padrão da nova carteira formada por ativos de risco e o ativo livre de risco;

$\bar{R}_A - R_F$ : Representa o prêmio de risco<sup>6</sup>;

$\frac{\bar{R}_A - R_F}{\sigma_A}$ : Representa o índice de Sharpe<sup>7</sup>;

A nova fronteira eficiente é denominada CML – Capital Market Line e apresenta o formato de uma reta com inclinação dada pelo prêmio de risco em relação ao desvio padrão da carteira formada apenas pelos ativos de risco. Dentre as possíveis carteiras formadas pela combinação do ativo livre de risco e os ativos de risco, existe uma com característica especial. Trata-se da Carteira de Mercado que faz com que a reta CML seja tangente a fronteira de eficiência dos ativos de risco, definindo assim uma carteira que domina todas as demais em relação a risco e retorno pois

---

<sup>6</sup> Elton (2004) define o prêmio de risco como a diferença entre o retorno esperado de um ativo de risco e o retorno do ativo livre de risco.

$$\text{Prêmio pelo Risco} = R_i - r_f.$$

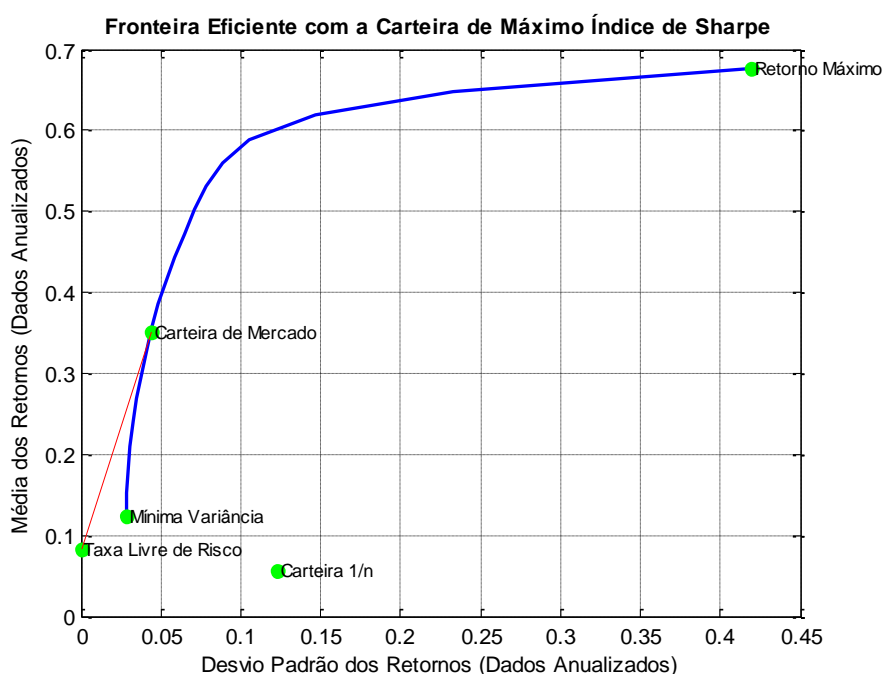
<sup>7</sup> Elton (2004) define o índice de Sharpe como o prêmio de risco em relação ao desvio padrão do ativo de risco. Esse índice é uma medida amplamente utilizada para avaliação do desempenho de uma carteira, quanto maior seu valor, melhor o desempenho da carteira.

$$\text{Índice de Sharpe} = IS = \frac{R_i - r_f}{\sigma_i}.$$

possui o maior coeficiente angular dentre as possíveis retas, maximizando assim o Índice de Sharpe. Isso nos dá um ponto onde um possível investidor é indiferente a investir no ativo livre de risco ou nos ativos de risco pois ambos apresentam a mesma relação risco x retorno.

A Figura 3 apresenta um exemplo da CML e da fronteira eficiente dos ativos de risco que compõe o IGC<sup>8</sup> e da Carteira de Mercado que indica o ponto de tangência entre as duas curvas.

**Figura 3 – Exemplo de Fronteira Eficiente com CML**



Fonte: Gráfico elaborado pelo autor, dados: Economática.

### Carteira ótima

Conforme visto anteriormente o comportamento da fronteira eficiente dos ativos de risco e da CML dependem apenas das características dos ativos envolvidos. A escolha dos pesos dos ativos ou da proporção do ativo livre de risco na carteira,

<sup>8</sup> IGC é descrito mais adiante da seção 3.

depende vai depender das preferências do investidor em relação ao risco e retorno. Se ele estiver interessado apenas em obter o menor risco possível, deverá optar pela Carteira de Mínima Variância, se estiver interessado no maior retorno possível, deverá optar pela carteira na extremidade correspondente da fronteira eficiente e se estiver interessado no retorno máximo para cada unidade de risco adicional, deverá optar pela Carteira de Mercado.

A carteira ótima para um investidor vai depender das suas preferências, sendo que para o modelo desenvolvido de Markowitz (1959) isso é expresso através da função utilidade e das curvas de indiferença<sup>9</sup> em relação a risco e retorno. Ao assumirmos que os investidores são avessos ao risco, podemos considerar que suas preferências podem ser expressas através da função utilidade descrita na Eq. (2.1-10).

$$U = E(W_{final}) - \frac{1}{2}\gamma VAR(W_{final}) \quad (2.1 - 10)$$

$E(W_{final})$  e  $VAR(W_{final})$  representam respectivamente o valor esperado e a variância da riqueza ao final do período, sendo assim, considerando que o investidor investe toda a riqueza numa carteira, sua função utilidade pode ser reescrita conforme a Eq. (2.1-11).

$$U = E(R_p) - \frac{1}{2}\gamma VAR(R_p). \quad (2.1 - 11)$$

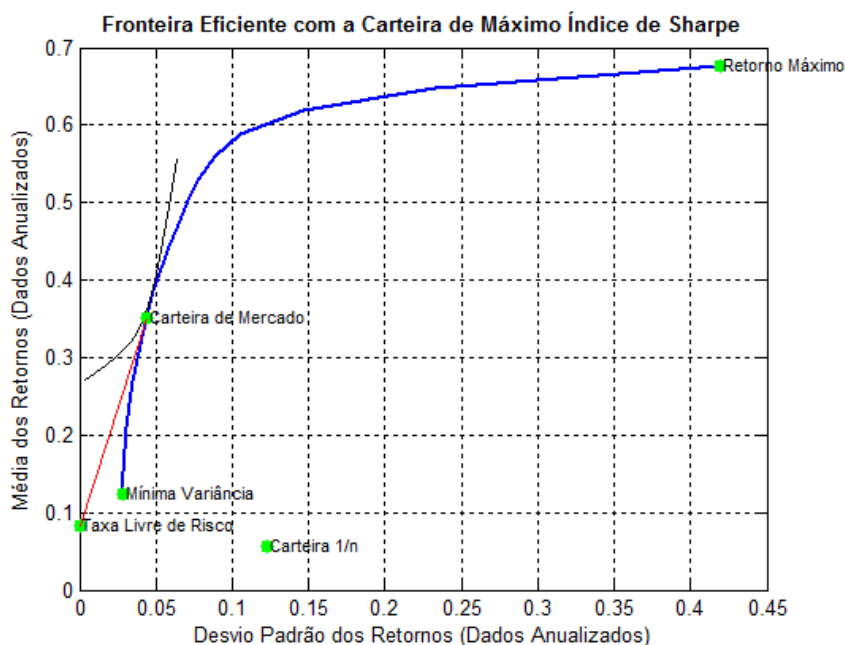
O parâmetro  $\gamma$ , representa o grau de aversão, podendo variar de um investidor para outro. Além disso, um investidor pode alterar seu  $\gamma$  ao longo do tempo de acordo as mudanças em suas preferências. Quanto maior for o valor de  $\gamma$ , maior a influência do risco (expresso através do  $VAR(R_p)$ ) e menor será a utilidade. Quanto menor for o valor de  $\gamma$ , mais a utilidade irá depender apenas do valor esperado do retorno da carteira.

---

<sup>9</sup> De acordo com Elton (2004), dado um conjunto de oportunidades a curva de indiferença representa os pontos onde um investidor possui uma mesma utilidade para escolhas distintas.

Dessa forma, é possível unirmos as preferências dos investidores ao comportamento dos ativos descritos pela fronteira eficiente e a CML. Nesse novo cenário a carteira ótima formada por ativos de risco e o ativo livre de risco é aquela que maximiza a utilidade do investidor. Na Figura 4 podemos ver uma ilustração de exemplo de como uma carteira ótima é definida para um determinado investidor através da maximização de sua utilidade expressa pela curva de indiferença que tangência a fronteira eficiente e a CML.

**Figura 4 – Exemplo de Fronteira Eficiente e preferência do investidor**



Fonte: Ilustração elaborada pelo autor.

## 2.2 Modelos alternativos de seleção de carteiras

Além dos modelo de média-variância e maximização da utilidade esperada para o retorno de um investimento, existem modelos alternativos para seleção de carteiras. A utilização desses modelos visa simplificar o mecanismo de tomada de decisão por parte dos investidores. Para tal, vamos trabalhar com premissas mais abrangentes em relação a distribuição dos dados e a utilização de restrições não baseadas em maximização da função utilidade do investidor.

Dentre os principais modelos alternativos, Elton (2004) cita: o critério de seleção da média geométrica, dominância estocástica e os modelos segurança em primeiro lugar de Roy, Kataoka e Telser. Por estarem relacionados com o modelo de restrição de VaR e o estudo desenvolvido, apresentamos a seguir os modelos de segurança em primeiro lugar.

### **Modelos de segurança em primeiro lugar**

Elton (2004) descreve que os modelos de segurança surgiram do fato de que alguns investidores estão mais interessados nas perdas devido a eventos desfavoráveis e também não estão dispostos a fazer os cálculos necessários relacionados com o teorema da utilidade esperada.

O modelo proposto por Roy (1952) define que a melhor carteira é aquela que possui a menor probabilidade de produzir um retorno  $R_p$  abaixo de um nível inferior estipulado  $R_L$ , ou seja, o investidor deseja:

$$\min \Pr(R_p < R_L). \quad (2.2 - 1)$$

Considerando que o retorno da carteira siga uma distribuição normal, podemos calcular qual a distância entre o retorno inferior  $R_L$  e o retorno médio da carteira  $\bar{R}_p$ , em relação ao seu desvio padrão.

$$\min \frac{R_L - \bar{R}_p}{\sigma_p} \quad (2.2 - 2)$$

Que é equivalente a:

$$\max \frac{\bar{R}_p - R_L}{\sigma_p}. \quad (2.2 - 3)$$

Todas as carteiras que atendem a esse critério seriam iguais, sendo assim, temos que:

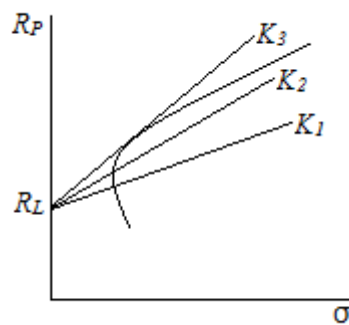
$$\frac{\bar{R}_p - R_L}{\sigma_p} = K \quad (2.2 - 4)$$

ou reescrevendo a Eq.(2.2-4):

$$\bar{R}_p = R_L + K\sigma_p. \quad (2.2 - 5)$$

Podemos ver que  $\bar{R}_p$  é uma linha reta com intercepto  $R_L$  e inclinação  $K$ , ou seja, a melhor linha é aquela que possui maior inclinação ( $K_3 > K_2 > K_1$ ). Quando pensamos na relação do critério de Roy com a fronteira eficiente, a carteira ótima é aquela onde a reta descrita na Eq.(2.2-5) é tangente a fronteira eficiente definida pelos ativos.

**Figura 5 – Exemplo das linhas de preferência constante do critério de Roy**



Observação: Ilustração de exemplo.

Outro critério de segurança em primeiro lugar foi proposto por Telser (1955) e define que devemos maximizar o retorno esperado da carteira  $\bar{R}_p$ , sujeito a restrição de que a probabilidade do retorno da carteira  $R_p$  ser igual ou menor que um nível de retorno inferior  $R_L$ , seja igual ou inferior a um limite de perda estabelecido  $\alpha$ , isto é,

$$\begin{aligned} \max \bar{R}_p \quad (2.2 - 6) \\ \text{sujeito a: } \Pr(R_p \leq R_L) \leq \alpha. \end{aligned}$$

Para o modelo de Telser podemos reorganizar a restrição utilizando a desigualdade de Techbyshev<sup>10</sup> e considerando apenas que o nível inferior dos retornos  $R_L$  está abaixo da média do retorno esperado da carteira  $\bar{R}_p$ :

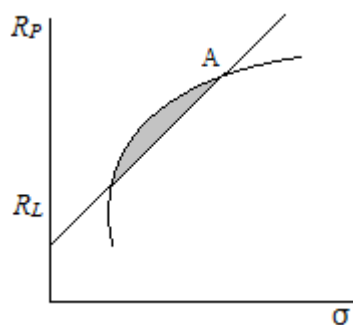
$$\Pr\left(\frac{R_L - \bar{R}_p}{\sigma_p} < -K\right) \leq \frac{1}{K^2}. \quad (2.2 - 7)$$

Sendo assim:

$$\bar{R}_p \geq R_L + K\sigma_p. \quad (2.2 - 8)$$

A Eq. (2.2-8) é parecida com a apresentada pelo modelo de Roy, porém agora, devido a desigualdade, todos pontos acima da reta  $R_L + K\sigma_p$  satisfazem a restrição. Ao considerarmos o espaço formado pela fronteira eficiente e os pontos definidos pelo critério de seleção de Telser, o conjunto de carteiras que atendem a ambas as restrições é identificado pela área hachurada da Figura 6. A carteira ótima é aquela onde a reta intercepta a fronteira eficiente identificada pelo ponto A.

**Figura 6 – Exemplo do problema de escolha do investidor pelo critério de Telser**



Fonte: Ilustração de exemplo.

<sup>10</sup> De acordo com Elton (2004) a desigualdade de Tchebychev nos permite determinar a probabilidade máxima de obter resultado inferior a um dado valor, sem pressupor qualquer tipo de distribuição de probabilidade.

$$\text{Desigualdade de Tchebychev} = \text{Prob}\left(\left|\frac{R - \bar{R}_p}{\sigma_p}\right| > K\right) \leq \frac{1}{K^2}$$

É importante notar que dependendo da escolha do nível inferior dos retornos  $R_L$  e do limite da probabilidade  $\alpha$ , a reta referente a restrição pode não interceptar a fronteira de eficiente em nenhum ponto, o que indica que não existe uma carteira ótima capaz de atender a restrição imposta.

Além disso Arzac e Bawa (1977) discutem os modelos definidos por Roy (1952) e Telser (1955) criando uma abordagem mais geral utilizada por Campbell, Huisman e Koedijk (2001) como base para definir o modelo de otimização de carteira com restrição de VaR. Partindo do que Arzac e Bawa (1977) chamam de "...uma análise lexicográfica dos princípios de segurança em primeiro lugar definidos por Roy(1952) e Telser (1955)...", os autores chegam ao modelo que maximiza a riqueza do investidor através da otimização descrita na Eq. (2.2-10).

$$\max_{\gamma_j} \frac{\bar{R} - r}{r - q_\alpha(R)} \quad (2.2 - 10)$$

onde:

$X_j$ : Valor aleatório do ativo j ao final do período;

$V_j$ : Valor inicial do ativo j;

$\gamma_j$ : Peso dado ao ativo j na composição da carteira;

$R = (\sum_{j=1}^N \gamma_j X_j) / (\sum_{j=1}^N \gamma_j V_j)$ : Retorno da carteira;

$\bar{R} = E(R)$ : Retorno esperado da carteira construída com a riqueza no período inicial;

$r$ : Taxa livre de risco;

$q_\alpha(R)$ : Quantil referente ao nível de significância  $\alpha$  da destruição do retorno da carteira.

Um ponto interessante dos modelos de restrição de segurança em primeiro lugar é que não são feitas inferências sobre as preferências dos investidores. Uma vez escolhido o modelo e definido os parâmetros críticos aceitáveis é possível encontrar uma mesma solução ótima para todo um conjunto de investidores que possuem os mesmos parâmetros. Apesar de tudo, Arzac e Bawa (1977), assim como outros autores por eles analisados, não encontram evidências se os modelos de segurança

em primeiro lugar são preferidos em relação ao modelo de média-variância para seleção de carteiras pelos investidores.

### **2.3 VaR, simulação histórica e modelos paramétricos**

Dentre os modelos para definição do risco de perda de uma carteira, o VaR se tornou um modelo amplamente utilizado no mercado financeiro<sup>11</sup>. Jorion (2003) define o VaR como sendo a pior perda esperada de um ativo ou carteira, para um determinado horizonte de tempo, probabilidade e nível de confiança. Algumas características interessantes dessa medida de risco são: (1) sua relativa simplicidade de cálculo baseado em técnicas estatísticas; (2) expressar em um único número a exposição ao risco; e (3) a unidade de medida do risco é expressa em função de valores financeiros. Esses dois últimos pontos nos leva a uma melhor compreensão do porque a restrição de VaR vêm a ser algo mais intuitivo para o investidor quando empregada no modelo de otimização de carteira descrito na Seção 2.4. O desenvolvimento do trabalho utiliza duas das principais formas de mensuração do VaR, a Simulação Histórica e o VaR Paramétrico.

#### **Simulação Histórica**

A simulação histórica é um modelo considerado como não paramétrico por alguns autores. O modelo parte do princípio que os dados passados possuem toda informação necessária a respeito dos retornos e da distribuição de probabilidades. Não são definidas premissas em relação a normalidade, curtose, assimetria etc., permitindo assim a incorporação de relações não lineares ao cálculo do risco.

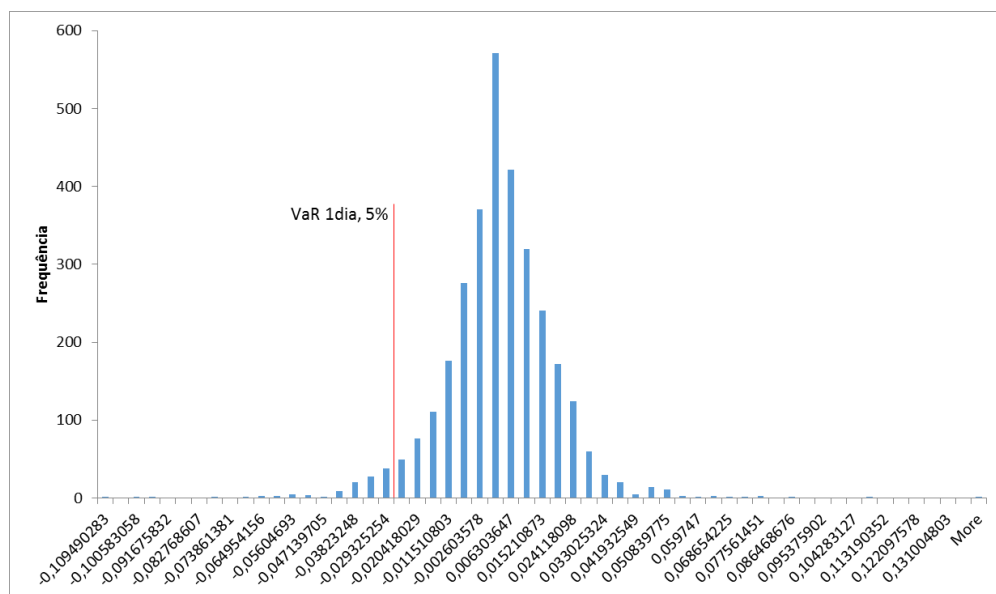
Alexander (2008 v.4) define o VaR Histórico percentual como o quantil inferior equivalente a um nível de significância  $\alpha$  da distribuição empírica dos retornos de uma amostra cujos dados possuem um intervalo de tempo  $h$  (ex: diário, mensal, anual etc.).

---

<sup>11</sup> Tanto Jorion(2003), quanto Alexander v.4 (2008), apresentam argumentos sobre a crescente adoção do VaR como ferramenta para gerenciamento de risco de carteiras em virtude da regulamentação imposta para os bancos a partir do começo dos anos 90.

A Figura 7, apresenta o VaR Histórico percentual para um nível de significância de 5% e horizonte de tempo de 1 dia para a distribuição empírica dos retornos de uma carteira comprada apenas no índice IGC<sup>12</sup> negociado na BM&FBovespa.

**Figura 7 – Exemplo de distribuição empírica e VaR Histórico de uma carteira comprada no IGC**



Fonte: Gráfico elaborado pelo autor, dados: Economática.

Em linhas gerais, uma vez definidos os pesos dos ativos na carteira, devemos aplica-los aos retornos dos dados das séries históricas dos ativos de forma a gerar um conjunto de retornos esperados “simulados” para cada item da série. Dessa forma, podemos dizer que temos o retorno esperado da carteira para cada período da série histórica. Em seguida, basta calcularmos o quantil equivalente ao nível de significância desejado para obter o valor do VaR Histórico percentual.

Um ponto de atenção quando trabalhamos com simulação histórica é a quantidade de elementos utilizados na amostra. Alexander (2008 v.4) discute como o tamanho da amostra pode impactar na precisão do VaR e que por esse motivo a simulação histórica é geralmente aplicada a dados diários.

<sup>12</sup> O índice IGC e o período da série histórica utilizados na figura são descritos na Seção 3.

## VaR Paramétrico

Os modelos paramétricos para o cálculo do VaR fazem uso da estimação de parâmetros e premissas sobre sua distribuição de probabilidade, o que nos leva a simplificação para a realização dos cálculos. Considerando que os retornos de uma carteira, que chamaremos de  $X$ , para um determinado intervalo de tempo  $h$ , possuem distribuição normal padrão  $N(0,1)$  e são i.i.d.<sup>13</sup>, Alexander (2008 v.4) define o VaR da carteira conforme o procedimento descrito a seguir.

Sendo:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2), \quad (2.3 - 3)$$

dado um determinado nível de significância  $\alpha$  e um nível crítico  $x_\alpha$  de forma que a probabilidade  $\Pr$  seja:

$$\Pr(X < x_\alpha) = \alpha. \quad (2.3 - 4)$$

Podemos definir  $\Pr(X < x_\alpha)$  em função da normal  $Z \sim N(0,1)$  através da transformação:

$$\Pr(X < x_\alpha) = \Pr\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{x_\alpha - \mu}{\sigma}\right) = \Pr\left(Z < \frac{x_\alpha - \mu}{\sigma}\right), \quad (2.3 - 5)$$

portanto,

$$\Pr\left(Z < \frac{x_\alpha - \mu}{\sigma}\right) = \alpha. \quad (2.3 - 6)$$

Pela definição temos que  $\Pr(Z < \Phi^{-1}(\alpha)) = \alpha$ , sendo assim, temos que:

---

<sup>13</sup> i.i.d.: independente e identicamente distribuídos.

$$\frac{x_\alpha - \mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(\alpha) \quad (2.3 - 7)$$

onde  $\Phi$  é a função de distribuição de probabilidade normal.

Pela definição, temos que  $x_\alpha = -VaR_\alpha$  e  $\Phi^{-1}(\alpha) = -\Phi^{-1}(1 - \alpha)$  devido a simetria da distribuição normal. Ao substituímos essas definições na Eq.(2.3-7), chegamos a uma fórmula analítica para o VaR absoluto percentual da carteira com um retorno i.i.d. normal:

$$VaR_\alpha = \Phi^{-1}(1 - \alpha)\sigma - \mu \quad (2.3 - 8)$$

ou considerando o horizonte de tempo  $h$ :

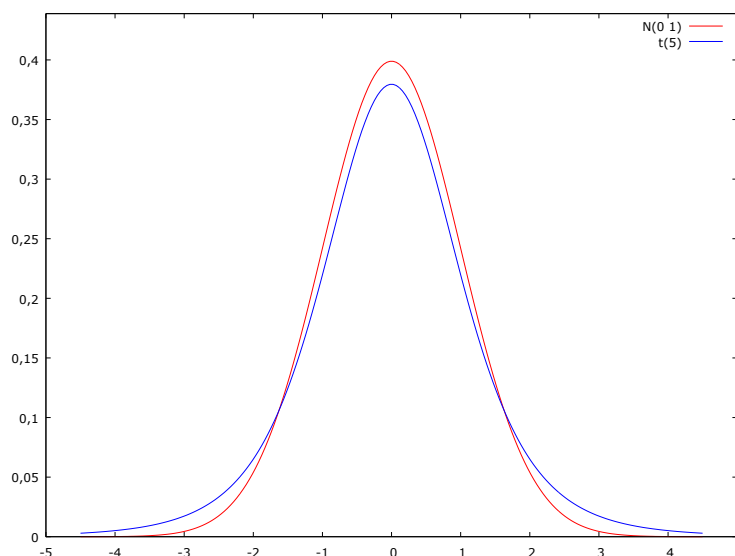
$$VaR_{h,\alpha} = \Phi^{-1}(1 - \alpha)\sigma_h - \mu_h. \quad (2.3 - 9)$$

Esse é o VaR absoluto da carteira com retorno i.i.d normal, com retorno esperado  $\mu_h$  e desvio-padrão  $\sigma_h$ . Para obtermos o VaR em termos do valor, é preciso multiplicar o VaR absoluto percentual pelo valor corrente da carteira  $P_t$  conforme descrito na Eq.(2.3-10).

$$VaR_{h,\alpha} = (\Phi^{-1}(1 - \alpha)\sigma_h - \mu_h)P_t. \quad (2.3 - 10)$$

Além da distribuição normal, é possível trabalharmos com outros tipos de distribuição, como por exemplo a *t-Student*. Esse tipo de distribuição permite incorporarmos à avaliação do risco, os eventos extremos muitas vezes presentes nos retornos de ativos financeiros. Podemos ver na Figura 8 que a curva referente a distribuição *t-Student* com 5 graus de liberdade apresenta um decaimento mais suave nas caudas.

**Figura 8 – Comparação das distribuições Normal e *t-Student***



Fonte: gráficos de exemplo de distribuições Normal e *t-Student* gerados pelo software gretl<sup>14</sup>.

Isso irá refletir diretamente no valor do VaR calculado de acordo com o nível de significância desejado. Para valores mais elevados no nível de significância, a distribuição normal tende a superestimar o VaR, enquanto que para valores mais baixos, tende a subestimar. O uso da distribuição *t-Student* pode nos ajudar com esse problema de sub ou superestimação do VaR, porém um ponto importante é definirmos qual o número de graus de liberdade que devemos considerar. De acordo com Alexander (2008 v.4), sendo  $v$ , o número de graus de liberdade, o excesso de curtose  $x$  é dado por:

$$x = \frac{6}{(v - 4)}, \quad (2.3 - 11)$$

e portanto,

$$v = \frac{6}{x} + 4. \quad (2.3 - 12)$$

---

<sup>14</sup> gretl: software open-source de análise econométrica (<http://gretl.sourceforge.net/>).

Quando  $v$  tende ao infinito, o excesso de curtose  $x$  tende a zero, e portanto, a distribuição se aproxima de uma normal. Para calcularmos o VaR através da distribuição *t-Student* dos retornos da carteira  $X$  discutidos anteriormente, Alexander (2008 v. 4) apresenta a definição na Eq. (2.3-13).

$$VaR_{\alpha,v} = \sqrt{\frac{(v-2)}{v}} t_v^{-1}(\alpha)(1-\alpha)\sigma - \mu \quad (2.3-13)$$

onde:

|                              |  |
|------------------------------|--|
| $v$                          | : número de graus de liberdade;  |
| $t_v^{-1}(\alpha)(1-\alpha)$ | : porção negativa referente ao quantil $\alpha$ de uma distribuição <i>t-Student</i> padrão; |
| $\sigma$                     | : desvio padrão dos retornos da carteira;  |
| $\mu$                        | : média dos retornos da carteira.  |

Conforme pudemos ver, a escolha do tipo de distribuição e dos parâmetros utilizados são importantes recursos para calcular o valor do VaR de acordo com as características dos dados.

## 2.4 Modelo de Otimização com Restrição de VaR

Conforme descrito anteriormente, investidores apresentam uma característica assimétrica a eventos negativos (perdas) e positivos (ganhos) em relação a sua riqueza. Para esse tipo de investidor, a ideia de alocar sua riqueza em função de uma perda potencial máxima, com um determinado nível de confiança e horizonte de tempo ao invés de suposições sobre suas preferências, grau de aversão ao risco e função utilidade, torna-se uma alternativa mais intuitiva. Campbell, Huisman e Koedijk (2001) partem do modelo de segurança em primeiro lugar definido por Arzac e Bawa (1977) e aplicam o conceito de VaR como risco de perda. Dessa forma os autores definem um modelo que utiliza uma ferramenta comum no mercado financeiro e incorpora a possível não-normalidade dos retornos para chegar ao valor da carteira ótima que atende a expectativa de perda aceitável do investidor.

A seguir é apresentado a forma como são montadas as carteiras com restrição de VaR de acordo com a definição de Campbell, Huisman e Koedijk (2001).

### Modelo de seleção da carteira e restrição do risco de perda

Seja  $W(0)$ , a riqueza de um investidor no momento  $t = 0$ , desejamos investi-la por um horizonte de tempo  $T$  de forma que a carteira em questão respeite um determinado limite de VaR estabelecido pelo investidor. Tal investimento poderá ser feito com alavancagem de forma a tomarmos emprestado ou emprestarmos um valor  $B$  a taxa livre de risco pelo período  $T$  ( $B > 0$ , tomamos um empréstimo ou  $B < 0$ , cedemos um empréstimo).

Dado um conjunto de  $N$  ativos que podem fazer parte da carteira,  $\gamma(i)$  representa a proporção (ou peso) investida num determinado ativo de risco, sendo que  $\sum_{i=1}^N \gamma(i) = 1$ , e  $P(i, t)$  é o preço do ativo  $i$  na data  $t$ . A forma como se relacionam o valor inicial da carteira considerando a riqueza inicial, o valor do empréstimo (tomado ou cedido) e a carteira de ativos, são descrito na Eq. (2.4-1).

$$W(0) + B = \sum_{i=1}^N \gamma(i)P(i, t) \quad (2.4 - 1)$$

O investidor precisa definir a proporção  $\gamma(i)$  do quanto deve alocar em cada ativo de risco referente a riqueza  $W(0)$  e o valor do empréstimo  $B$  (tomando ou cedido) no momento inicial  $t = 0$ . Essas definições devem levar em consideração se o resultado esperado do investimento  $W(T, p)$  (riqueza no momento final  $T$  dado uma carteira  $p$ ), será atingido. Ao definirmos o nível aceitável de VaR por parte do investidor como:  $VaR^*$ , é possível definir a restrição de risco de perda como:

$$\Pr\{W(0) - W(T, p) \geq VaR^*\} \leq (1 - c). \quad (2.4 - 2)$$

$\Pr$  é a probabilidade esperada condicionada a informação disponível no momento inicial  $t = 0$  para a carteira  $p$ , sendo assim, podemos reescrever a Eq. (2.4-2) de acordo com a Eq(2.4-3).

$$\Pr\{W(T, p) \leq W(0) - VaR^*\} \leq (1 - c) \quad (2.4 - 3)$$

Sendo o VaR a pior perda de um investimento no horizonte T, que pode ser expresso com o nível de confiança  $c$ , a carteira selecionada de acordo com a restrição descrita na Eq. (2.4-3) reflete o nível de aversão ao risco do investidor e pode ser expresso pelo valor do  $VaR^*$  e do nível de confiança definido por ele (ex: 95%, 99% etc.).

### Definição da carteira ótima

A restrição de VaR adicionada pela Eq.(2.4-3) nos dá uma restrição de risco de perda e está em acordo com o modelo proposto por Arzac e Bawa (1977). Dado que o investidor deseja maximizar o resultado do investimento ao final do horizonte T, e seja  $r(p)$  o valor esperado do retorno da carteira  $p$  ao final desse horizonte, formada por ativos na proporção  $\gamma(i, p)$ , o valor esperado do retorno da carteira é dado por:

$$E_0(W(T, p)) = [W(0) + B][1 + r(p)] - B(1 + r_f). \quad (2.4 - 4)$$

Substituindo  $B$  e a restrição de risco descrita na Eq.(2.4-3), o retorno total do investimento é maximizado para um investidor interessado numa perda máxima através da maximização da função  $S(p)$  descrita na Eq.(2.4-5). A carteira maximizada é definida por  $p'$  e  $q(c, p)$  define o quantil correspondente a probabilidade de ocorrência  $(1 - c)$  de perda aceitável pelo investidor. O valor de  $q(c, p)$  pode ser obtido a partir da função densidade distribuição acumulada do retorno esperado da carteira  $p$ .

$$p': \max_p S(p) = \frac{r(p) - r_f}{W(0)r_f - W(0)q(c, p)} \quad (2.4 - 5)$$

Mesmo que o investimento inicial  $W(0)$  faça parte do denominador de  $S(p)$ , ele não afeta a escolha da carteira ótima, pois trata-se apenas de uma constante definida no momento inicial  $t = 0$  e utilizada no processo de maximização. Dessa forma,

Campbell, Huisman e Koedijk (2001) definem que o processo de alocação não depende do valor do investimento inicial.

$S(p)$  é a razão do prêmio de risco  $r(p) - r_f$  da carteira  $p$ , pela perda máxima esperada da carteira com uma probabilidade  $(1 - c)$ . Analisando o denominador de  $S(p)$ , e dado que o valor negativo referente ao quantil da distribuição dos retornos multiplicado pelo valor do investimento inicial no horizonte  $T$ , é o VaR associado a carteira para um determinado nível de confiança  $c$ , podemos definir uma função  $\varphi$  para representar o risco assumido pelo investidor. Sendo assim, o denominador da Eq.(2.4-5) pode ser definido de acordo com a Eq.(2.4-6).

$$\varphi(c, p) = W(0)r_f - VaR(c, p). \quad (2.4 - 6)$$

Tal medida está em acordo com o comportamento do investidor em relação a manter a taxa livre de risco como uma medida de referência para o retorno da carteira e o risco sendo mensurado em função da perda potencial máxima expressa pelo VaR. Para o cálculo do VaR podemos empregar os modelos descritos na Seção 2.3 para o cálculo do risco  $\varphi(c, p)$ . Enquanto o VaR Histórico nos permite trabalhar com a distribuição de probabilidade real dos dados, os modelos paramétricos adicionam premissas como a normalidade sobre a distribuição de probabilidade. Substituindo a Eq. (2.4-6) na Eq. (2.4-5), temos a forma final da carteira ótima  $p'$  dada pela maximização descrita na Eq. (2.4-7).

$$p': \max_p S(p) = \frac{r(p) - r_f}{\varphi(c, p)}. \quad (2.4 - 7)$$

Onde:

$p$  : é a variável de decisão e representa a carteira formada por um vetor de pesos associados ao ativos que a compõe;

$r(p)$  : é o retorno da carteira  $p$ ;

$r_f$  : é o retorno do ativo livre de risco;

$\varphi(c, p)$ : é o risco associado a carteira  $p$  que incorpora o VaR para um nível de confiança  $c$ .

$S(p)$  é um índice de desempenho parecido com o índice de Sharpe pois descreve a relação do prêmio pelo risco para cada unidade de risco  $\varphi$ . Essa característica de  $S(p)$  torna possível sua utilização para avaliação de eficiência de uma carteira. Como pode ser visto na Eq.(2.4-8), ao substituirmos as Eq.(2.4-6) e Eq.(2.3-8) (com uma pequena variação pois vamos trabalhar com o VaR relativo a média ao invés do absoluto) na Eq.(2.4-7) assumimos que o retorno dos ativos de risco ( $r(p)$ ) possui distribuição normal e utilizamos o VaR paramétrico normal para o cálculo do risco  $\varphi$ . Dessa forma o valor de  $\varphi$  será um múltiplo do desvio padrão  $\sigma_p$  de  $r(p)$ , e  $S(p)$  converge para um múltiplo do índice de Sharpe.

$$p': \max_p S(p) = \frac{r(p) - r_f}{W(0)r_f - \Phi^{-1}(1 - c)\sigma_p\sqrt{T}} \quad (2.4 - 8)$$

Campbell, Huisman e Koedijk (2001) demonstram que a carteira ótima que maximiza  $S(p)$  é definida independentemente do nível inicial do investimento ( $W(0)$ ) e do VaR aceitável ( $VaR^*$ ). A medida de risco  $\varphi$  depende do VaR estimado para uma carteira  $p$  ( $VaR(c, p)$ ) que não necessariamente é igual ao VaR aceito pelo investidor ( $VaR^*$ ). O ajuste entre o VaR aceitável ( $VaR^*$ ) e o VaR da carteira ótima ( $VaR(c, p')$ ) é feito através do nível de empréstimo  $B$  (tomado ou cedido), e o grau de aversão ao risco do investidor é considerado na otimização através do nível de confiança do VaR escolhido. A Eq. (2.4-9) apresenta como é calculado o valor o nível de empréstimo  $B$ .

$$B = \frac{W(0)[VaR^* - VaR(c, p')]}{\varphi'(c, p')}. \quad (2.4 - 9)$$

Conforme visto, a carteira ótima foi definida sem considerarmos premissas sobre a distribuição dos retornos, e foi selecionada somente na premissa que os investidores desejam maximizar o retorno do investimento inicial de acordo com a restrição de risco de perdas descrito pelo VaR.

### 3. DESCRIÇÃO DOS DADOS

Para análise do modelo proposto foram utilizadas as séries históricas dos ativos IGC e IRF-M, representando os ativos de risco referentes a ações negociadas em bolsa e renda fixa. Como aproximação do ativo livre de risco utilizamos a série histórica da taxa média do CDI. O período considerado para consulta dos dados na base Economatica<sup>15</sup> foi de 24/07/2001 à 30/09/2013.

#### CDI

Os CDIs – Certificados de Depósito Interbancário, são certificados emitidos pelos bancos no mercado brasileiro para captação de recursos excedentes. Os CDIs são negociados através de meio eletrônico e devem ser registrados na CETIP - Câmara de Custódia e Liquidação. A taxa média dos CDIs é calculada e publicada pela CETIP com o nome de Taxa DI-Cetip<sup>16</sup>. Sua apuração é feita com base apenas nas operações realizadas entre instituições de conglomerados financeiros diferentes e com prazo de um dia útil. Dado suas características, a taxa média do CDI é utilizada como referência dos juros de mercado ou custo do dinheiro para um dia.

#### IGC

O IGC - Índice de Ações com Governança Corporativa Diferenciada, é um índice negociado na BM&FBovespa<sup>17</sup> que representa o retorno de uma carteira teórica formada por ações de empresas negociadas no Novo Mercado ou classificadas nos níveis 1 ou 2 de Governança Corporativa. A classificação em relação ao Novo Mercado ou aos níveis de Governança Corporativa tem como objetivo assegurar um nível elevado de transparência e governança por parte das empresas. Para isso as

---

<sup>15</sup> Economatica é uma empresa brasileira fundada em 1986 e especializada em análise de ações e fundos de investimento. Seu principal produto é um sistema com o mesmo nome da empresa e que permite a consulta a uma ampla base de dados financeiros (<http://www.economatica.com.br/PT/>).

<sup>16</sup> A metodologia para apuração da taxa média do CDI para contratos de um dia é descrita em: [http://www.cetip.com.br/astec/di\\_documentos/metodologia1\\_i1.htm](http://www.cetip.com.br/astec/di_documentos/metodologia1_i1.htm).

<sup>17</sup> BM&FBovespa – Bolsa de Valores Mercadorias e Futuros.

empresas devem adotar um conjunto de regras societárias e políticas de divulgação de informações. A principal diferença entre as classificações é que no Novo Mercado as empresas só podem emitir ações ordinárias que dão direito a voto (ON), enquanto que para os níveis de Governança Corporativa as empresas tem o direito de manter um percentual de ações preferenciais (PN) sem direito a voto.

## **IRF-M**

A família de índices IMA, Índice de Mercado Anbima<sup>18</sup>, representa carteiras teóricas formadas por praticamente todos os títulos públicos federais emitidos pelo governo brasileiro. Seu representante mais abrangente é o IMA-G - Índice de Mercado Anbima Geral, porém ele apresenta um problema de correlação positiva com o CDI dado que possui em sua composição títulos pós-fixados que respondem a Taxa SELIC<sup>19</sup>. Para resolver esse problema, optamos pelo índice IRF-M composto apenas por títulos públicos pré-fixados como: Letras do Tesouro Nacional ou LTN (títulos zero cupom) e Notas do Tesouro Nacional – Série F ou NTN-F (são títulos com pagamento de cupons semestrais).

---

<sup>18</sup> Anbima - Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiro e de Capitais.

<sup>19</sup> Taxa SELIC - taxa média ajustada dos financiamentos diários apurados no Sistema Especial de Liquidação e de Custódia (Selic) para títulos federais <<http://www.bcb.gov.br/?SELICCONCEITO>>.

## 4. RESULTADOS EMPÍRICOS

### 4.1 Resumo das estatísticas

Podemos ver algumas características relevantes em relação ao comportamento do mercado brasileiro. A Tabela 1 apresenta um resumo das estatísticas dos dados utilizados. Para o período estudado, o retorno esperado do mercado de ações foi próximo do retorno esperado para o mercado de renda fixa de títulos pré-fixados. Em termos anuais, o mercado de ações apresentou um retorno de 17,95% a.a. (0,066% a.d.), enquanto que o mercado de renda fixa apresentou um retorno de 15,03% a.a. (0,056% a.d.). Em relação ao desvio padrão, medida de dispersão muitas vezes associada ao risco dos ativos, temos uma situação inversa. Enquanto as ações apresentaram em termos anuais um desvio padrão de 25,60%, a renda fixa apresentou apenas 2,07%.

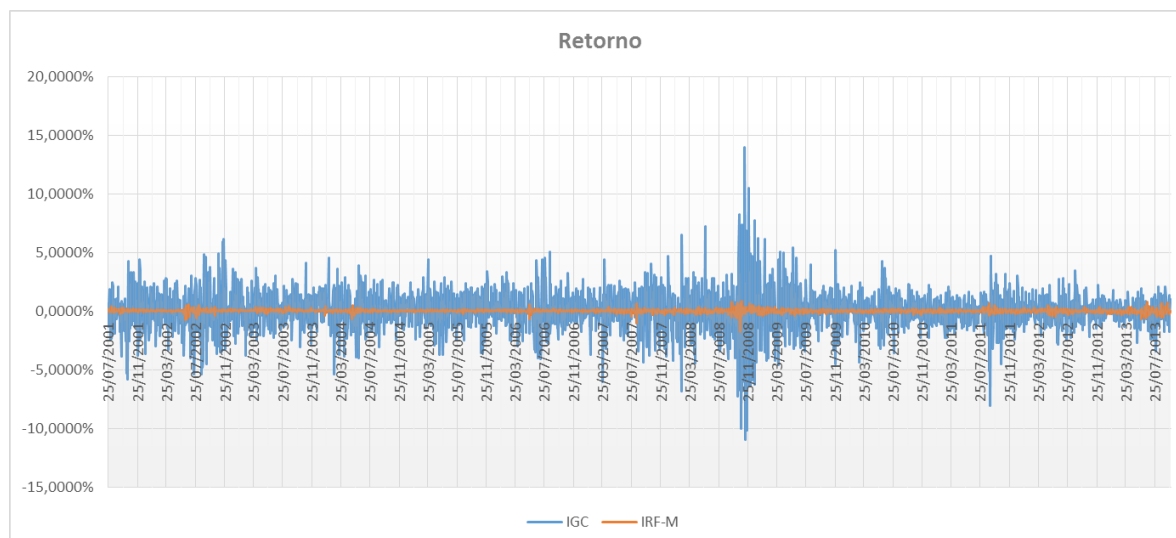
**Tabela 1 – Estatísticas descritivas dos dados**

| <i>Estatística</i>       | <i>Retorno</i> |              |              |
|--------------------------|----------------|--------------|--------------|
|                          | <i>IGC</i>     | <i>IRF-M</i> | <i>CDI</i>   |
| Média                    | 0,0655175%     | 0,0555754%   | 0,0498207%   |
| Erro Padrão              | 0,0286057%     | 0,0023074%   | 0,0003376%   |
| Mediana                  | 0              | 0,0622878%   | 0,0471621%   |
| Moda                     | 0              | 0            | 0            |
| Desvio Padrão            | 1,612862%      | 0,130099%    | 0,019035%    |
| Variância                | 0,000260132    | 1,69259E-06  | 3,62349E-08  |
| Curtose                  | 5,979055695    | 20,40425606  | 0,337523122  |
| Assimetria (skewness)    | -0,045403405   | -1,192636665 | -0,098028922 |
| Range                    | 0,249402312    | 0,026013443  | 0,000927172  |
| Mínimo                   | -10,949028%    | -1,723205%   | 0,000000%    |
| Máximo                   | 13,991203%     | 0,878139%    | 0,092717%    |
| Número de Elementos      | 3.179          | 3.179        | 3.179        |
| Retorno em 30/09/2013    | -1,7134%       | -0,0029%     | 0,0333%      |
| Preço/Taxa em 30/09/2013 | 7.754          | 6.359,75     | 0,0331%      |

Fonte: Tabela elaborada pelo autor, dados: Economatica.

Esse comportamento é mantido, mesmo em face ao aumento da volatilidade da renda fixa, e diminuição da volatilidade das ações no período final da série utilizada (a partir de junho de 2013) conforme podemos ver na Figura 9.

**Figura 9 – Série dos log retornos do IGC e do IRF-M**



Fonte: Gráfico elaborado pelo autor, dados: Economatica.

Para o CDI<sup>20</sup> temos retorno de 0,05% a.d. ou 13,38% a.a., sendo que na data de 30/09/2013 utilizada como referência nos cálculos a seguir o valor da taxa era de 0,03% a.d. ou 8,71% a.a. Um resumo dos valores diários e anuais são apresentados na Tabela 2.

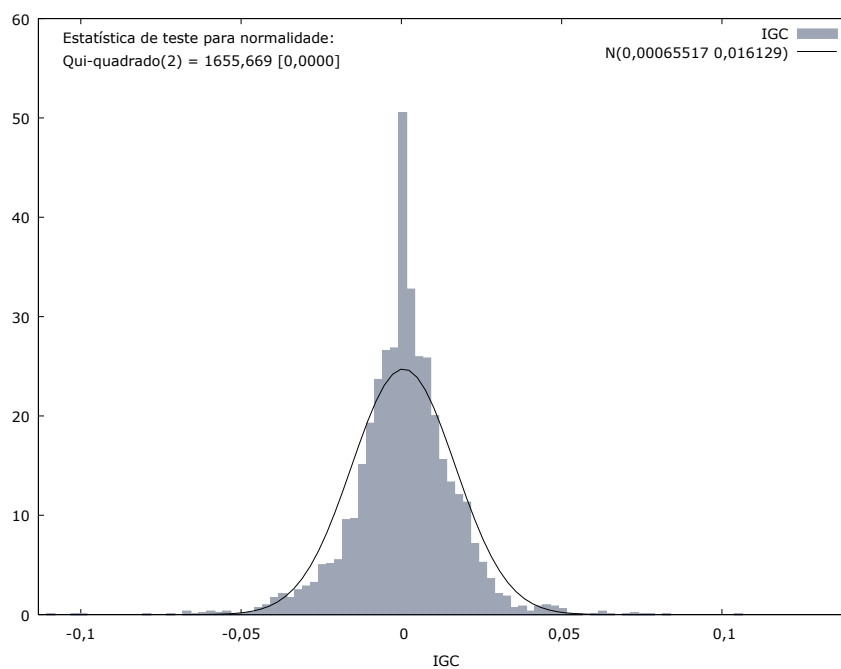
**Tabela 2 – Resumo dos valores diários e anuais**

|                    | Valores Diários |        |        | Valores Anuais |        |        |
|--------------------|-----------------|--------|--------|----------------|--------|--------|
|                    | IGC             | IRF-M  | CDI    | IGC            | IRF-M  | CDI    |
| Retorno Médio      | 0,066%          | 0,056% | 0,050% | 17,95%         | 15,03% | 13,38% |
| Desvio Padrão      | 1,613%          | 0,130% | 0,019% | 25,60%         | 2,07%  | 0,30%  |
| Taxa em 30/09/2013 |                 |        | 0,033% |                |        | 8,71%  |

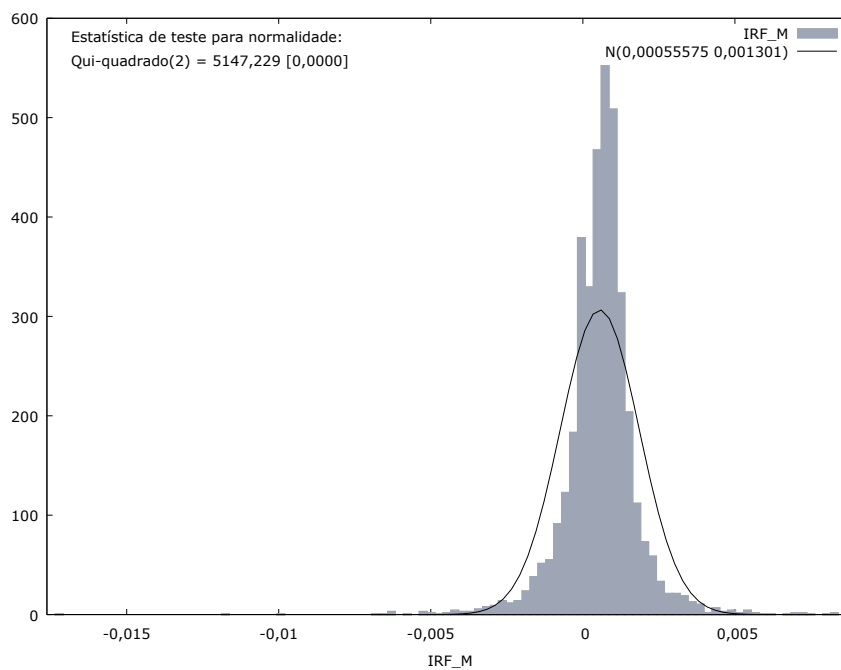
Fonte: Tabela elaborada pelo autor, dados: Economatica.

Outro ponto relevante para a análise do trabalho, são as características das distribuições dos em relação a normalidade. Tanto na Figura 10 quanto na Figura 11, podemos ver a existência de eventos negativos nos retornos dos ativos nas caudas das distribuições. Ambos os resultados estão de acordo com os valores encontrados nas estatísticas da Tabela 1 indicando assimetria e excesso de curtose.

<sup>20</sup> Como o CDI será como ativo livre de risco, para o desenvolvimento do estudo vamos considerar que a variância e o desvio padrão são iguais a zero.

**Figura 10 – Distribuição de frequência da amostra do IGC**

Fonte: Gráfico elaborado pelo autor, dados: Economatica.

**Figura 11 – Distribuição de frequência da amostra do IRF-M**

Fonte: Gráfico elaborado pelo autor, dados: Economatica.

## 4.2 Aplicação do modelo com restrição de VaR ao mercado brasileiro

Para a construção das fronteiras eficientes, variamos os pesos  $\gamma(i)$  de cada um dos ativos de risco (IGC e IRF-M) e calculamos os respectivos valores do retorno esperado da carteira  $r(p)$  e do risco  $\varphi(c, p)$  associado. Os intervalos considerados para variação dos pesos foram entre 9% e 0% para o IGC e 91% e 100% para o IRF-M. Consideramos também que carteiras não possuem posições vendidas, ou seja, utilizamos pesos positivos para os ativos e a soma dos pesos foi sempre igual a 1. Como parâmetros para o cálculo do VaR consideramos um investidor com aversão ao risco que possui uma riqueza inicial de R\$ 1.000,00 e que aceita um VaR com nível de confiança de 95%<sup>21</sup>.

**Tabela 3 – Exemplo do cálculo dos pontos das fronteiras eficientes**

| Pesos |         | Fronteira Eficiente |                |                 |
|-------|---------|---------------------|----------------|-----------------|
| IGC   | IRF-M   | $r(p)$              | $VaR_{Hist}$   | $\varphi(c, p)$ |
| 9,00% | 91,00%  | 0,00056470150       | -2,67842160912 | 3,00982478462   |
| 8,50% | 91,50%  | 0,00056420439       | -2,56204046519 | 2,89344364069   |
| 8,00% | 92,00%  | 0,00056370729       | -2,50039480074 | 2,83179797625   |
| ...   | ...     | ...                 | ...            | ...             |
| 0,10% | 99,90%  | 0,00055585302       | -1,34963563784 | 1,68103881335   |
| 0,05% | 99,95%  | 0,00055580331       | -1,35021849949 | 1,68162167500   |
| 0,00% | 100,00% | 0,00055575360       | -1,34576005269 | 1,67716322820   |

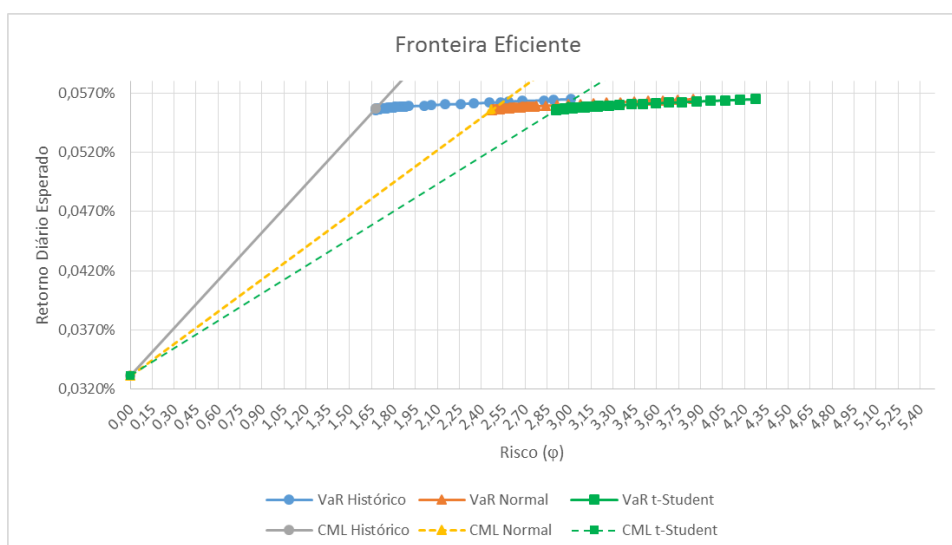
Fonte: Tabela elaborada pelo autor.

A Tabela 3 apresenta um exemplo da construção da fronteira eficiente onde foi utilizado o VaR Histórico para o cálculo da medida de risco  $\varphi(c, p)$ <sup>22</sup>. Na Figura 12 podemos ver as fronteiras eficientes para diferentes formas de cálculo do VaR (Simulação Histórica, VaR Normal e VaR *t-Student*). Dado as características dos ativos de risco apresentados na seção 4.1 e a aversão ao risco, as fronteiras apresentam regiões muito estreitas em relação aos retornos esperados e ao risco associados às carteiras.

<sup>21</sup> O nível de confiança de 95% foi escolhido em virtude de ser um valor utilizado como exemplo em grande parte das referências utilizadas no desenvolvimento desse trabalho.

<sup>22</sup> Vale ressaltar que por estarmos trabalhando com dois ativos para a criação das carteiras foi possível trabalharmos apenas com a variação dos pesos.

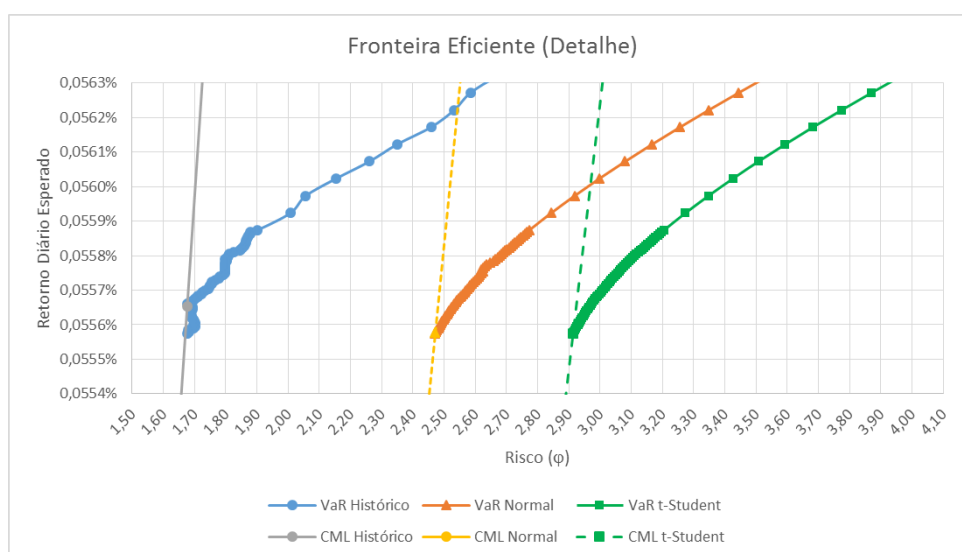
**Figura 12 – Fronteiras Eficientes com restrição de VaR**



Fonte: Gráfico elaborado pelo autor, dados: Economatica.

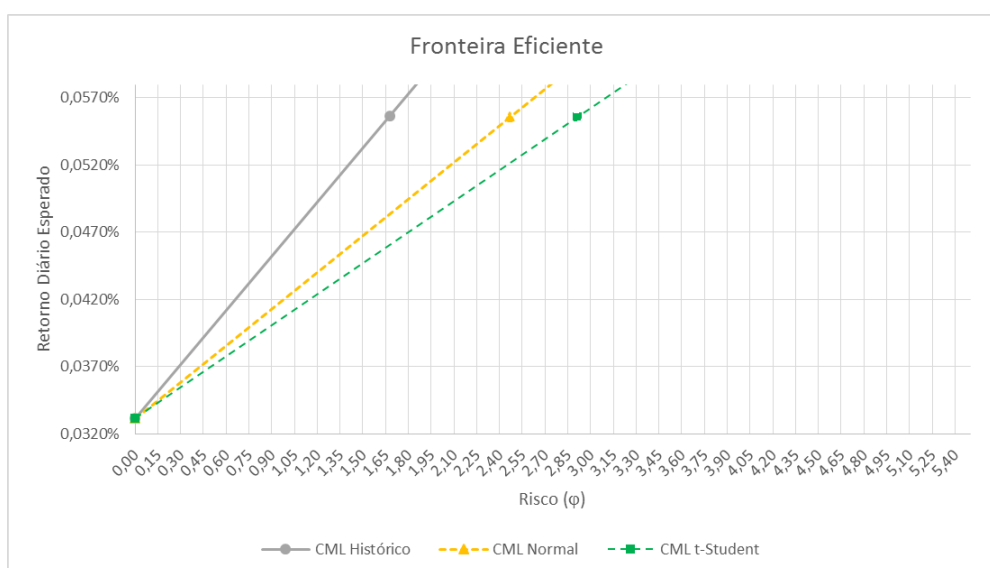
É importante frisar que diferentemente do modelo de média variância, o risco descrito acima está expresso em valores financeiros conforme a definição de  $\varphi(c, p)$  descrito na Eq. (2.4-6) ao invés do desvio padrão  $\sigma$ . Para uma melhor visualização, a Figura 13 apresenta uma ampliação da região da fronteira eficiente que nos permite ver a relação entre risco e retorno e a Figura 14 apresenta apenas as linhas da CML para os diferentes tipos de VaR empregados nas restrições das otimizações.

**Figura 13 – Destaque das Fronteiras Eficientes com restrição de VaR**



Fonte: Gráfico elaborado pelo autor, dados: Economatica.

**Figura 14 – Destaque das CMLs para diferentes tipos de VaR**

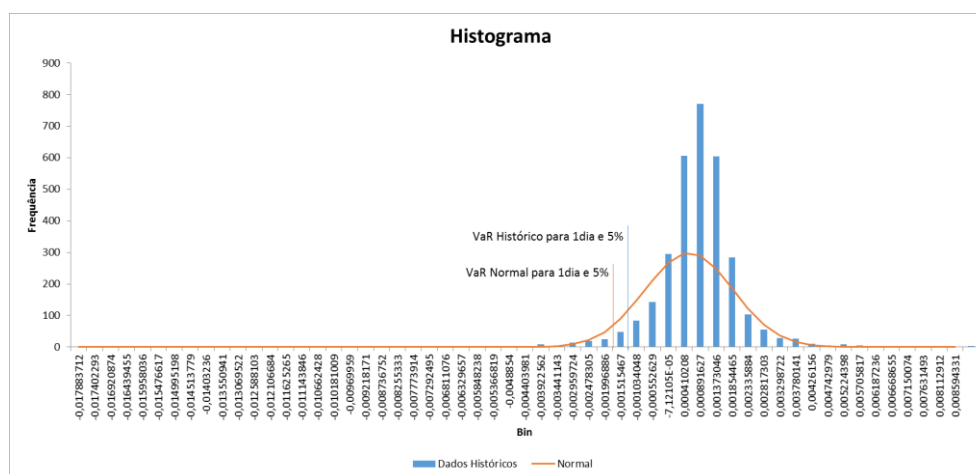


Fonte: Gráfico elaborado pelo autor, dados: Economática.

Uma característica das fronteiras que nos chama a atenção para os dados do mercado brasileiro é o valor do risco para um mesmo nível de retorno levando-se em consideração o tipo de VaR empregado para o cálculo. Conforme discutido na Seção 2.3, o VaR Normal subestima o risco da carteira para valores mais elevados no nível de confiança (ex: 95%) quando comparado com o VaR *t-Student*. Isso pode ser visto nas respectivas curvas na Figura 13, onde o risco calculado com o modelo VaR Normal apresenta valores menores que o risco calculado com VaR *t-Student* para um mesmo valor de retorno esperado.

Em relação ao valor do risco calculado com o VaR Histórico, mesmo considerando os eventos extremos da distribuição empírica dos dados, temos valores de risco inferiores aos outros dois modelos de VaR para um mesmo nível de retorno esperado. A explicação para essa situação está na distribuição dos retornos da carteira utilizados cálculo do VaR Histórico. Podemos ver na Figura 15 que para o nível de significância de 5%, a curva da distribuição normal está acima da curva da distribuição dos dados históricos, portanto, os valores de risco para o VaR Normal e *t-Student* estão superestimados em relação ao VaR Histórico.

**Figura 15 – Comparação do VaR Histórico e do VaR Paramétrico Normal**



Fonte: Gráfico elaborado pelo autor, dados: Economatica.

Para a obtenção do ponto ótimo de alocação, é preciso encontrar o valor de referência do VaR ou o valor aceitável de perda pelo investidor ( $VaR^*$ ) descrito na Eq(2.4-3). Aqui vemos um primeiro ponto importante e diferente do modelo com restrição de VaR em relação ao de média variância. Ao invés de fazermos suposições a respeito da função utilidade que descreve as preferências do investidor em relação a risco e retorno, precisamos apenas que o investidor indique qual o nível de confiança e o horizonte de investimento para calcularmos o VaR. Dessa forma chegamos a um valor máximo de perda aceitável em relação a sua riqueza inicial ao final do período de investimento T. Podemos ver que a referência do risco passa a ser um valor financeiro, algo mais tangível e próximo da realidade da maioria dos investidores.

A Tabela 4 apresenta o VaR Histórico para um investidor com uma riqueza inicial de R\$ 1.000,00 e diferentes níveis de confiança para um horizonte de investimento de uma dia. Conforme descrito na Seção 2.3, com o aumento do nível de confiança utilizado para o cálculo do VaR maior a perda potencial máxima esperada para o investimento. Mais uma vez, para os dados utilizados na análise, é possível notar a dominância dos títulos de renda fixa em relação as ações para o mercado brasileiro. Mesmo para níveis de confiança mais elevados (ex: 99%), existe uma grande concentração de renda fixa na carteira ótima.

**Tabela 4 – Carteira ótima com restrição de VaR Histórico**

| Nível de Confiança | Ações (%) | Renda Fixa (%) | VaR da Carteira (\$) |
|--------------------|-----------|----------------|----------------------|
| <i>Diário</i>      |           |                |                      |
| 95                 | 0,7745%   | 99,2255%       | -1,34                |
| 96                 | 1,1910%   | 98,8090%       | -1,60                |
| 97                 | 1,9297%   | 98,0703%       | -1,99                |
| 98                 | 4,0681%   | 95,9319%       | -2,90                |
| 99                 | 7,1892%   | 92,8108%       | -4,70                |

Fonte: Tabela elaborada pelo autor, dados: Economatica.

Uma vez definido o valor da perda máxima aceitável por um investidor, um gestor pode trabalhar com a informação utilizando níveis de confiança maiores, mudando assim os percentuais de alocação em ações e renda fixa, e compensando o aumento do risco através do nível de empréstimo B (tomado ou cedido) do ativo livre de risco. Essa parcela foi definida na Seção 2.4, e nas tabelas: Tabela 5 e Tabela 6 foi identificada como “Dinheiro (% B)”. Como referência para os cálculos do exemplo numérico onde o gestor trabalha com níveis superiores aos definidos como aceitáveis pelo investidos, assumimos um nível de confiança de 95%, um horizonte de investimento de um dia e um valor de R\$ 1.000,00 como riqueza inicial. A taxa média do CDI utilizada como ativo livre de risco para o período é de 8,71% a.a. ou 0,0331% a.d. (taxa DI-Cetip apurada na data de 30/09/2013).

Ao fazermos a otimização descrita na Eq.(2.4-7) e calcularmos o percentual investido no ativo livre de risco (coluna Dinheiro (% B)), podemos ver na Tabela 5 o quão sensível é a alocação dos ativos em relação a variações no nível de confiança. Para o nível de confiança de 95%, temos 0,7745% investidos em ações, 99,2255% em renda fixa e 0% no ativo livre de risco. Isso se deve ao fato do  $VaR^*$  definido pelo investidor ser igual ao VaR desejado pelo gestor para um nível de confiança de 95%. Ao aumentarmos o valor o nível de confiança para atender uma possível estratégia de investimento de um gestor, vemos que a parcela referente ao ativo livre de risco também aumenta para garantir o valor aceitável de perda estipulada pelo investidor. Como exemplo desse efeito, a carteira que atende ao VaR de 99% definido por um gestor, mantendo o  $VaR^*$  de 95% aceitável pelo investidor, seria composta por 4,0475% em ações, 52,2515% em renda fixa e 43,7010% tomado em empréstimo a taxa livre de risco.

Podemos ver que esse é um dos pontos fortes do modelo proposto por Campbell, Huisman e Koedijk (2001). O investidor pode definir qual a sua perda máxima aceitável através da escolha do nível de confiança a ser empregado no VaR, e um gestor poder trabalhar com um nível de confiança diferente (possivelmente alinhado a alguma política de risco ou regulamentação) e ainda assim respeitar a restrição de perda imposta pelo investidor.

**Tabela 5 – Carteira ótima com restrição de VaR Histórico para diferentes níveis de confiança**

| Nível de Confiança | VaR Histórico |                |               |
|--------------------|---------------|----------------|---------------|
|                    | Ações (%)     | Renda Fixa (%) | Dinheiro(% B) |
| <i>Diário</i>      |               |                |               |
| 95                 | 0,7745%       | 99,2255%       | 0,0000%       |
| 96                 | 1,1000%       | 91,4173%       | 7,4827%       |
| 97                 | 1,6180%       | 82,2327%       | 16,1493%      |
| 98                 | 2,9627%       | 67,3485%       | 29,6888%      |
| 99                 | 4,0475%       | 52,2515%       | 43,7010%      |

Fonte: Tabela elaborada pelo autor, dados: Economatica.

As alocações indicadas na Tabela 5 foram calculadas através do VaR Histórico dos ativos utilizados, incorporando assim a não normalidade descrita anteriormente. Essa característica é um segundo ponto importante do modelo com restrição de VaR. Não foi preciso nenhuma suposição sobre o comportamento dos ativos na carteira, o que nos leva a resultados mais próximos da realidade.

A Tabela 6 apresenta os resultados do modelo com restrição de VaR assumindo que os dados possuem distribuição Normal ou *t-Student* (para a realização dos cálculos, utilizamos as Eq. (2.3-9) e (2.3-13) apresentadas na Seção 2.3). Podemos ver o efeito de alocarmos mais no ativo livre de risco à medida que aumentamos o nível de confiança, se mantém para ambos os tipos de distribuição.

**Tabela 6 – Carteira ótima com restrição de VaR Paramétrico Normal e *t-Student* para diferentes níveis de confiança**

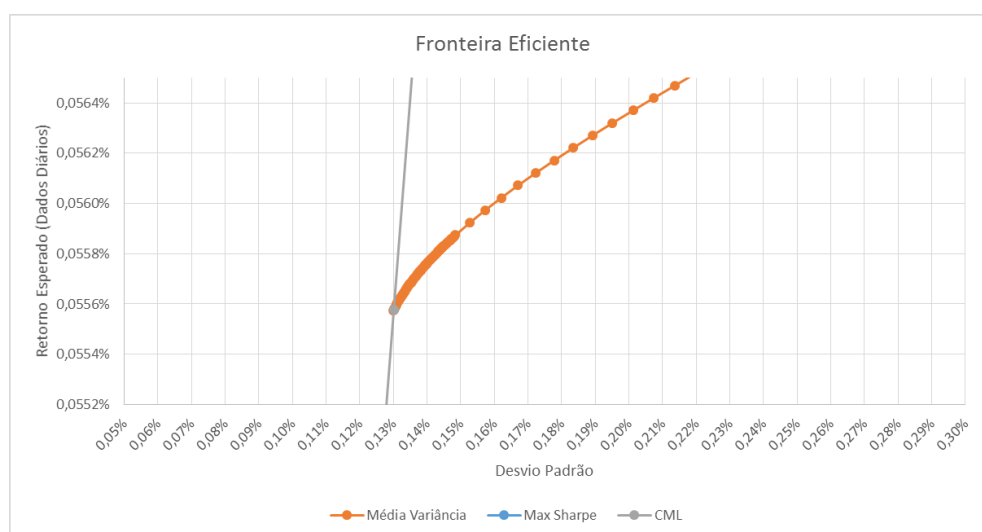
| Nível de Confiança | VaR Normal    |                |               | VaR t-Student |                |               |
|--------------------|---------------|----------------|---------------|---------------|----------------|---------------|
|                    | Ações (%)     | Renda Fixa (%) | Dinheiro(% B) | Ações (%)     | Renda Fixa (%) | Dinheiro(% B) |
| <i>Diário</i>      | <i>Diário</i> |                |               | <i>Diário</i> |                |               |
| 95                 | 0,0000%       | 100,0000%      | 0,0000%       | 0,0000%       | 100,0000%      | 0,0000%       |
| 96                 | 0,0000%       | 97,1444%       | 2,8556%       | 0,0000%       | 96,6974%       | 3,3026%       |
| 97                 | 0,0000%       | 93,9543%       | 6,0457%       | 0,0000%       | 92,7734%       | 7,2266%       |
| 98                 | 0,0000%       | 90,1717%       | 9,8283%       | 0,0000%       | 87,7511%       | 12,2489%      |
| 99                 | 0,0000%       | 85,0541%       | 14,9459%      | 0,0000%       | 80,1908%       | 19,8092%      |

Fonte: Tabela elaborada pelo autor, dados: Economatica.

Esse efeito é descrito por Campbell, Huisman e Koedijk (2001) como resultado do VaR para horizontes de tempo mais curtos (como os dados diários utilizados) em incorporar o risco de perda das caudas da distribuição na relação de risco x retorno. Como o VaR definido pelo gestor para níveis de confiança mais elevados é maior, uma porção maior da carteira deverá ser investida no ativo livre de risco para compensar o risco e garantir o valor do  $VaR^*$  definido pelo investidor como a perda máxima aceitável.

Para efeito de comparação podemos ver na Figura 16 a fronteira eficiente para o modelo de média variância. Assim como no modelo com restrição de VaR a forma estreita da curva em relação ao retorno (intervalo entre 0,0556% a.d. e 0,5570% a.d.) se mantém e a alocação em títulos de renda fixa continua dominando em relação às ações.

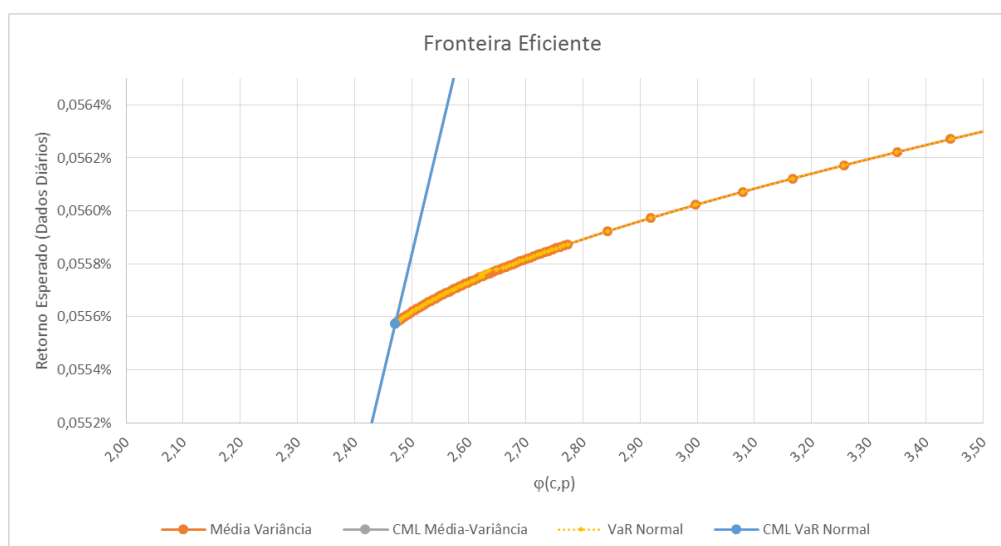
**Figura 16 – Fronteira Eficiente para o modelo de média-variância**



Fonte: Gráfico elaborado pelo autor, dados: Economatica.

Na Figura 17 apresentamos uma comparação das fronteiras eficientes obtidas através do modelo de média-variância e do modelo com restrição de VaR utilizando o VaR Normal com nível de confiança de 95%. Podemos ver que existe uma sobreposição de todos os pontos nas curvas obtidas pelos diferentes modelos. Isso confirma a afirmação descrita por Campbell, Huisman e Koedijk (2001) que ao utilizarmos o modelo com restrição de VaR considerando o VaR Normal, o valor do risco  $\varphi(c,p)$  é um múltiplo do desvio padrão  $\sigma$  definido no modelo de Média-Variância. A curva definida como VaR Normal foi construída da mesma forma que a fronteira VaR Normal apresentada na Figura 13. Já a curva definida como Média-Variância foi construída variando-se os percentuais dos ativos IGC e IRF-M para formar as carteiras e calculando-se o respectivo valor de  $\varphi(c,p)$  a partir do desvio padrão  $\sigma_p$  e utilizando-se o VaR Normal com o nível de confiança de 95%. Na Tabela 7 temos um exemplo de como foram calculados os pontos da curva Média-Variância.

**Figura 17 – Comparação das Fronteiras Eficientes do modelo de média-variância e do modelo de restrição com VaR Normal**



Fonte: Gráfico elaborado pelo autor, dados: Economatica.

**Tabela 7 – Exemplo de como foram calculados os pontos da curva Média-Variância da Figura 17**

| % de IGC na Carteira i | % de IRF-M na Carteira i | Retorno da Carteira i | Desvio padrão da Carteira i | VaR <sub>Normal</sub> (c,p)         | $\varphi(c,p)$                |
|------------------------|--------------------------|-----------------------|-----------------------------|-------------------------------------|-------------------------------|
| $\gamma_{IGC,i}$       | $1 - \gamma_{IGC,i}$     | $\bar{R}_{p,i}$       | $\sigma_{p,i}$              | $\Phi^{-1}(1 - \alpha)\sigma_{p,i}$ | $W(0)r_f - VaR_{Normal}(c,p)$ |

Fonte: Tabela elaborada pelo autor.

## 5. CONCLUSÃO

Esse estudo apresentou a aplicação do modelo de otimização com restrição de VaR definido por Campbell, Houisman e Koedijk (2001) para o mercado brasileiro. Verificamos que o comportamento dos resultados obtidos para o mercado brasileiro foram similares aos descritos no estudo original. As características próprias do mercado brasileiro fizeram com que as fronteiras eficientes apresentassem regiões muito estreitas em relação aos retornos esperados e ao risco associado. Além disso, a composição das carteiras foi quase em sua totalidade formada por ativos de renda fixa para todos os modelos de VaR empregados na restrição da otimização. Fazendo um paralelo com o modelo de média-variância, notamos que ambos os modelos possuem estruturas semelhantes para os índices de performance utilizados nas maximizações. Uma importante diferença é que a fronteira eficiente do modelo com restrição de VaR é definida em termos do retorno esperado e do VaR expresso em valores financeiros ao invés de uma medida de dispersão como o desvio padrão. Sendo assim, podemos dizer que o modelo de otimização com restrição de VaR apresenta uma maneira mais intuitiva dos investidores definirem seus parâmetros para alocação dos ativos em suas carteiras e que a aversão ao risco é expressa pelos investidores através do nível de confiança associado ao VaR.

Para evolução do trabalho podemos indicar dois caminhos alternativos. Um primeiro em relação aos dados, com a aplicação do modelo para carteiras com ativos com maior volume de negociação ou ativos indicados por corretoras. E segundo em relação ao modelo de risco utilizado na otimização, com a aplicação de modelos que permitem explorar melhor os eventos extremos das distribuições das séries dos ativos e avaliar melhor a sensibilidade do investidor em relação a perda máxima aceitável como por exemplo: CVaR – Conditional VaR ou testes de estresse.

## REFERÊNCIAS

ALEXANDER, Carol. **Market risk analysis, v.1: Quantitative methods in finance.** – Chichester: John Wiley, 2008.

ALEXANDER, Carol. **Market risk analysis, v.4: Value at risk models.** – West Sussex: John Wiley & Sons, Ltd, 2008.

ARZAC, Henrique R. BAWA, Vijay S. **Portfolio choice and equilibrium in capital markets with safety-first investors.** – Journal of Financial Economics Vol. 4. No. 3, p. 277-288, 1977.

CAMPBELL, Rachel; HUISMAN, Ronald e KOEDIJK, Kess. **Optimal portfolio selection in a Value-at-Risk framework.** – Journal of Banking & Finance Vol. 25, p. 1789-1804, 2001.

DAMODARAM, Aswath. **What is the riskfree rate? A Search for the Basic Building Block.** – Stern School of Business, New York University, New York, 2008. Disponível em: <<http://ssrn.com/abstract=1317436>>. Acesso em 06/01/2014.

ELTON, Edwin J.; SANVICENTE, Antônio Zoratto ((trad.)). **Moderna teoria de carteiras e análise de investimentos.** – São Paulo: Atlas, 2004.

JORION, Philippe. **Value at Risk: a nova fonte de referência para a gestão do risco financeiro;** tradução Thierry Barbe. – 2. ed. rev. e ampl. – São Paulo: Bolsa de Mercadorias & Futuros, 2003.

LEIBOWITZ, Martin L. **Portfolio Optimization with Shortfall Constraints: A Confidence-Limit Approach to Managing Downside Risk.** – Financial Analysts Journal, Vol. 45. No. 2, p. 34-41, 1989.

MARKOWITZ, Harry. **Portfolio selection.** – The Journal of Finance Vol. 7. No. 1, p. 77-91, 1952.

MARKOWITZ, Harry. **Portfolio selection: Efficient Diversification of Investments.** – New York: John Wiley & Sons, Inc., 1959.

MOSSIN, Jan. **Equilibrium in a Capital Asset Market.** – Econometrica, Vol. 34. No. 4, Pages 768-783, 1966.

ROY, A. D. **Safety First and the Holding of Assets.** – Econometrica, Vol. 20, No. 3, p. 431-449, 1952.

SHARPE, William. **A Theory of market equilibrium under conditions of risk.** – The Journal of Finance Vol. 19. No. 3, Pages 425-442, 1964.

TELSER, Lester G. **Safety First and Hedging.** – The Review of Economic Studies Vol. 23. No. 1, Pages 1-16, 1955-1956.

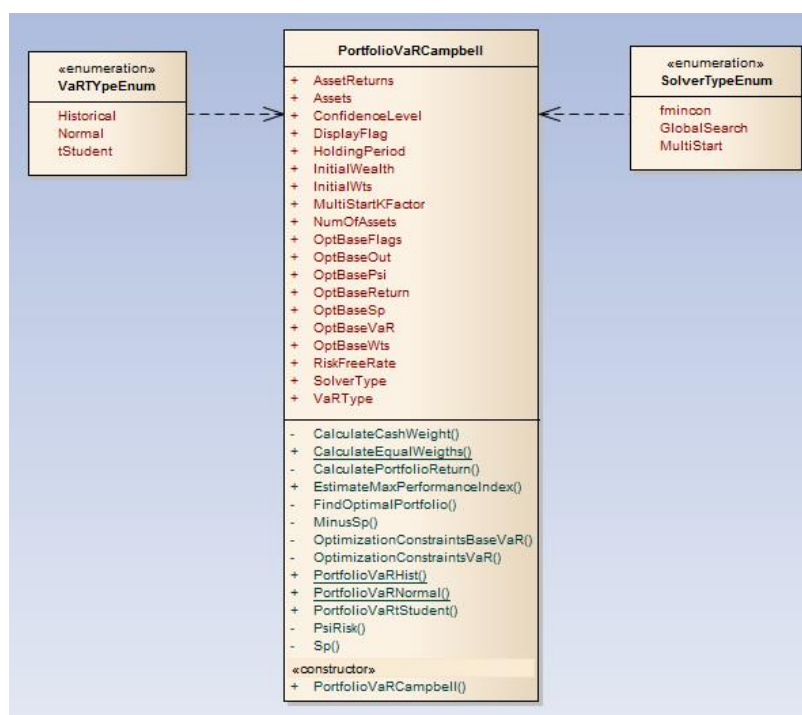
YANG, Won-yong; CHUNG, Tae-Sang; MORRIS, John; CAO, Wenwu. **Applied numerical methods using MATLAB**. – Hoboken, N.J. Wiley, p. 321-370, 2005.

MATLAB Global Optimization Toolbox: User's Guide, R2013b. p. 22-270, 2013.  
Disponível em: <[http://www.mathworks.com/help/pdf\\_doc/gads/gads\\_tb.pdf](http://www.mathworks.com/help/pdf_doc/gads/gads_tb.pdf)>.

## ANEXO

Este anexo apresenta a classe `PortfolioVaRCampbell` desenvolvida no MATLAB<sup>23</sup> para calcular a alocação ótima de uma carteira com restrição de VaR através da maximização do índice de desempenho descrito na Eq. (2.4-7). A ideia foi criar uma classe análoga as classes `Portfolio` e `PortfolioCVaR` presentes do pacote de ferramentas de finanças do MATLAB. Além disso, duas classes adicionais foram criadas para facilitar as configurações do tipo de algoritmo de VaR (Histórico, Normal ou *t-Student*) e o tipo da função de otimização (`fmincon`<sup>24</sup>, `GlobalSearch` ou `MultiStart`<sup>25</sup>) a serem empregados.

**Figura 18 – Digrama da classe `PortfolioVaRCampbell`**



Fonte: Diagrama elaborado pelo autor.

<sup>23</sup> MATLAB: é uma linguagem de programação e também o nome do ambiente de desenvolvimento para computação numérica desenvolvido pela empresa MathWorks.

<sup>24</sup> O funcionamento e os conceitos matemáticos utilizados da função `fmincon` (Find minimum of constrained nonlinear multivariable function) são descritos por Yang (2005).

<sup>25</sup> As funções `GlobalSearch` e `MultiStart` são alternativas a função `fmincon` para o cálculo de soluções ótimas globais. Seu funcionamento e conceitos matemáticos são descritos no guia de usuário disponibilizado pela empresa chamado MATLAB Global Optimization Toolbox (2003).

## PortfolioVaRCampbell.m

```

classdef PortfolioVaRCampbell < handle
    %PORTFOLIOVARCAMPBELL Portfolio Optimization with VaR Restriction
    % Detailed explanation goes here

    %Private properties
    properties (SetAccess = private, GetAccess = private, Hidden = true)
        DEFAULT_CONFIDENCE_LEVEL = 0.95;
        TempCashWeight;
        TempConfidenceLevel;
    end

    %Read-only properties
    properties (SetAccess = private, GetAccess = public)
        NumOfAssets;
        OptBaseReturn;
        OptBasePsi;
        OptBaseSp;
        OptBaseVaR;
        OptBaseWts;
        OptBaseFlags;
        OptBaseOut;
        OptReturn;
        OptPsi;
        OptSp;
        OptVaR;
        OptWts;
        OptFlags;
        OptOut;
        OptCashWeight;
    end

    %Public properties
    properties (SetAccess = public, GetAccess = public)
        Assets;
        AssetReturns;
        InitialWealth;
        VaRType;
        SolverType;
        InitialWts;
        RiskFreeRate;
        ConfidenceLevel;
        HoldingPeriod;
        MultiStartKFactor;
        DisplayFlag;
    end

    methods (Static)

        function [VaR] = PortfolioVaRHist(pReturns, pWts, ...
            pConfidenceLevel, pHoldingPeriod)

            % handle inputs
            if nargin < 3
                pConfidenceLevel = 0.95;
            end

            if nargin < 4
                pHoldingPeriod = 1;
            end

            szReturns = size(pReturns);

            WeightedReturns = ones(szReturns);

            %Multiply each coloum by respective weight
            for i = 1:szReturns(2)

                % Use the index to extract VaR from sorted returns
                WeightedReturns(:,i) = pWts(i) * pReturns(:,i);
            end
        end
    end
end

```

```

end

%Calculate portfolio returns for each element um pReturns array
portfolioReturns = sum(WeightedReturns,2);

% Sort returns from smallest to largest
sorted_returns = sort(portfolioReturns);

% Store the number of returns
num_returns = numel(portfolioReturns);

% Calculate the index of the sorted return that will be VaR
VaR_index = ceil((1 - pConfidenceLevel) * num_returns);

% Use the index to extract VaR from sorted returns
Historical_VaR = sorted_returns(VaR_index);

VaR = Historical_VaR*sqrt(pHoldingPeriod);

end

function [VaR] = PortfolioVaRNormal(pReturns, pWts, ...
    pConfidenceLevel, pHoldingPeriod)

% handle inputs
if nargin < 3
    pConfidenceLevel = 0.95;
end

if nargin < 4
    pHoldingPeriod = 1;
end

szReturns = size(pReturns);

WeightedReturns = ones(szReturns);

%Multiply each coloum by respective weight
for i = 1:szReturns(2)

    % Use the index to extract VaR from sorted returns
    WeightedReturns(:,i) = pWts(i) * pReturns(:,i);

end

%Calculate portfolio returns for each element um pReturns array
portfolioReturns = sum(WeightedReturns,2);

PortRisk = std(portfolioReturns);
RiskThreshold = (1 - pConfidenceLevel); % Risk of loss
VaR = norminv(RiskThreshold)*PortRisk*sqrt(pHoldingPeriod);

end

function [VaR] = PortfolioVaRtStudent(pReturns, pWts, ...
    pConfidenceLevel, pHoldingPeriod)

% handle inputs
if nargin < 3
    pConfidenceLevel = 0.95;
end

if nargin < 4
    pHoldingPeriod = 1;
end

szReturns = size(pReturns);

WeightedReturns = ones(szReturns);

```

```

%Multiply each coloum by respective weight
for i = 1:szReturns(2)

    % Use the index to extract VaR from sorted returns
    WeightedReturns(:,i) = pWts(i) * pReturns(:,i);

end

%Calculate portfolio returns for each element um pReturns array
portfolioReturns = sum(WeightedReturns,2);

PortReturn = mean(portfolioReturns);
PortRisk = std(portfolioReturns);
k = kurtosis(portfolioReturns) - 3;
v = (6 + 4*k)/k;
RiskThreshold = (1 - pConfidenceLevel); % Risk of loss

%VaR t-Student according Carol, Alexander
VaR = (tinv(RiskThreshold, v)*PortRisk*sqrt((v-2)/v)*sqrt(pHoldingPeriod))-
PortReturn;

end

function [Wts] = CalculateEqualWeigths(pNumOfAssets)

if (pNumOfAssets == 1)
    Wts(1) = 1;
else
    %Set the same weigth for all assets
    Wts = ones(1, pNumOfAssets) * (1 / pNumOfAssets);
    %Adjust to be sure that Sum(this.InitialWts) = 1
    Wts(pNumOfAssets) = 1 - sum(Wts(1:(pNumOfAssets - 1)));
end

end

end

methods (Access = private)

function [c, ceq] = OptimizationConstraintsVaR(obj, pWts)

c = [];

ceq = sum(pWts) + obj.TempCashWeight - 1;

end

function [c, ceq] = OptimizationConstraintsBaseVaR(~, pWts)

c = [];

ceq = sum(pWts) - 1;

end

function [OptWts, OptSp, OptFlags, OptOut] = FindOptimalPortfolio(obj, pWts)

wts0 = pWts;
A = [];
B = [];
Aeq = [];
Beq = [];
l = zeros(size(wts0));
u = inf * ones(size(wts0));

%Setup fmincon Options
options=optimset;
optimset('LargeScale', 'on');

```

```

options=optimset(options,'Algorithm','active-set');
options=optimset(options,'TolCon',1.000e-15);
options=optimset(options,'TolFun',1.000e-15);
options=optimset(options,'TolX',1.000e-15);
options=optimset(options,'MaxIter',1.000e5);
options=optimset(options,'MaxFunEvals',1.000e5);
options=optimset(options,'Display','off');

switch (obj.SolverType)
    case SolverTypeEnum.GlobalSearch

        problem = createOptimProblem('fmincon', ...
            'objective', @obj.MinusSp, ...
            'x0', wts0, ...
            'lb', l, ...
            'ub', u, ...
            'Aineq', A, ...
            'bineq', B, ...
            'Aeq', Aeq, ...
            'beq', Beq, ...
            'nonlcon', @obj.OptimizationConstraintsBaseVaR, ...
            'options', options);

        %Setup GlobalSearch Options
        gs = GlobalSearch;
        gs = GlobalSearch(gs, 'BasinRadiusFactor', 1.000e-2);
        gs = GlobalSearch(gs, 'NumTrialPoints', 1.000e4);
        gs = GlobalSearch(gs, 'TolFun', 1.000e-15);
        gs = GlobalSearch(gs, 'TolX', 1.000e-15);
        if (obj.DisplayFlag)
            gs = GlobalSearch(gs, 'Display', 'on');
            gs = GlobalSearch(gs, 'PlotFcns',{@gsplotbestf, @gsplotfunccount});
        else
            gs = GlobalSearch(gs, 'Display', 'off');
        end

        %Execute solver
        [OptWts, OptSp, OptFlags, OptOut] = run(gs,problem);

    case SolverTypeEnum.MultiStart

        problem = createOptimProblem('fmincon', ...
            'objective', @obj.MinusSp, ...
            'x0', wts0, ...
            'lb', l, ...
            'ub', u, ...
            'Aineq', A, ...
            'bineq', B, ...
            'Aeq', Aeq, ...
            'beq', Beq, ...
            'nonlcon', @obj.OptimizationConstraintsBaseVaR, ...
            'options', options);

        %Setup MultiStart Options
        ms = MultiStart;
        ms = MultiStart(ms, 'TolFun', 1.000e-15);
        ms = MultiStart(ms, 'TolX', 1.000e-15);
        ms = MultiStart(ms, 'UseParallel', 'always');
        if (obj.DisplayFlag)
            ms = MultiStart(ms, 'Display', 'on');
        else
            ms = MultiStart(ms, 'Display', 'off');
        end

        %Execute solver
        [OptWts, OptSp, OptFlags, OptOut] = run(ms,problem,
obj.MultiStartKFactor);

    otherwise
        %Execute solver
        %fmincon is the default solver
        [OptWts, OptSp, OptFlags, OptOut] = fmincon(@obj.MinusSp, ...
            wts0, A, B, Aeq, Beq, l, u, ...
            @obj.OptimizationConstraintsBaseVaR, options);

```

```

        end
    end

    function [VaR] = CalculateVaR(obj, pWts)

        switch (obj.VaRType)
            case VaRTypeEnum.Normal
                VaR = obj.InitialWealth *
PortfolioVaRCampbell.PortfolioVaRNormal(obj.AssetReturns, ...
pWts, obj.TempConfidenceLevel, obj.HoldingPeriod);
            case VaRTypeEnum.tStudent
                VaR = obj.InitialWealth *
PortfolioVaRCampbell.PortfolioVaRtStudent(obj.AssetReturns, ...
pWts, obj.TempConfidenceLevel, obj.HoldingPeriod);
            otherwise
                VaR = obj.InitialWealth *
PortfolioVaRCampbell.PortfolioVaRHist(obj.AssetReturns, ...
pWts, obj.TempConfidenceLevel, obj.HoldingPeriod);
        end

    end

    function [rp] = CalculatePortfolioReturn(obj, pWts)

        szReturns = size(obj.AssetReturns);

        PortfolioReturns = ones(szReturns);

        %Apply weigths on each AssetReturn
        for i = 1:szReturns(2)
            PortfolioReturns(:,i) = pWts(i) * obj.AssetReturns(:,i);
        end

        %Mean of returns (sum(PortfolioReturn,2) == soma as linhas e
        %retorna um vetor coluna)
        rp = mean(sum(PortfolioReturns, 2));

    end

    %Como queremos maximizar e FMINCON somente minimiza, precisavamos
    %de uma função que retorno -Sp(...)
    function [MinusPI] = MinusSp(obj, pWts)

        MinusPI = -obj.Sp(pWts);

    end

    function [PerformanceIndex] = Sp(obj, pWts)

        PerformanceIndex = (obj.CalculatePortfolioReturn(pWts) -
obj.RiskFreeRate)/obj.PsiRisk(pWts);

    end

    function [B] = CalculateCashWeight(obj, pWts)

        B = (obj.OptBaseVaR - obj.CalculateVaR(pWts))/obj.PsiRisk(pWts);

    end

    function [psi] = PsiRisk(obj, pWts)

        psi = (obj.InitialWealth * obj.RiskFreeRate) - obj.CalculateVaR(pWts);

    end

end

methods (Access = public)

```

```

%Constructor
function this = PortfolioVaRCampbell(pInitialWealth, pRiskFreeRate, ...
    pAssets, pAssetReturns, pVaRType, pSolverType, ...
    pConfidenceLevel, pHoldingPeriod, pMultiStartKFactor, ...
    pDisplayFlag)

    this.InitialWealth = pInitialWealth;
    this.RiskFreeRate = pRiskFreeRate;
    this.Assets = pAssets;
    this.AssetReturns = pAssetReturns;

    if (nargin < 5)
        this.VaRType = VaRTypeEnum.VaRHist;
    else
        this.VaRType = pVaRType;
    end

    if (nargin < 6)
        this.SolverType = SolverTypeEnum.fmincon;
    else
        this.SolverType = pSolverType;
    end

    if (nargin < 7 || pConfidenceLevel == 0)
        this.ConfidenceLevel = this.DEFAULT_CONFIDENCE_LEVEL;
    else
        this.ConfidenceLevel = pConfidenceLevel;
    end

    if (nargin < 8 || pConfidenceLevel == 0)
        this.HoldingPeriod = 1;
    else
        this.HoldingPeriod = pHoldingPeriod;
    end

    if (nargin < 9)
        this.MultiStartKFactor = 100;
    else
        this.MultiStartKFactor = pMultiStartKFactor;
    end

    if (nargin < 10)
        this.DisplayFlag = false;
    else
        this.DisplayFlag = pDisplayFlag;
    end

    [~, p] = size(pAssets);
    this.NumOfAssets = p;

    %Set the same weight for all assets
    this.InitialWts = PortfolioVaRCampbell.CalculateEqualWeights(this.NumOfAssets);
end

function [OptWts, OptSp, OptReturn, OptPsi, OptVaR] = EstimateMaxPerformanceIndex(obj)

    %Setup temporary attributes used during optimization process
    obj.TempCashWeight = 0;
    obj.TempConfidenceLevel = obj.ConfidenceLevel;

    %Solver the base optimal VaR (desired VaR)
    [optwts, ~, optflags, optout] = obj.FindOptimalPortfolio(obj.InitialWts);

    %Method return
    OptWts = optwts;
    OptReturn = obj.CalculatePortfolioReturn(optwts);
    OptPsi = obj.PsiRisk(optwts);
    OptSp = obj.Sp(optwts);
    OptVaR = obj.CalculateVaR(optwts);

    %Save attributes
    obj.OptBaseFlags = optflags;

```

```
        obj.OptBaseOut = optout;  
        obj.OptBaseWts = optwts;  
        obj.OptBaseReturn = OptReturn;  
        obj.OptBasePsi = OptPsi;  
        obj.OptBaseSp = OptSp;  
        obj.OptBaseVaR = OptVaR;  
  
    end  
  
end  
  
end
```

## VaRTypeEnum.m

```
classdef VaRTypeEnum  
    %VARTYPE Enumeration to define the type of VaR Algorithm  
  
    enumeration  
        Historical, Normal, tStudent  
    end  
  
end
```

## SolverTypeEnum.m

```
classdef SolverTypeEnum  
    %VARTYPE Enumeration to define the type of Solver used for optimization  
  
    enumeration  
        fmincon, GlobalSearch, MultiStart  
    end  
  
end
```