Insper

Business and Economics Working Papers

BEWP 213/2015

Teoria dos valores extremos adequa-se ao Ibovespa na crise de 2008?

Fernando Caritá
Nilton Deodoro Moreira Cardoso
João Maurício Rosal
Adriana Bruscato Bortoluzzo

Este documento integra a produção acadêmica da comunidade Insper e está disponível na *Coleção Working Papers*, no **Repositório Institucional**: https://repositorio.insper.edu.br/home. Para mais informações contate repositório@insper.edu.br

Teoria dos valores extremos adequa-se ao Ibovespa na crise de 2008?

Fernando Caritá
Nilton Deodoro Moreira Cardoso
João Maurício Rosal
Adriana Bruscato Bortoluzzo

1. Introdução

Os riscos podem assumir diversas formas distintas no mercado financeiro, e definir a forma mais adequada para mensurá-los e gerenciá-los torna-se o grande desafio dos profissionais desta área e de investidores, especialmente em momentos de crise financeira.

A mensuração do risco potencial de perdas no mercado financeiro deu um passo muito importante ao incorporar técnicas como *Value at Risk* (VaR) ("”), *Stress Test*, *Stop Loss*, *Expected Shortfall* (Ferando, teria como incluir os anos onde as principais referências bibliográficas lançam esses conceitos?) entre outras, na gestão do risco de mercado.

.Entretanto, o desempenho destas técnicas ainda deixa a desejar, especialmente no que diz respeito à sua aplicabilidade em momentos de crise financeira. Algumas metodologias de VaR, por exemplo, são calculadas com dados do passado para projetar o futuro, e quando o futuro tem pouca correlação com o passado as previsões podem falhar. Em relação ao "*Stress Test*", os cenários de estresse utilizados neste modelo são muitas vezes estabelecidos a partir de critérios que envolvem certo grau de subjetividade. Por isso, os valores gerados são avaliados pelos gestores com certa parcimônia.

A grande vantagem da teoria dos valores extremos (TVE) para a mensuração de risco, em comparação a outras metodologias, é que a TVE reconhece que existem características e propriedades encontradas nos extremos amostrais que nem sempre estão relacionadas ao comportamento do centro da distribuição. Por esse motivo, pode-se considerá-la uma metodologia interessante para a previsão de perdas em momentos de crise financeira.

O objetivo deste trabalho é avaliar, através de testes empíricos, as vantagens de se aplicar o VaR incorporando os fundamentos da TVE, em momentos de crise financeira do mercado brasileiro, em comparação a modelos de VaR tradicionais.

2. Gerenciamento de risco de mercado

O gerenciamento do risco de mercado pelas instituições financeiras tornou-se foco das discussões estratégicas devido a perdas significativas com instrumentos financeiros, especialmente instrumentos derivativos, de instituições financeiras e de grandes companhias na década de noventa[1].

O cálculo do VaR (Value at Risk) foi adotado como o melhor método para quantificar o risco de mercado, utilizado inclusive para efeitos regulatórios, tais como o cálculo do capital a ser alocado em função dos riscos expostos, de acordo com as diretrizes estabelecidas pelo Comitê de Supervisão Bancária da Basileia (BIS – Bank for International Settlements) e pelos órgãos de supervisão bancária de todo o mundo. O BACEN (2007) também tem incorporado em seus normativos essas diretrizes, a Resolução 3.464, por exemplo, determina os requerimentos mínimos para uma estrutura de gerenciamento de risco de mercado para as instituições financeiras.

[1] Alguns exemplos são: Condado de Orange - Estados Unidos, Metallgesellschaft – Alemanha, Barings – Reino Unido, Procter & Gamble, Estados Unidos e outros. Para maiores detalhes vide Jorion (2003).

A base teórica para o método VaR foi dada por Jorion (1996), Duffie e Pan (1997) e Dowd (1998), sendo que tal medida estatística para medição de risco estima a perda máxima que possa ocorrer dado um determinado nível de confiança.

Para uma posição de investimento integrada por diversos tipos de ativos de risco, o VaR procura estimar o risco combinado de todos os fatores que influenciam o valor destes ativos, considerando o efeito da correlação combinada entre eles. Além disso, o VaR também assume que a atual carteira será marcada a mercado no final desse mesmo período. Espera-se que as perdas superem o valor do VaR apenas com uma certa probabilidade (Linsmeier e Pearson, 2000).

2.1. Técnicas usuais para cálculo do VaR

O VaR para risco de mercado pode ser calculado a partir de diversos métodos. Dentre as abordagens mais comuns do ponto de vista de prática mercadológica e na literatura acadêmica sobre o assunto, encontram-se as seguintes: simulação histórica; VaR paramétrico; *Riskmetrics*; família de modelos autorregressivos; simulações de Monte Carlo

Simulação histórica

A abordagem por simulação histórica consiste em recuar no tempo, por exemplo, nos últimos 250 dias e aplicar a ponderação vigente de ativos a uma série temporal de seus retornos históricos. O VaR é obtido a partir da distribuição de retornos hipotéticos, onde se atribui a cada cenário histórico o mesmo peso (Jorion, 2003).

Esse método é relativamente simples de se implementar, caso os dados históricos tenham sido coletados internamente para a marcação a mercado diária. Uma das suas principais vantagens é incorporar o efeito de caudas pesadas nos cálculos. Por outro lado, o modelo considera somente uma trajetória amostral. A hipótese é que o passado representa o futuro imediato de maneira razoável. Entretanto, se a janela omite eventos importantes, a cauda não será bem representada. Além disso, a amostra pode conter eventos que não se repetirão no futuro (Jorion, 2003).

VaR paramétrico

A abordagem de VaR paramétrico é conhecida como linear normal ou delta normal. Considera-se, neste caso, que os eventos são independentes e identicamente distribuídos segundo uma normal. Este modelo deve ser aplicado somente para carteiras cujo retorno dos fatores de risco sejam normalmente distribuídos, e sua distribuição conjunta seja normal multivariada, o que nem sempre é realista, uma vez que se sabe que os retornos financeiros são leptocúrticos e, portanto, apresentam caudas mais pesadas do que as de uma distribuição normal (Mandelbrot, 1963; Hauksson et al, 2000; Dacorogna et al, 2001).

Em essência, isso significa que qualquer técnica de cálculo do VaR com base em uma função de distribuição normal tende a gerar estimativas VaR consideradas menores do que se esperaria em cenários de crise (Seymour e Polakow, 2003). Em períodos de instabilidade dos mercados financeiros as rentabilidades negativas, de valor absoluto elevado, ocorrem com uma frequência superior à esperada sob a hipótese da normalidade. Neste sentido, a utilização da variância estimada da distribuição de rentabilidade, como medida única de risco, pode subestimar o verdadeiro risco envolvido com a posição de investimento.

Uma terceira abordagem usual é um método paramétrico desenvolvido pelo Banco J.P. Morgan conhecido como *RiskMetrics*, onde as variâncias e covariâncias são previstas a partir de uma média móvel ponderada exponencial, assumindo que os retornos são continuamente compostos seguindo uma distribuição condicional normal (Longerstaey, 1996).

De acordo com Jorion (2003), a previsão da volatilidade para o momento t é uma média ponderada da previsão da volatilidade no momento anterior (t-1), ponderada por um fator com peso α, e do quadrado do retorno no momento t-1 com peso 1-α.

Considerando o logaritmo natural do retorno diário r_t, e o conjunto de informações disponíveis no momento do tempo t-1 como F_{t-1}, o modelo *RiskMetrics* assume que $r_t \mid F_{t-1} \sim N(\mu_t, \sigma_t^2)$, μ_t é a média condicional e σ_t^2 é a variância condicional de r_t, onde:

$$\mu_t=0,\ \sigma_t^2 = \alpha\sigma_{t-1}^2 + (1-\alpha)r_{t-1}^2\ , \qquad (04)$$

sendo $1<\alpha<0$

O método pressupõe que o logaritmo do preço diário, p_t = ln (P_t), da carteira satisfaça a equação em primeira diferença p_t-p_{t-1} = r_t, onde $r_t = \sigma_t \epsilon_t$ é um processo GARCH (1, 1). O modelo original também é baseado no pressuposto de normalidade dos retornos o que pode gerar as mesmas distorções de previsões em períodos de crise já mencionados nessa seção.

Uma quarta abordagem corresponde ao VaR baseado em modelos autorregressivos. Esses modelos partem da formulação proposta por Box e Jenkins (1970) com o objetivo de descrever séries temporais e gerar previsões. Os modelos das classes AR, MA, ARMA, ARIMA e demais derivados[2], permitem diferentes especificações de forma a descrever o comportamento da série. Entretanto, assumem que a variância do erro é constante ao longo do tempo, o que nem sempre é aplicável a séries temporais relacionadas ao mercado financeiro. Muitas destas séries apresentam forte volatilidade em momentos específicos, como em crises financeiras, por exemplo, seguidas de períodos de tranquilidade.

Para casos onde se observa heterocedasticidade na variância dos erros pode-se aplicar os modelos da família ARCH/GARCH. Os modelos ARCH (heterocedásticos autorregressivos condicionais) foram inicialmente apresentados por Engle (1962) e, posteriormente, tiveram sua forma generalizada por Bollerslev (1986), criando assim os modelos GARCH.

No caso ARCH generalizado ou GARCH o modelo é dado pela equação:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \qquad (07)$$

Com α_0, α_1 e β_1 positivos e $\alpha_1 + \beta_1 < 1$.

Em ambos os casos assume-se que ϵ_t é um ruído branco com distribuição normal padrão. Além disso, o modelo também admite a formulação não-Gaussiana, quando aplicável.

Todavia, os modelos ARCH possuem algumas fraquezas que podem causar distorções nos coeficientes gerados para o modelo de previsões. De acordo com Tsay (2002) temos que:

1. O modelo assume que choques positivos e negativos têm os mesmos efeitos sobre a volatilidade porque ela depende do quadrado dos choques anteriores. Na prática, é sabido que preço de um ativo financeiro responde de forma diferente a choques positivos e negativos.
2. O modelo ARCH é mais restritivo. Por exemplo, $\boldsymbol{\alpha_1^2}$ de um modelo ARCH (1) deve estar no intervalo [0, 1/3] se a série tem um quarto momento finito. A restrição torna-se complicada para os modelos ARCH de ordem mais alta. Na prática, isso limita a capacidade dos modelos ARCH com inovações gaussianas de capturar excessos de curtose.
3. O modelo ARCH não prevê qualquer nova visão para compreender a fonte de variações de séries temporais financeiras. Ele apenas fornece uma forma para descrever o comportamento da variância condicional, mas não dá nenhuma indicação sobre o que causa tal comportamento.

[2] Um exemplo adicional de especificação são os modelos ARFIMA.

4. Os modelos ARCH podem superestimar a volatilidade porque respondem lentamente a grandes choques isolados para o retorno das séries.

Os modelos GARCH se desenvolveram ao longo do tempo para corrigir fraquezas identificadas no modelo inicial, gerando assim diversas variações como, por exemplo, os modelos EGARCH, IGARCH e TGARCH.

O EGARCH (Exponential GARCH) permite ajustar o modelo de forma distinta para retornos positivos e negativos. Para capturar o efeito da assimetria entre os retornos positivos e negativos esse modelo considera uma inovação a partir do componente $g(\epsilon_t)$ descrito abaixo, conforme Nelson (1991) e Tsay (2002):

$$g(\epsilon_t) = \theta\epsilon_t + \gamma[|\epsilon_t| - E(|\epsilon_t|] \ , \tag{08}$$

onde $g(\epsilon_t)$ é representado por

$$g(\epsilon_t) = \begin{cases} (\theta+\gamma)\epsilon_t - \gamma E(|\epsilon_t|) se\ \epsilon_t \geq 0 \\ (\theta-\gamma)\epsilon_t - \gamma E(|\epsilon_t|) se\ \epsilon_t < 0 \end{cases} \tag{09}$$

Sendo θ e γ constantes reais do modelo, ϵ_t e $|\epsilon_t| - E(|\epsilon_t|)$ possuem média zero e são sequências com distribuição iid, e $E[g(\epsilon_t)] = 0$.

Outra variação é o modelo IGARCH (Integrated GARCH). Quando $\alpha_1 + \beta_1 = 1$ (vide equação 07) a volatilidade em um passo futuro t é persistente e a estimativa de volatilidade forma uma linha com inclinação α_0(Nelson, 1990). Desta forma temos

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + (1-\beta_1)r_{t-1}^2 + \beta_1\sigma_{t-1}^2 \tag{10}$$

Já o modelo TGARCH ("Threshold" GARCH) é usado quando a série apresenta efeitos alavancados, ou seja, correlação negativa entre os rendimentos presentes e sua volatilidade futura (Glosten, Jagannathan e Runkle, 1993), onde temos a seguinte formulação para a volatilidade

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=0}^{s}\left(\alpha_i + \gamma_i N_{t-i}\right) a_{t-1}^2 + \sum_{j=0}^{m}\beta_j\sigma_{t-j}^2 \ , \tag{11}$$

onde $a_t = \sigma_t\epsilon_t$, e N_{t-i} é um indicador para a_{t-i}, sendo

$$N_{t-i} = \begin{cases} 1 \text{ se } a_{t-i} < 0 \\ 0 \text{ se } a_{t-i} \geq 0 \end{cases} \tag{12}$$

Simulação de Monte Carlo

Um quinto tipo de abordagem utiliza-se de simulações de Monte Carlo. Este tipo de modelo é desenvolvido em duas fases. Na primeira, especifica-se um processo estocástico para as variáveis financeiras, bem como parâmetros desse processo (como correlações e volatilidades). Na segunda, simulam-se as trajetórias fictícias de preço para todas as variáveis de interesse. Para cada horizonte considerado, a carteira é marcada a mercado por meio de uma avaliação plena, como no caso da simulação histórica. (Jorion, 2003)

A simulação de Monte Carlo é o método mais eficiente para o cálculo do VaR, dentre as 5 abordagens usuais apresentadas. Ele captura grande quantidade de riscos, inclusive de instrumentos não lineares, como, por exemplo, opções. As simulações geram a distribuição por inteiro ao invés de apenas um percentil. Por outro lado, a maior desvantagem deste método é o custo computacional, que em contrapartida tem apresentado queda contínua histórica[3]. Dependendo do número de ativos na carteira a quantidade de interações necessárias torna-se impraticável para a grande parte das instituições financeiras. (Jorion, 2003)

O VaR também pode ser separado em dois grupos de modelos, os não condicionais e condicionais.

O primeiro grupo, os não condicionais, assume que os retornos sejam independentes e identicamente distribuídos, como é o caso da simulação histórica e linear

[3] Em ciência da computação este efeito de redução contínuo de custo é descrito pela lei de Moore (Moore, 1965).

normal. Isso significa que os retornos não estão correlacionados entre intervalos de tempo sucessivos. Jorion (2003) comenta que esta afirmação é consistente com a hipótese de mercados eficientes, em que o preço corrente contém todas as informações relevantes sobre um determinado ativo. Ou seja, os retornos comportam-se como um passeio aleatório.

Já o segundo grupo, os condicionais, conforme comentado por Daníelsson (2011), assume que existe dependência temporal entre a volatilidade dos retornos de um ativo ao longo do tempo, e geralmente incorpora atributos da família GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heterocedastic) ou outras variáveis explicativas.

Enquanto o VaR é uma ferramenta para mensurar perdas potenciais em condições normais de mercado, o teste de estresse é uma ferramenta para ajudar a prever as perdas potenciais em períodos de crise.

O teste de estresse é conduzido a partir do modelo básico de previsão de perdas, mas ajustado com cenários onde as perdas seriam maiores. Kupiec (1998) também propôs uma metodologia semelhante para a realização do teste.

No Brasil, o BACEN, em linha com as diretrizes do Comitê da Basileia, publicou a Circular 3.478, em 2009, prevendo os principais elementos para a realização de testes de estresse, entre eles:

- Periodicidade mínima semanal;
- Integração com a estrutura de gerenciamento de risco;
- Associação de potenciais perdas a eventos plausíveis;
- Reprodução de períodos históricos de estresse do mercado;
- Reprodução de períodos de maiores perdas da instituição; e
- Simulação, de forma prospectiva, de adversidades baseadas em características da carteira da instituição e do ambiente macroeconômico que representem condições severas, mas plausíveis.

Como pode-se observar, o BACEN optou por definir alguns elementos que devem estar presentes na técnica escolhida pela instituição financeira, mas não define efetivamente qual metodologia deve ser utilizada.

Atualmente, existem algumas metodologias disponíveis para determinação dos cenários de estresse, as quais apresentam vantagens e desvantagens. Segundo Dario (2003), as principais são:

- Análise de cenário: Consiste na criação de cenários potenciais futuros para medir os ganhos e perdas da posição;
- Simulação histórica: Utiliza eventos passados para a determinação de ganhos e perdas, principalmente aqueles que geraram as maiores variações no valor da carteira;
- VaR estressado: Os parâmetros utilizados no cálculo do VAR são estressados. Modifica-se a volatilidade dos ativos, bem como a estrutura de correlação; e
- Teste de estresse sistemático: Consiste na criação de uma série de cenários de estresse para os principais fatores de risco da carteira. A diferença entre esse método e os anteriores é que a avaliação de risco da carteira é feita de maneira sistêmica, de tal modo que contemple todos os riscos envolvidos, e não apenas alguns fatores de risco da carteira.

Um exemplo recente de teste de estresse foi o exercício realizado pelo European Banking Authority (2011), autarquia criada com o objetivo de zelar pela estabilidade do sistema financeiro da União Europeia. Através do documento *EU-wide stress testing,* os legisladores explicam os cenários e sua metodologia de teste de estresse realizado, aplicado para os bancos da União Européia. Este exercício tem como objetivo avaliar o comportamento das posições destes bancos em cenários hipotéticos adversos. De maneira geral, observa-se que o exercício teve como horizonte de tempo os períodos de

2011 e 2012 e considerou cenários estáticos adversos, previamente definidos, baseados em metodologias próprias e fundamentos econômicos.
O cenário adverso, por exemplo, foi baseado nos seguintes efeitos na zona do Euro:

- Persistência de crise dos títulos públicos;
- Queda no preço das ações de empresas situadas na zona do Euro;
- Queda no preço dos imóveis;
- Aumento na taxa de juros interbancária; e
- Queda no consumo e nos níveis de investimento.

O ponto mais problemático destas metodologias é o caráter subjetivo na determinação de cenários. Como resultado, a qualidade do teste de estresse depende muito da experiência e da sensibilidade do(s) profissional(is) envolvido(s). O segundo problema é a dificuldade para interpretar os resultados obtidos já que, na maioria das vezes, não está associada à probabilidade de ocorrência do evento. (Dario, 2003).

3. Teoria dos Valores Extremos

A teoria dos valores extremos é um ramo da estatística que se preocupa com os eventos com valores máximos e mínimos de um conjunto de dados. (Coles, 2001).
A teoria começou a se tornar amplamente aplicada a partir do trabalho de Fisher e Tippett (1928), Gnedenko (1943) e Jenkinson (1955). A partir daí a TVE começou a ser utilizada para prever eventos naturais extremos como ondas oceânicas (Dawson, 2000), terremotos (Lavenda & Cipollone, 2000), inundações, mudanças meteorológicas (Thompson et al., 2001) e outros. Já Longin (1996), Embrechts et al. (1997), McNeil e Frey (1999), e Daníelsson e De Vries (2000) pesquisaram as aplicações da TVE para gestão de riscos financeiros.
MacNeil e Frey (1999) comentam que eventos de extremo risco estão presentes em todas as áreas de gestão de risco e um dos maiores desafios para o gestor de riscos é implementar modelos que permitam avaliar eventos raros e de grande severidade, e que permitam a medição de suas consequências. Coles (2001), demonstra a formulação inicial do modelo como:

$$\boldsymbol{M_n} = \mathbf{max}\{\boldsymbol{X_1}, \dots, \boldsymbol{X_n}\} \tag{13}$$

Onde $\boldsymbol{M_n}$ representa o evento máximo de n unidades de tempo, e $\boldsymbol{X_1}$,...,$\boldsymbol{X_n}$ representa a sequência de variáveis independentes com a distribuição acumulada F em comum, sendo que $\boldsymbol{X_{(n)}}$ pode ser derivado para todos os valores de n:

$$\mathbf{Pr}\{\mathbf{X_{(n)}} \leq \mathbf{z}\} = \mathbf{P\,r}\{\mathbf{X_1} \leq \mathbf{z}, \dots, \mathbf{X_n} \leq \mathbf{z}\} = \mathbf{Pr}\{\mathbf{X_1} \leq \mathbf{z}\} \times \dots \times \mathbf{Pr}\{\mathbf{X_{(n)}} \leq \mathbf{z}\} = \{\mathbf{F(z)}\}^{\mathbf{n}} \tag{14}$$

Como F é desconhecida o autor comenta que uma forma de descobri-la é buscar famílias de modelos de distribuições próximas de $\boldsymbol{F^n}$. A ideia é similar ao procedimento de aproximação da distribuição de médias amostrais da distribuição normal, conforme justificado pela Teoria do Limite Central.
A mesma teoria também pode ser aplicada para a previsão de eventos extremos mínimos. Nesse caso a formulação é representada por:

$$\mathbf{M_n} = \mathbf{min}\{\mathbf{Y_{1,}} \dots, \mathbf{Y_n}\} \tag{15}$$

Onde $\boldsymbol{M_n}$ representa o evento mínimo de n unidades de tempo, e $\boldsymbol{Y_1}$,...,$\boldsymbol{Y_n}$ representa a sequência de variáveis independentes com a distribuição acumulada F em comum.

Tsay (2002) demonstra a teoria desenvolvida por Jenkinson (1955) sobre a TVE, aplicando-a para previsão de eventos máximos (ou mínimos) relacionados ao retorno de ativos financeiros. Dessa forma, suponha que os $\mathbf{r_t}$ retornos são serialmente independentes, com uma função cumulativa de distribuição $\mathbf{F(x)}$ comum, e que o intervalo do retorno $\mathbf{r_t}$ é [l, u]. Para retornos em log, temos l = - ∞ e u = ∞. Em seguida, a FDC (Função Distribuição Cumulativa) de $\mathbf{r_{(1)}}$, definida por $\mathbf{F_{n,1}(x)}$, é dada por:

$$\mathbf{F_{n,1}}\,(\mathbf{x}) = \Pr[\mathbf{r_{(1)}} \leq \mathbf{x}\,] = 1 - \Pr[\mathbf{r_{(1)}} > \mathbf{x}\,] \tag{16}$$

$$= 1 - \Pr(\mathbf{r_1} > \mathbf{x}\,, \mathbf{r_2} > \mathbf{x}\,, \ldots, \mathbf{r_n} > \mathbf{x}\,)$$

$$= \mathbf{1} - \prod_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{Pr}(\mathbf{r_j} > \boldsymbol{x}) = \mathbf{1} - \prod_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{n}} [\mathbf{1} - \mathbf{Pr}(\mathbf{r_j} \leq \mathbf{x})]$$

$$= \mathbf{1} - \prod_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{n}} [\mathbf{1} - \mathbf{F(x)}] = \mathbf{1} - [\mathbf{1} - \mathbf{F(x)}]^{\mathbf{n}}$$

Conforme o autor, a TVE está preocupada em encontrar duas sequências {βn} e {αn}, onde αn>0, tais que a distribuição de r(1*)≡($\mathbf{r_1}$-βn)/αn convirja para uma distribuição não degenerada quando n vai ao infinito, sendo que o asterisco ("*") indica o valor extremo mínimo. A sequência {βn} é uma série de localização e {αn} é uma série de fatores de escala. Sob o pressuposto de independência, a distribuição limite do r(1*) mínimo normalizado é dado por:

$$\mathrm{F^*(x)} = \begin{cases} \mathbf{1} - \mathbf{exp}\left[-(\mathbf{1} + \boldsymbol{\xi}\mathbf{x})^{\frac{1}{\xi}}\right] & \mathbf{se}\ \boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{1} - \mathbf{exp}[-\mathbf{exp}(\mathbf{x})] & \mathbf{se}\ \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0} \end{cases} \tag{17}$$

Sendo $\boldsymbol{x}$<-1/ξ para **ξ**<0 e $\boldsymbol{x}$>-1/**ξ** para **ξ**>0, e o símbolo "*" significa o mínimo. O caso de ξ = 0 é tomado como o limite quando ξ → 0.
A distribuição na equação 17 é a Distribuição Generalizada de Valores Extremos (DGVE) de Jenkinson (1955) para valores mínimos, e engloba os três tipos de distribuição de Gnedenko (1943), inicialmente propostas por Fisher e Tippett (1928)**:**

Tipo I: **ξ** = 0, a distribuição de Gumbel . A FDC é:

$$\mathrm{F^*}(\mathbf{x}) = 1 - \exp[-\exp(\mathbf{x})], -\infty < \mathbf{x} < \infty \tag{18}$$

Tipo II: **ξ** > 0, a distribuição de Fréchet. A FDC é:

$$\mathrm{F^*(x)} = \begin{cases} 1 - \exp\left[-(1 + \xi x)^{\frac{1}{\xi}}\right] & \mathrm{se\ x} < -1/\xi \\ 1 & \mathrm{caso\ contrário} \end{cases} \tag{19}$$

Tipo III: **ξ** < 0, a distribuição de Weibull. A FDC é:

$$\mathrm{F^*(x)} = \begin{cases} 1 - \exp\left[-(1 + \xi x)^{\frac{1}{\xi}}\right] & \mathrm{se\ x} > -1/\xi \\ 0 & \mathrm{caso\ contrário} \end{cases} \tag{20}$$

Ocorre que o comportamento da cauda de $F(x)$ determina a distribuição limitante $F^*(x)$ do valor mínimo. A cauda (à esquerda) da distribuição diminui exponencialmente para a família de Gumbel, por uma função exponencial para a família de Fréchet, e é finita para a família de Weibull.
Coles (2001) menciona que nas aplicações iniciais da teoria era comum adotar uma das 3 distribuições e posteriormente estimar os parâmetros da distribuição, mas o autor comenta que esta abordagem pode ser falha porque pressupõe que a decisão de uma das famílias é mais apropriada que as demais e, uma vez que esta decisão foi tomada, as inferências posteriores presumem que esta escolha esteja correta. A solução seria trabalhar com uma família de distribuição que combine as três famílias, sendo esta a DGVE.
O parâmetro ξ representa a densidade da cauda, também chamado de formato, α representa o parâmetro de escala e β representa o parâmetro de tendência também chamado de localização. O modelo prevê que os diferentes valores de **ξ** representem diferentes famílias de distribuição, conforme descrito nas equações 18, 19 e 20.
Os parâmetros da DGVE podem ser obtidos através da formulação de Prescott e Walden(1980), onde a função logarítmica de máxima verossimilhança L satisfaz:

$$-L = n\log\alpha + (1-\xi)\sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{i=1}^{n} e^{-y_i} \tag{21}$$

Onde:

$$y_i = -\xi^{-1}\log\left\{1 - \xi\frac{(x_i - \beta)}{\alpha}\right\}$$

Sendo ξ o parâmetro de formato, α o parâmetro de escala e β o parâmetro de localização.
De maneira geral, utiliza-se a abordagem de blocos máximos para a obtenção dos valores extremos dos dados. Esta abordagem é proposta por Smith (1986) e consiste em identificar os eventos de valores máximos (ou mínimos) de uma série de dados em períodos sucessivos (blocos) de igual tamanho. Estes eventos selecionados representam os eventos extremos.
Coles (2001) e Arraes e Rocha (2006) comentam que esta abordagem causa uma dificuldade para a análise de valores extremos por gerar quantidade limitada de dados para a estimativa do modelo, dentro de um mesmo bloco, dependendo do tamanho dos blocos estabelecidos.
Arraes & Rocha (2006) destacam que a escolha do tamanho dos blocos segue uma metodologia bastante objetiva, como por exemplo, semanas, meses ou anos. Adicionalmente, Coles (2001) salienta que esta escolha leva a um “trade-off” entre variância e viés: blocos que são em média muito grandes podem gerar poucos eventos de máxima, o que pode ocasionar uma alta variância nas estimativas do modelo. Por outro lado, pequenos blocos podem violar as propriedades assintóticas que suportam o modelo levando a um viés.

3.1 Distribuição Generalizada de Pareto

A base teórica que leva ao desenvolvimento da Distribuição Generalizada de Pareto (DGP) foi desenvolvida por Pickands (1975).
A DGP é uma distribuição com dois parâmetros e função descrita por McNeil, Frey e Embrechts (2005) da seguinte forma:

$$G_{\xi,\beta}(x) = \begin{cases} 1-(1+\xi x/\beta)^{-1/\xi} & \xi \neq 0, \\ 1-\exp(-x/\beta) & \xi = 0, \end{cases} \tag{22}$$

Onde β > 0, x ≥ 0 quando ξ ≥ 0 e 0 ≤ x ≤ -β/ ξ quando ξ < 0. Sendo ξ um parâmetro de densidade da distribuição e β e um parâmetro de escala.
A média dessa distribuição é descrita como:

$$E(X) = \frac{\beta}{(1-\xi)} \tag{23}$$

O autor comenta que a DGP na TVE é um modelo natural para a distribuição do excesso acima de um limite dada sua formulação para a função da média dos excessos. Dado que a sua distribuição de valores excedentes a um limite estabelecido é representada por:

$$F_u(x) = P(X-u \leq x | X > u) = \frac{F(x+u)-F(u)}{1-F(u)} \tag{24}$$

Onde F_u descreve a distribuição de valores excessos das perdas superiores ao limite u, X é a variável aleatória com função distribuição F, u é o valor do limite para valores excedentes, para $0 \leq x < x_f - u$, onde $x_f \leq \infty$ é o ponto final da cauda direita da distribuição F, a função da média dos excessos é dada por:

$$e(u) = E(X-u | X > u) \tag{25}$$

Onde $e(u)$ expressa a média de F_u descrito na equação 24, como função de u.
A modelagem dos valores excedentes ao limite u definido pode ser realizado de algumas formas. De acordo com Mc Neil (1999) o método por máxima verossimilhança é o mais comumente aplicado.
Segundo McNeil, Frey e Embrechts (2005), uma vez estabelecido o limite u, os demais parâmetros podem ser estimados por máxima verossimilhança, assim como a DGVE, sendo:

$$\ln L(\xi,\beta;Y_1,\dots,Y_{N_u}) = \sum_{j=1}^{N_u} \ln g_{\xi,\beta}(Yj) = -N_u \ln\beta - \left(1+\frac{1}{\xi}\right)\sum_{j=1}^{N_u} \ln\left(\xi\frac{Y_j}{\beta}\right), \tag{26}$$

Que pode ser maximizado sujeito a β > 0 e 1+ ξ Yj / β > 0.

Nessa formulação dado que $X_1,\dots,X_n$ representam dados sobre perda de uma série de F, um número aleatório N_u excederá o limite u. Para cada um desses excessos será calculado $Y_j = X'_u - u$ do excesso da perda. O objetivo é alcançar os parâmetros da DGP adequando essa distribuição para os excessos de perdas N_u. Adicionalmente, $g_{\xi,\beta}$ representa a densidade da DGP.
Coles (2001) comenta que esta abordagem pode gerar um “trade-off” entre variância e viés, assim como a abordagem DGVE descrita anteriormente.
Se o limite u for muito baixo corre-se o risco de que as propriedades assintóticas do modelo sejam violadas, podendo gerar viés. Caso o limite seja alto demais poucos

eventos serão apontados como extremos, podendo gerar uma alta variância nas estimativas do modelo.

3.2 Modelo Processo Pontual

A abordagem por Processo Pontual[4] é originalmente atribuída a Pickands (1971). As abordagens anteriores consideraram a magnitude das perdas em excesso sobre limites elevados para cálculo dos valores extremos das séries. Essa abordagem considera os excedentes de limites como eventos no tempo para modelar a ocorrência desses eventos (McNeil, Frey e Embrechts, 2005).
Coles (2001) descreve as propriedades estatísticas da abordagem Processo Pontual como um conjunto de variáveis aleatórias com valores inteiros não negativos, N(A), para cada A $\subset \mathcal{A}$, de forma que N (A) seja o número de pontos no conjunto A. Ou seja, a distribuição de probabilidades de cada item de N(A) determina as características do Processo Pontual, chamado de N. Dado:

$$\Lambda\,(\mathrm{A}) = \mathrm{E}\{\mathrm{N}(\mathrm{A})\} \tag{27}$$

$\Lambda\,(A)$ representa o número de pontos esperado em qualquer subconjunto A $\subset \mathcal{A}$, e é definido como medida de intensidade do processo. Assumindo A = $[\mathrm{a}_1, \mathrm{x}_1]$ ...$[\mathrm{a}_\mathrm{k}, \mathrm{x}_\mathrm{k}] \subset \mathbb{R}^\mathrm{k}$, a função derivada:

$$\lambda(\mathrm{x}) = \frac{\partial\Lambda(\mathrm{A})}{\partial_{\mathrm{x}1} \ldots \partial_{\mathrm{x}_\mathrm{k}}} \tag{28}$$

é a função densidade do processo.

A abordagem Processo Pontual é um processo unidimensional homogêneo de Poisson. Com um parâmetro $\lambda > 0$, esse é um processo de $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ satisfazendo:

1. Para todo A=$[\mathbf{T_1}, \mathbf{T_2}] \subset \boldsymbol{\mathcal{A}}$ N(A) ~ Poi ($\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{t_2} - \mathbf{t_1})$)
2. Para todo subconjunto sem sobreposição A e B de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, N(A) e N(B) é uma variável aleatória independente.

Isso significa que o número de pontos em um dado intervalo segue uma distribuição de Poisson, com média proporcional ao tamanho do intervalo, e a ocorrência de pontos em intervalos separados são mutuamente independentes.
Este modelo requer o cálculo de três parâmetros sendo eles:

1. formato (ξ)
2. escala (σ)
3. localização (β)

E a formulação básica é dada por:

$$\boldsymbol{M_n} = \mathbf{max}\{\boldsymbol{X_1} \ldots \boldsymbol{X_n}\} \tag{29}$$

Onde X_1,...,X_n é uma série de valores independentes e identicamente distribuídos, seguem uma função distribuição comum F, e se comportam como valores extremos. Além disso, $\{a_n$>0} e $\{b_n\}$ são constantes de forma que:

$$\Pr\{(\mathrm{X_n} - \mathrm{b_n})/\mathrm{a_n} \leq \mathrm{z}\} \rightarrow \mathrm{G}(\mathrm{z}), \tag{30}$$

Onde G é:

[4] Em inglês “Point Process”

$$G(z) = \exp\{-[1 + \xi(z - \mu/\sigma)]^{-1/\xi}\} \quad (31)$$

Estes parâmetros foram calculados para a distribuição de Poisson ajustada ao modelo, através do método de máxima verossimilhança.
Coles (2001) comenta que existem duas razões para se utilizar a abordagem Processo Pontual. Primeiro, sua abordagem engloba as duas abordagens apresentadas anteriormente (DGVE e DGP). Segundo, o modelo leva a uma probabilidade que permite formular os eventos não estacionários acima do limite estabelecido de forma mais direta do que a DGP.

4. Metodologia

4.1 Banco de Dados

O Ibovespa é um indicador médio de desempenho do mercado de ações brasileiro, sendo composto por um conjunto das ações mais líquidas negociadas na BM&FBovespa.
O índice é apurado diariamente desde 1968, tendo sido iniciado com valor-base de 100 pontos. A variação do índice reflete a variação no preço das ações de sua carteira teórica e o pagamento de proventos e dividendos das mesmas ações. Desde então sua cotação cumulativa não sofreu modificações metodológicas, entretanto, no período de 1983 a 1997, o índice foi dividido por 100 ou por 10 em diversas ocasiões devido à inflação decorrida[5]. Por conta das modificações no índice este trabalho considerará os dados publicados pela BM&FBovespa, colhidos na base de dados Economática, após 10/03/1997, data da última modificação.
Este trabalho buscará testar a adequação das previsões dos modelos de VaR, calculados pelas metodologias baseadas na TVE, e pelos modelos de VaR tradicionais, para o período de crise financeira internacional compreendida entre 2008 e 2009.
Para o teste foi selecionado o período histórico de 11/03/1997 a 31/10/2008 como amostra para avaliação e construção dos modelos VaR baseados na TVE, acumulando 2882 eventos, e o período de 03/11/2008 a 30/10/2009 para teste da acuracidade dos modelos através de “backtesting”, acumulando 247 eventos.

4.2 Modelos selecionados

Os testes apresentados foram realizados comparando-se modelos de VaR dos dois tipos, não condicionais e condicionais, incluindo modelos VaR por abordagens tradicionalmente utilizadas na gestão de risco, e modelos VaR pela TVE.
Para os modelos não condicionais será considerado um modelo de VaR paramétrico conhecido como linear normal, que chamaremos de VaRLN. Para os modelos condicionais serão considerados três variações de modelos autorregressivos para serem testados e comparados com os modelos calculados a partir da TVE. São eles os modelos GARCH (VaRGARCH), o EGARCH(VaREGARCH) e o IGARCH(VaRIGARCH), todos considerando distribuição normal de eventos.
O primeiro modelo TVE selecionado para teste é o DGP. Esse modelo depende de dois parâmetros, formato e escala, determinados pela distribuição DGVE. Uma vez definidos esses parâmetros pode-se calcular o VaR através da formulação apresentada por Tsay (2002).

[5] Vide maiores informações em www.bmfbovespa.com.br 30/06/2012

$$\mathrm{VaR_{DGP}} = \eta + \frac{\alpha}{\xi}\left\{1 - \left[\frac{T}{N_\eta}(1-q)\right]^{\xi}\right\} \tag{32}$$

Onde η é o limite definido, T é o tamanho da amostra, N_η é o número de excessos, q é o limite do intervalo de confiança, α é o parâmetro de escala e ξ é o parâmetro de formato.
O segundo modelo selecionado para teste é um modelo TVE baseado no modelo homogêneo do Processo Pontual (VaRpp) descrito anteriormente, onde o número de pontos em um dado intervalo segue uma distribuição de Poisson, com média proporcional ao tamanho do intervalo, e a ocorrência de pontos em intervalos separados é mutuamente independente (Coles, 2001). Uma vez definidos os parâmetros de formato, escala e localização pode-se calcular o VaRpp. Nesse trabalho utilizou-se a formulação de VaR para modelos Processo Pontual proposta por Tsay (2002), como segue:

$$\mathrm{VaR_{pp}} = \begin{cases} \beta - \frac{\alpha}{\xi}\{1 - [-n\ln(1-p)]^{\xi}\} & \xi = 0 \\ \beta + \alpha\ln[-n\ln(1-p)] & \xi \neq 0 \end{cases} \tag{33}$$

Onde ξ é o parâmetro de formato, α é o parâmetro de escala, β é o parâmetro de localização e 1 menos p é o limite do intervalo de confiança.
No caso dos modelos não condicionais, os parâmetros são gerados em função do histórico do índice Ibovespa definido, ajustados pela diferença do logaritmo dos retornos.
Para os modelos condicionais foram incluídas 3 variáveis para o cálculo dos parâmetros de formato e escala para o modelo DGP, e formato, escala e localização, para o modelo Processo Pontual. São elas:

X_1 – volatilidade gerada a partir do modelo GARCH(1,1) definido como modelo autorregressivo tradicional para VaR condicional;
X_2 – variável dummy (0,1) sendo 1 sempre que o logaritmo do retorno do índice Ibovespa superar o limite definido para o modelo; e
X_3 – variável representando uma variável de volatilidade qualitativa, sendo o número de dias entre t-1 e t-5 no qual o logaritmo do retorno do índice Ibovespa superou o limite definido para o modelo.

Estas variáveis foram definidas por Tsay (2002) para o cálculo do VaR não homogêneo calculado para uma série de retornos da ação da companhia IBM.
Além das três variáveis acima, o autor também considera outras duas. A primeira representa os dias da série compreendidos no quarto trimestre do ano, e a segunda é uma variável de tendência anual. Contudo, nenhuma das duas variáveis contribuíram para melhorar os resultados dos modelos definidos neste trabalho.
Conforme já mencionado, foi selecionado o período histórico de 11/03/1997 a 31/10/2008 como amostra para avaliação e construção dos modelos VaR baseados na TVE. Estes modelos necessitam de históricos mais longos para elaboração dos modelos porque são baseados em eventos extremos, que tendem a ocorrer com menor frequência.
A aderência dos modelos será testada de 03/11/2008 a 30/10/2009 ("backtesting"). Neste período o índice apresentou forte volatilidade por conta da crise financeira internacional conhecida como a crise dos títulos americanos "Subprime".
A previsão será realizada com intervalo de confiança de 99% e horizonte de previsão de 1 dia, para uma posição comprada de R$ 10.000.000,00. Assim sendo, os testes de VaR se preocuparão com os movimentos de queda do índice Ibovespa.
No caso do modelo Linear Normal e dos modelos autorregressivos o cálculo da volatilidade considerou distribuição normal e período de 5 anos de histórico anteriores à realização dos testes.

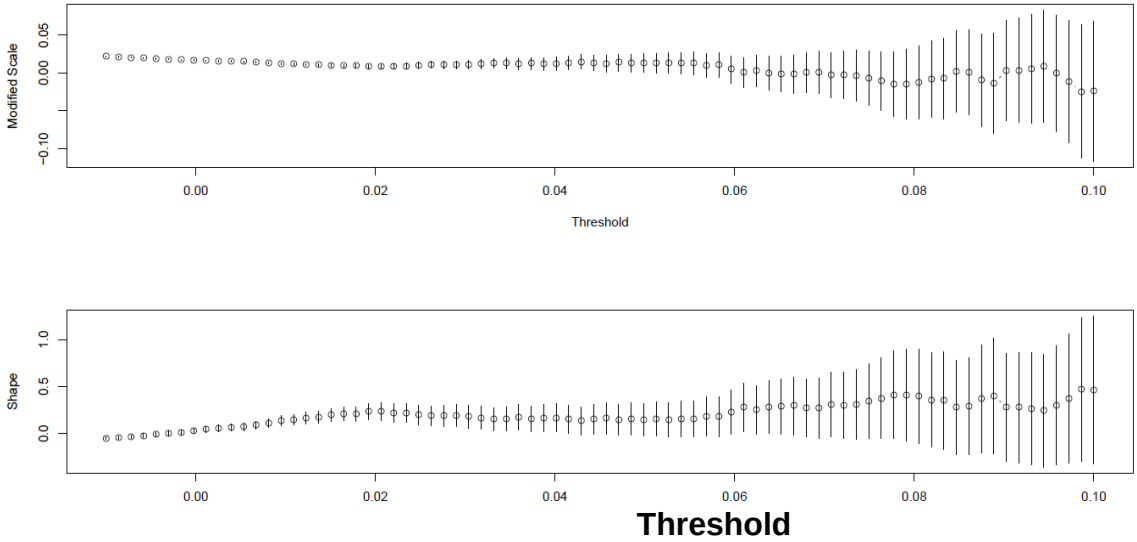
Os cálculos dos parâmetros para os modelos TVE e GARCH apresentados neste trabalho e “backtesting” dos modelos foram realizados através do software R. Para os parâmetros dos modelos TVE foi utilizado o pacote ISMEV, criado a partir da teoria descrita em Coles (2001). Já os cálculos dos parâmetros dos modelos GARCH e “backtesting” de todos os modelos foi utilizado o pacote RUGARCH. Todos os arquivos são disponibilizados gratuitamente através do site CRAN-R.[6]

5. Resultados

5.1 Modelos não condicionais

Um dos desafios dos modelos VaRDGP e VaRPP é definir o limite da série para definição dos eventos extremos. Coles (2001) propõe uma análise gráfica através dos diversos possíveis limites em relação aos parâmetros de formato e escala, para o acúmulo de chuva diária no sudoeste da Inglaterra de 1914 a 1962. Nesse trabalho foi realizada a mesma análise para a série do Ibovespa de 1997 a 2008, conforme demonstrado na figura 01.

Figura 01 - Teste de limites para o VaRPP e VaRDGP



Fonte: Elaborado pelos autores

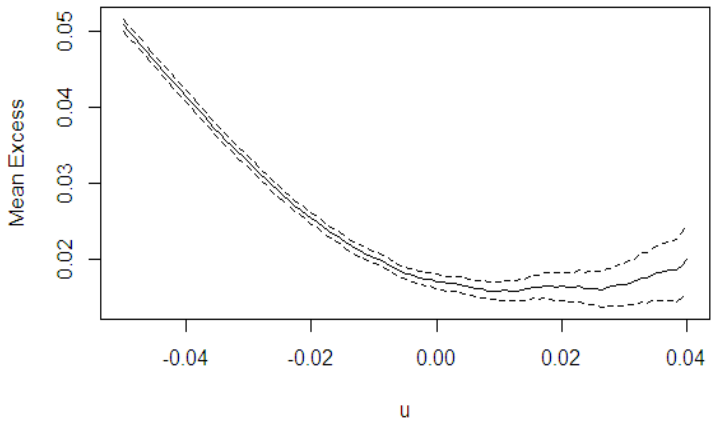
Essa análise permite avaliar em quais limites os parâmetros de formato e escala encontram-se estáveis. No exemplo citado o autor escolhe o limite máximo antes dos sinais de perturbação no gráfico. Os sinais de perturbação são identificados quando os pontos do gráfico começam a oscilar para cima ou para baixo em relação aos limites imediatamente anteriores.

A análise da figura 1 indica que os parâmetros formato e escala apresentam fortes sinais de perturbação a partir do limite de 8% e sinais mais suaves de perturbação a partir do limite de 6%, indicando que os limites imediatamente anteriores a estas porcentagens podem ser pontos de partida representativos para avaliação.

Outra avaliação gráfica utilizada pelo autor é a análise da média dos resíduos contra os limites, aplicando para o índice Dow Jones de 1996 a 2000. A figura 02 demonstra essa análise para o índice Ibovespa de 1997 a 2008.

Figura 02 - Teste de limites para o VaRPP e VaRDGP com dados do Ibovespa, 1997 a 2008

[6] Para maiores detalhes vide http://cran.r-project.org/



Fonte: Elaborado pelos autores

O gráfico indica que a média dos resíduos apresenta uma variação significativa a partir de limite de 3%, o que pode ser interpretado como um ponto de partida para avaliação do limite adequado para a modelagem do índice Ibovespa.

Essas análises gráficas aplicadas por Coles permitem ter uma ideia do ponto de partida para a descoberta do limite ideal, mas os resultados não parecem precisos e conclusivos.

Mendes (1999) realizou uma análise da série Ibovespa, Merval, IPyC e IPSA, sendo esses os índices das ações dos mercados do Brasil, Argentina, México e Chile para um modelo de valores extremos DGP. Os limites foram definidos a partir da análise das séries e seleção dos eventos que excederam este limite, de modo que os excessos representaram 5% da amostra total.

Ao realizar o mesmo tratamento para o período analisado temos 2882 eventos na amostra total. Desta forma, deve-se trabalhar com o limite que gere um número de excessos de aproximadamente 145 eventos para que representem 5% do total de eventos da amostra. O limite que proporciona esta quantidade de excessos é 3,57%.

Com o objetivo de avaliar o nível de sensibilidade dos limites ao valor de VaR gerado foram testadas algumas possibilidades. A tabela 01 demonstra o limite no qual os retornos são considerados, a quantidade de eventos abaixo deste limite, a porcentagem de excessos sobre a quantidade total de eventos na amostra (2882), os parâmetros de localização, escala e formato e o valor de VaR para uma posição comprada do índice de R$ 10.000.000,00. Nesta avaliação os parâmetros e o VaR foram calculados a partir do modelo Processo Pontual para TVE.

Tabela 01 - Avaliação de limites

Limite	Excessos	% da série	Localização	Escala	Formato	VaR (R$)	VaR[7] %
VaRPP							
3,0%	222	7,70%	0,0802 (0,0026)	0,0181 (0,0000)	0,0450 (0,0332)	(629.975,25)	6,30%
3,5%	152	5,27%	0,0813 (0,0039)	0,0186 (0,00191)	0,0285 (0,0634)	(637.082,47)	6,37%
3,57%	145	5,03%	0,0819 (0,0040)	0,0187 (0,0019)	0,0182 (0,0639)	(646.783,66)	6,47%
4,0%	106	3,68%	0,0846 (0,0047)	0,0203 (0,0023)	0,0052 (0,0799)	(657.430,82)	6,57%
4,5%	77	2,67%	0,0862	0,0218	0,0037	(659.012,38)	6,59%

[7] VaR% = VaR dividido pelo valor da posição comprada total de R$ 10.000.000,00

			(0,0053)	(0,0027)	(0,1011)		
5,0%	56	1,94%	0,0887 (0,0063)	0,0244 (0,0037)	0,0131 (0,1386)	(657.924,23)	6,58%
VaRDGP							
Limite	Excessos	% da série	Localização	Escala	Formato	VaR (R$)	VaR %
3,0%	222	7,70%	N/A	0,0127 (0,0014)	0,2440 (0,0868)	(538.148,02)	5,38%
3,5%	152	5,27%	N/A	0,0141 (0,0019)	0,2390 (0,1075)	(558.083,68)	5,58%
3,57%	145	5,03%	N/A	0,0141 (0,0019)	0,2429 (0,1113)	(558.401,31)	5,58%
4,0%	106	3,68%	N/A	0,0158 (0,0026)	0,2243 (0,1353)	(585.344,66)	5,85%
4,5%	77	2,67%	N/A	0,0183 (0,0034)	0,1657 (0,1531)	(636.011,79)	6,36%
5,0%	56	1,94%	N/A	0,0228 (0,0046)	0,0587 (0,1553)	(736.389,28)	7,36%

Fonte: Elaborado pelos autores

De maneira geral, percebe-se que dentro do intervalo de 3,0% a 5,0% o valor do VaR calculado não apresenta variação de perdas significativas em relação ao valor da posição comprada de R$ 10.000.000,00. Para os valores de VaRPP a menor variação é de 6,30% e a maior variação é de 6,59%. Para os valores de VaRDGP a menor variação é de 5,38% e a maior variação é de 7,36%. Esses resultados indicam que o VaR parece pouco sensível a variação de limites no intervalo selecionado.

Desta forma, assim como Mendes (1999), consideraremos o limite no qual o número de excessos representa 5% da série para a construção dos modelos TVE não condicionais, sendo este limite 3,57%.

Foi realizada uma avaliação através dos gráficos de probabilidade e quantil para os modelos gerados a partir do limite de 3,57%. Por esta avaliação espera-se que a linha representando o modelo esperado e os pontos do modelo empírico, baseado nos dados observados, estejam alinhados. A figura 03 indica uma forte aproximação entre o modelo esperado e o modelo empírico para o modelo DGP. Já no caso da figura 04, para modelo PP, nota-se uma aproximação menor entre o modelo esperado e o modelo empírico. Ou seja, para o limite de 3,57% os gráficos indicam que o modelo DGP pode ser o modelo melhor ajustado para a série Ibovespa, no período estudado.

Figura 03 - Demonstração da aderência do modelo de VaRDGP não condicional, série do Ibovespa, 1997 a 2008

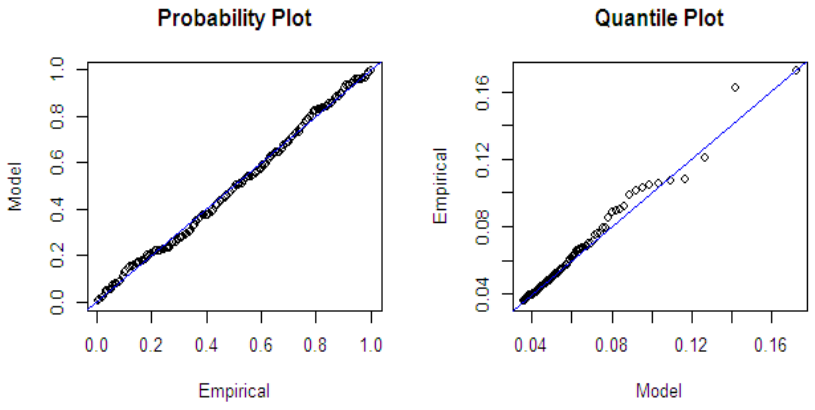
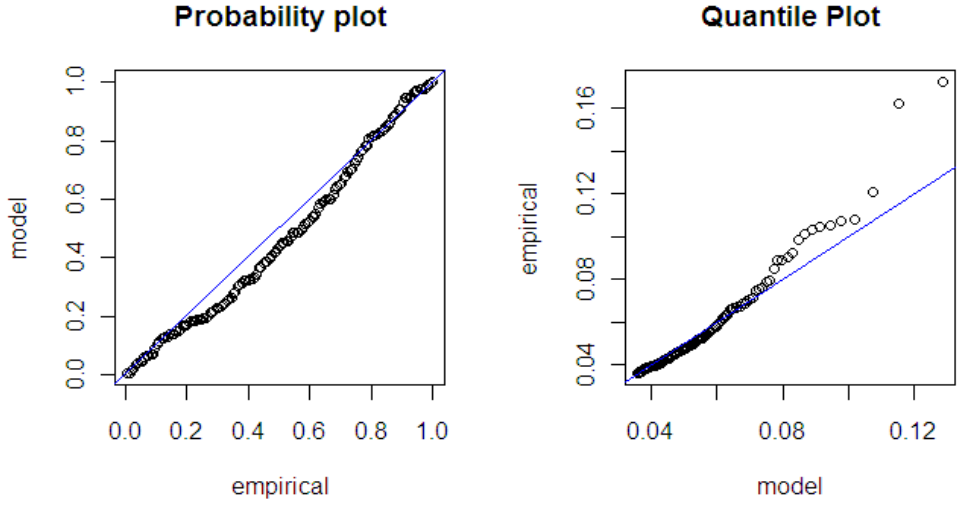


Figura 04 - Demonstração da aderência do modelo de VaRPP não condicional, série do Ibovespa, 1997 a 2008



Devido ao comportamento volátil do retorno da série Ibovespa os retornos considerados para os cálculos do VaRPP e VaRDGP foram transformados pela fórmula Ln(Rt / Rt-1). Desta forma, a série passou a apresentar um comportamento estacionário[8].

Para um VaR com intervalo de confiança de 99% espera-se que o retorno da série do Ibovespa ultrapasse o valor calculado pelo modelo em 1% dos casos. A amostra da série selecionada possui 247 eventos (1 ano) para o período de crise selecionado, desta forma, espera-se que o retorno da série ultrapasse o valor calculado pelos modelos VaR selecionados em 2,47 casos.

Para avaliar a aderência desses modelos utilizou-se um teste binomial de Kupiec (Dowd, 2008), representando o "backtesting" dos modelos, o qual permite avaliar a probabilidade de ocorrência de fracassos dentro de uma amostra de n observações. Sendo:

$$h_t = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} se \begin{cases} L_t > VaR_t \\ L_t \leq VaR_t \end{cases}$$

Onde L_t representa as perdas no período t, 1 representa as perdas excedendo o VaR e 0 os demais eventos.

A estatística p apresentada pelo teste permite avaliar a significância dos resultados apresentados. Para um intervalo de confiança de 99% temos p= 1- α =0,01, onde:

$$\begin{cases} H_0: P = 0{,}01 \\ H_1: P > 0{,}01 \end{cases}$$

Ou seja, dado um número n de eventos testados espera-se que o modelo apresente np excessos na hipótese nula. Desta forma temos que:

$$\begin{cases} \mathrm{H}_0 : \text{O método estima corretamente o quantil condicional} \\ \mathrm{H}_1 : \text{O método tem um erro sistemático, fornecendo várias violações} \end{cases}$$

Por isso, se o p-valor é menor que 1% rejeita-se a hipótese nula, ou seja, rejeita-se a hipótese de que o modelo prevê corretamente o retorno do índice Ibovespa.

[8] O teste de Dick Fuller realizado indica que a série passou a apresentar um comportamento estacionário, conforme esperado para a série do índice Ibovespa transformada pelo logaritmo da primeira diferença.

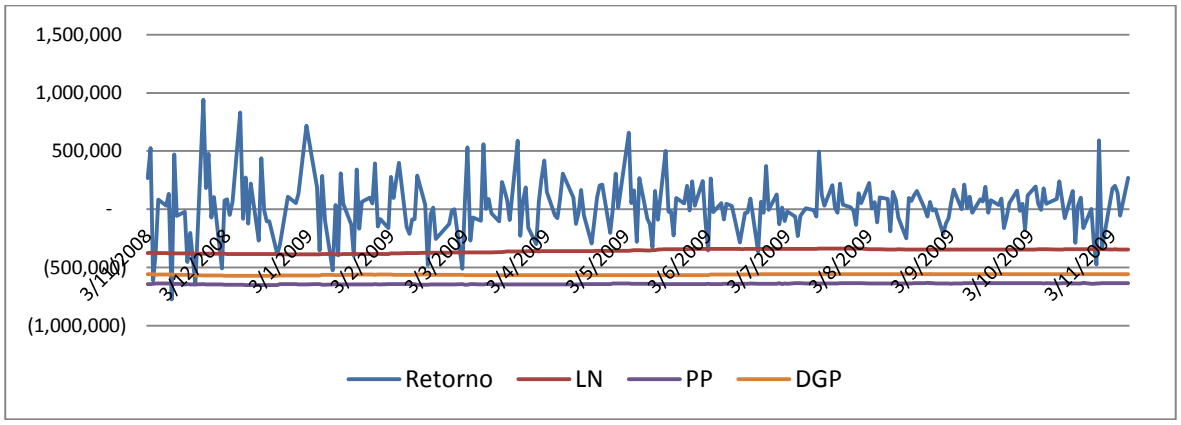
Seguem os resultados verificados para os modelos de VaR não condicionais testados na tabela 02.

Tabela 02 - Resultado para o VaRLN,VaRDGP e VaRPP, série do Ibovespa, 1997 a 2008

	VaRLN	VaRDGP	VaRPP
Violações	15	3	1
P-valor	0,0000	0,7680	0,2731

Observa-se que os modelos VaRDGP e o VaRPP apresentaram um número de violações menor do que o VaRLN. Além disso, o p-valor dos modelos VaRPP e VaRDGP indica que não se rejeita a hipótese de que os modelos são adequados para o nível de significância de 99% estabelecido. Ou seja, não se rejeita a hipótese nula de que o VaR estima corretamente os retornos. O VaRDGP, entretanto, estimou melhor as perdas do que o VaRPP. Já o modelo VaRLN apresentou um número de violações bem maior e p-valor inferior a 1%, indicando que o modelo não foi capaz de prever as maiores perdas no período de crise definido para este trabalho.
Os três modelos apresentaram pouca variação ao longo do período analisado, conforme demonstrado na figura 05, característica esta típica dos modelos não condicionais.

Figura 05 – Comparação dos modelos VaR não condicionais, série do Ibovespa, 1997 a 2008



Essa condição demonstra que apesar dos modelos VaRPP e VaRDGP terem previsto de maneira mais precisa a magnitude das perdas, devido a grande volatilidade dos retornos diários do índice Ibovespa, utilizar modelos não condicionais para avaliar perdas durante um período de crise pode não ser a decisão mais adequada. Como planejado, passe-se então ao teste da teoria dos valores extremos a uma metodologia de VaR condicional.

5.2 Modelos condicionais

Para definição do modelo condicional mais adequado foi realizada uma avaliação da correlação dos retornos da série Ibovespa com as suas defasagens temporais e um teste para avaliar a presença de heteroscedasticidade nas observações.
O teste de Lagrange Multiplier apresentou como resultado a estatística de 391,73 com p-valor 0, indicando a presença de heteroscedasticidade nas observações da série Ibovespa.
Considerando a análise das defasagens temporais através dos gráficos ACF e PACF, e o resultado do teste de Lagrange Multiplier, este trabalho avaliou a possibilidade de melhor aderência dos modelos AR(1)-EGARCH(2,2), AR(1)-EGARCH(2,1), AR(1)-EGARCH(1,1), EGARCH(2,2) e EGARCH(1,1), e dos modelos AR(1)-IGARCH(2,2), AR(1)-IGARCH(2,1),

AR(1)-IGARCH(1,1), IGARCH(2,2) e IGARCH(1,1). Essa avaliação foi realizada através da comparação do resultado dos testes de AIC (Akaike Information Criterion) e BIC (Bayesian Information Criterion) separando-se as possibilidades de defasagens mencionadas para cada tipo de modelo GARCH selecionado, conforme tabela 03.

Tabela 03 – Comparação dos modelos modelos GARCH realizados, série do Ibovespa, 2003 a 2008

Testes	AIC	BIC
AR(1)-EGARCH (2,2)	-5,27590	-5,23460
AR(1)-EGARCH (2,1)	-5,27910	-5,24600
AR(1)-EGARCH (1,1)	-5,26580	-5,24100
EGARCH (2,2)	-5,26580	-5,24100
EGARCH (1,1)	-5,26430	-5,23530
AR(1)-IGARCH (2,2)	-5,23780	-5,20470
AR(1)-IGARCH (2,1)	-5,19570	-5,17090
AR(1)-IGARCH (1,1)	-5,16160	-5,14090
IGARCH (2,2)	-5,16160	-5,14090
IGARCH (1,1)	-5,16000	-5,13520

Desta forma, pode-se definir os seguintes modelos como os mais adequados para comparação aos modelos TVE:

1- AR(1)-EGARCH(2,1)
2- AR(1)-IGARCH(2,2)

Além disso, pode-se testar também o modelo GARCH (1,1) dado que o modelo GARCH é o mais comum na literatura sobre o tema.

Os modelos estimados para o índice Ibovespa no período de 31/10/2003 a 31/10/2008 resultaram nas seguintes estimativas:

1- Modelo AR(1)-EGARCH(2,1)

$$r_t = 0{,}000748 + 0{,}013604 r_{t-1} + a_t \tag{34}$$

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t \tag{35}$$

$$\text{Log}\,\sigma_t^2 = -0{,}482559 + 0{,}940203 \ln\left(\sigma_{j,t-1}^2\right) - 0{,}100973 \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{\sigma_{t-1}^2}} + 0{,}249862 \frac{\varepsilon_{t-2}}{\sqrt{\sigma_{t-2}^2}} - 0{,}269603 \left[\frac{|\varepsilon_{t-1}|}{\sqrt{\sigma_{t-1}^2}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right] + 0{,}121867 \left[\frac{|\varepsilon_{t-2}|}{\sqrt{\sigma_{t-2}^2}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right] \tag{36}$$

Onde $\mathbf{r_t}$ é o retorno do Ibovespa previsto e $\boldsymbol{\sigma_t}$ a volatilidade do Ibovespa

2- Modelo AR(1)-IGARCH(2,2)

$$r_t = 0{,}001277 - 0{,}004487 r_{t-1} + a_t \quad (40)$$

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t \quad (41)$$

$$\sigma_t^2 = 0{,}000005 + 0{,}033602 a_{t-1}^2 + 0{,}088919 a_{t-2}^2 + 0{,}553353 \sigma_{t-1}^2 + 0{,}324126 \sigma_{t-2}^2 \quad (42)$$

3- Modelo GARCH (1,1)

$$r_t = 0{,}001360 + 0{,}011150 a_{t-1} - 0{,}015243 r_{r-1} + a_t \quad (43)$$

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t \quad (44)$$

$$\sigma_t^2 = 0{,}000011 + 0{,}089437 a_{t-1}^2 + 0{,}880243 \sigma_{t-1}^2 \quad (45)$$

Para geração dos modelos TVE foi realizado inicialmente uma avaliação através dos gráficos de probabilidade e quantil dos resíduos. Por esta avaliação espera-se que a linha representando os resíduos do modelo esperado e os pontos representando os resíduos do modelo empírico, baseado nos dados observados, estejam alinhados.
Os modelos TVE condicional DGP e PP foram gerados considerando o mesmo limite de 4,0%, ao invés do limite de 3,57% utilizado na geração dos modelos TVE não condicionais.
Além disso, as três variáveis explicativas foram consideradas para a geração dos parâmetros dos modelos DGP e PP, exceto a variável X_2[9] que foi desconsiderada da geração dos parâmetros do modelo PP.
Após esses ajustes nos limites e variáveis (modelo PP) os gráficos de probabilidade e quantil dos resíduos dos modelos esperados e empíricos apresentaram maior alinhamento, conforme figuras 07 e 08.

Figura 07 - Demonstração da aderência do modelo de VaRDGP condicional, série do Ibovespa, 1997 a 2008

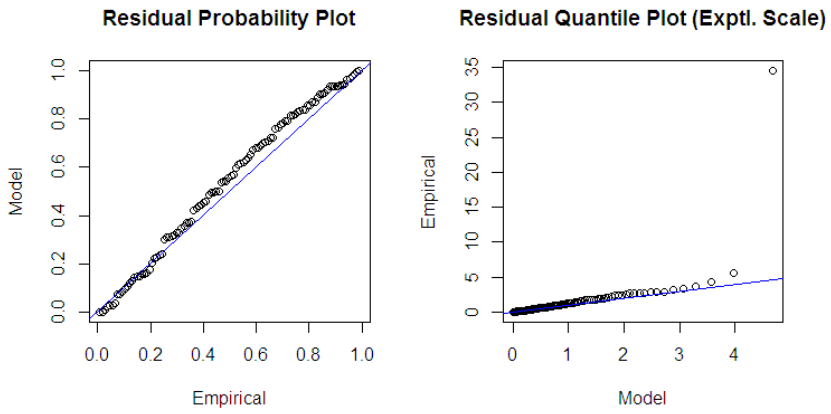
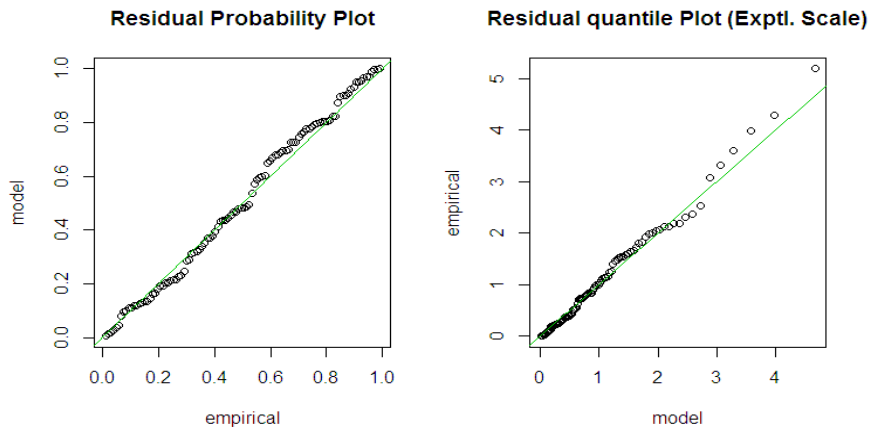


Figura 08 - Demonstração da aderência do modelo de VaRPP condicional, série do Ibovespa, 1997 a 2008

[9] Variável dummy (0,1) sendo 1 sempre que o logaritmo do retorno do índice Ibovespa superar o limite definido para o modelo



A tabela 04 indica o valor dos parâmetros obtidos para o VaRDGP e VaRPP. Abaixo de cada valor encontra-se o erro padrão entre parênteses.

Tabela 04 - Tabela de parâmetros para o VaRDGP e VaRPP condicionais, série do Ibovespa, 1997 a 2008

VaRDGP				
Parâmetro	Intercepto	X_1	X_2	X_3
Escala	-0,0227 (0,0000)	1,1301 (0,0018)	-0,0002 (0,0000)	0,0069 (0,0000)
Formato	-0,0915 (0,1204)	-0,5665 (0,0000)	-0,172 (0,1204)	-0,1871 (0,0000)
VaRPP				
Parâmetro	Intercepto	X_1	X_2	X_3
Localização	0,0618 (0,0000)	-0,0224 (0,0000)	N/A	0,0578 (0,0085)
Escala	0,0147 (0,0000)	-0,0340 (0,0000)	N/A	0,0126 (0,0032)
Formato	0,0883 (0,0000)	-0,0206 (0,0000)	N/A	-0,0145 (0,0236)

O “backtesting” dos modelos gerados para o período testado é apresentado na tabela 05, onde o p-valor foi calculado a partir do teste binomial de Kupiec.

Tabela 05 - Resultado para o VaREGARCH, VaRIGARCH, VaRGARCH, VaRDGP e VaRPP condicionais, série do Ibovespa, 2003 a 2008 série do Ibovespa, 2003 a 2008 (Fernando, o período está certo?)

	VaREGARCH	VaRIGARCH	VaRGARCH	VaRDGP	VaRPP
Violações	6	1	2	2	4
P-valor	0,0614	0,2731	0,7327	0,7327	0,3880

Os resultados indicam que os modelos VaRDGP e o VaRPP apresentaram um número de violações menor do que o modelo VaREGARCH, para o Ibovespa, no perído de 2003 a 2008 (Fernando, confere?) Além disso, o p-valor dos modelos VaRPP e VaRDGP estão adequados para o nível de significância de 99% estabelecido. Ou seja, não se rejeita a hipótese nula de que o VaR estima corretamente os retornos. Entre os dois modelos o VaRDGP foi o que apresentou o número de violações mais próximo do valor esperado de 2,47.

Os modelos VaREGARCH, VaRIGARCH e VaRGARCH também apresentaram p-valor adequados para o nível de significância de 99% estabelecido. Ou seja, não se rejeita a hipótese nula de que o VaR estima corretamente os retornos.
Entre todos os modelos testados o VaRGARCH e VaRDGP foram os modelos que apresentaram um número de violações mais próximo do valor esperado de 2,47.
As figuras 09 e 10 indicam que os modelos VaREGARCH, VaRGARCH, VaRIGARCH e VaRDGP apresentaram variações constantemente ao longo do período de teste dos modelos, conforme esperado dos modelos condicionais. Já o modelo VaRPP somente apresentou variações nos períodos onde o retorno do índice Ibovespa excede o limite estabelecido nos períodos imediatamente anteriores, indicando uma forte sensibilidade à variável X_3[10].

Figura 09 – Comparação dos modelos VaR condicionais tradicionais **,** série do Ibovespa, 2003 a 2008 (Fernando, o período está certo?)

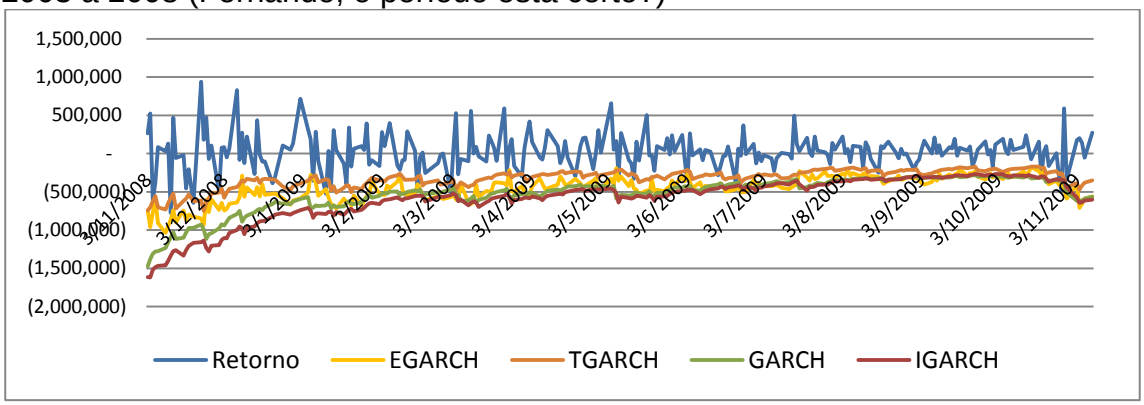
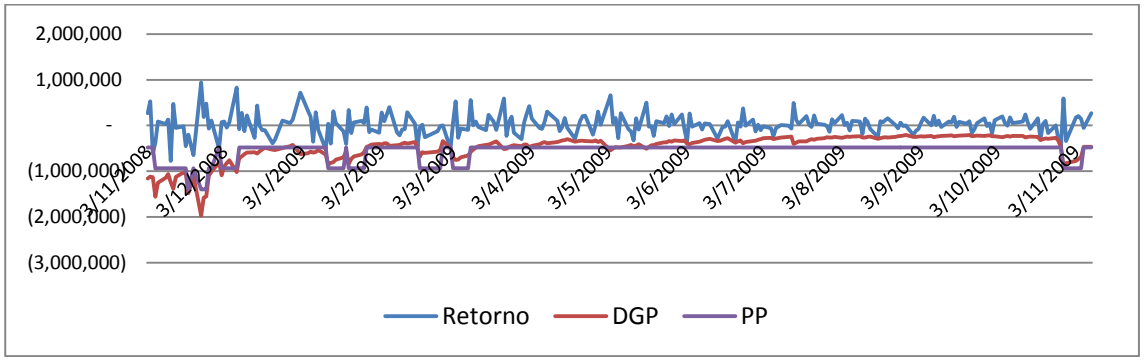


Figura 10 – Comparação dos modelos VaR condicionais TVE **,** série do Ibovespa, 2003 a 2008 (Fernando, o período está certo?)



6. Conclusões

Os testes empíricos para comparar modelos de VaR não condicionais e condicionais, tanto por abordagens tradicionais como pela TVE, foram aplicados a dados do Ibovespa, de 2003 a 2008 (Fernando, confere ou pega desde 1997?)
Os resultados foram comparados através da quantidade de violações geradas por cada modelo. Entenda-se por violações a quantidade de eventos cujas perdas superaram o valor estimado pelo modelo VaR avaliado.
Além do número de violações foi avaliada a significância dos resultados através do teste de Kupiec onde, dado o intervalo de confiança definido de 99%, rejeita-se a hipótese nula

[10] Variável representando uma variável de volatilidade qualitativa, sendo o número de dias entre t-1 e t-5 no qual o logaritmo do retorno do índice Ibovespa superou o limite definido para o modelo

de que o modelo estima corretamente as perdas com o índice Ibovespa, se o p-valor gerado pelo teste for menor do que 1%. Consequentemente, não se rejeita a hipótese nula se o p-valor for maior de 0,01.

Os testes comparando modelos não condicionais indicam que o VaRDGP e o VaRPP, ambos construídos a partir da TVE, apresentaram um número de violações menor do que o VaRLN, e p-valor acima de 0,01, indicando que não se rejeita a hipótese nula de que os modelos estimam corretamente as perdas geradas pelo índice Ibovespa. Além disso, o VaRDGP apresentou uma quantidade de violações mais próxima do valor esperado de 2,47, o que sugere que o modelo é mais adequado do que o VaRPP. Já o modelo VaRLN apresentou um número de violações bem maior e p-valor inferior a 1%, indicando que o modelo não foi capaz de prever as maiores perdas no período de crise definido para os testes. Esses modelos não condicionais, porém, podem não ser os mais adequados para avaliar perdas em períodos de crise devido a grande volatilidade dos retornos diários do índice Ibovespa.

No que diz respeito aos modelos condicionais testados, os resultados sobre o índice Ibovespa indicam que os modelos VaRDGP e o VaRPP , ambos construídos a partir da TVE, apresentaram um número de violações menor do que o modelo VaREGARCH testado, e p-valor acima de 0,01, indicando que não se rejeita a hipótese nula de que os modelos estimam corretamente as perdas geradas pelo índice Ibovespa. Já o modelo VaRGARCH apresenta um número de violações igual ao modelo VaRDGP, e ambos apresentaram uma quantidade de violações mais próxima do valor esperado de 2,47, o que sugere que esses modelos sejam mais adequados do que os modelos de VaR calculados pela TVE.

O modelo VaREGARCH apresentou p-valor acima de 0,01, mas o número de violações é superior ao dos modelos TVE.

Ainda sobre os modelos condicionais, vale ressaltar que os modelos VaREGARCH, VaRGARCH, VaRIGARCH e VaRDGP apresentaram variações ao longo do período de teste do modelo, similares ao comportamento do índice Ibovespa, comportamento este esperado dos modelos condicionais. Já o modelo VaRPP somente apresentou variações nos períodos onde o retorno do índice Ibovespa excede o limite estabelecido nos períodos imediatamente anteriores, devido à forte sensibilidade à variável X_3, uma variável de volatilidade qualitativa indicando o número de dias entre t-1 e t-5 no qual o logaritmo do retorno do índice Ibovespa superou o limite definido para o modelo.

Desta forma, pode-se concluir que as estimativas realizadas sugerem que os modelos de VaR calculados a partir da TVE sejam mais adequados para a previsão de perdas na crise financeira de 2008, em comparação com os modelos VaR paramétrico linear por distribuição normal e EGARCH por distribuição normal. Entretanto, não encontrou-se evidência que sejam mais adequados do que os modelos VaR GARCH por distribuição normal e IGARCH por distribuição normal.

Vale ressaltar que os modelos TVE foram criados para prever eventos raros e de alta severidade, podendo esses ser utilizados para prever as perdas potenciais em períodos de crise. Os resultados apresentados mostraram-se consistentes com esta condição, porém, por considerar em sua distribuição somente eventos extremos, seu uso em períodos de comportamento normal do mercado pode gerar previsões extremamente conservadoras, o que pode ser inadequado para certas análises de risco.

Referências Bibliográficas

ALEXANDER, Carol. **Value at Risk Models:** Market Risk Analysis, Chichester: John Wiley, 2008. 449 p.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS E TÉCNICAS. **NBR 6023**: informação e documentação: referências: elaboração. Rio de Janeiro, 2002. 24p.

_____. **NBR 10520**: informação e documentação: citações em documentos: apresentação. Rio de Janeiro, 2002. 7p.

_____. **NBR 14724**: informação e documentação: trabalhos acadêmicos: apresentação. Rio de Janeiro, 2002. 6p.

_____. **NBR 6024**: informação e documentação: numeração progressiva das seções de um documento. Rio de Janeiro, 2003. 2p.

_____. **NBR 6034**: preparação de índice de publicações. Rio de Janeiro, 1989. 3p.

_____. **NBR 6027**: informação e documentação: sumário: apresentação. Rio de Janeiro, 2003. 2p.

_____. NBR: resumos. Rio de Janeiro, 1990. 3p.

BANCO CENTRAL DO BRASIL. BACEN. Legislação e Normas. 2012. Disponível em: < http://www.bcb.gov.br >. Acesso em: 30 mar. 2012.

BASLE COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION. **Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risks**, Basle Report, No. 24, Bank for International Settlements, 1996.

BASLE COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION. **Revisions to the Basel II market risk framework**, Basle Report, Bank for International Settlements, 2011.

BERKOWITZ, Jeremy. **A Coherent Framework for Stress-Testing.** Working paper. Board of Governors of Federal Reserve, 1999.

BEST, Philip. **Implementing Value at Risk**. Editora Wiley, 1998.

BOLLERSLEV, T. Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity. **J. Econ.**, 31, 307- 327, 1986.

BOX, G.E.P.; JENKINS, G.M. **Time Series Analysis, Forecasting, and Control**. Oakland, CA: Holden-Day, 1970.

COLES, Stuart. **An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values**. London:Springer, 2001. 224 p.

DACOROGNA, M.M.; GENCAY, R; MÜLLER, UA; OLSEN, R.B. ; PICTET, O.V. **An Introduction to High Frequency Finance**, San Diego: Academic Press, 2001.

DANÍELSSON, Jon. **Financial Risk Forecasting**. Editora Willey, 2011.

DARIO, Alan G. Utilização da Teoria dos Valores Extremos para o estabelecimento de cenários de estresse: o caso da BM&F, Artigo técnico, **Resenha BM&F** nº 161, 2003.

DAVISON, A. C. Modelling excesses over high thresholds, with an application. In Statistical Extremes and Applications, pp. 461–482. Statistical Models. **Cambridge University Press**, 1984.

DAVISON, A. C.; SMITH, R. L. Models for exceedances over high thresholds (with discussion). **Journal of the Royal Statistical Society**: Series B (Statistical Methodology)52:393–442, 1990.

DAWSON, T. H. Maximum wave crests in heavy seas. **Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering** - Transactions of the AMSE 122, 222-224, 2000.

DOWD, Kevin. Beyond Value at Risk: **The New Science of Risk Management**. John Wiley and Sons. Chichester, 1998.

DOWD, Kevin. **Back-Testing Market Risk Models**. Handbook of Finance, John Wiley & Sons, Inc, 2008.

DUFFIE, D.; PAN J. An overview of Value-at-Risk. **J. Derivat.**, 7: 7 –49, 1997.
ECONOMÁTICA. Base de dados. Acesso em 02 jan. 2012.

EMBRECHTS, P.; Klüppelberg, C.; Mikosch, T. **Modeling Extremal Events for Insurance and Finance**. Springer. New York, 1997.

ENGLE, R.F.. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. **Econometrica**, 50, 987-1007, 1982.

EUROPEAN BANK AUTHORITY. EU-wide stress testing. Março, 2011.

FISHER, R.A.; TIPPETT, L.H.C. Limiting Forms of the Frequency Distribution of the Largest or Smallest Member of a Sample. **Proccedings of the Cambridge Philosophical Society**, n.24, p.180-190, 1928.

GNEDENKO, B. V. “Sur la distribution limite du terme maximum of d’une série Al´eatorie,” **Annals of Mathematics**, 44, 423–453, 1943.

GLOSTEN, L. R., JAGANNATHAN, R.; RUNKLE, D. E. On the relation between the expected value and the volatility of nominal excess return on stocks. **Journal of Finance** 48: 1779–1801,1993.

HAUKSSON, H.A.; DACOROGNA, M.; DOMENIG, T.; MÜLLER, U.;

SAMORODNITSKY, G. Multivariate extremes, aggregation and risk estimation. Manuscript. Ithaca. NY: **School of Operations Research and Industrial Engineering**. Cornell University, 2003.

HOSKING, J. R. M. Maximum likelihood estimation of the parameters of the generalized extreme value distribution. **Applied Statistics** 34, 301-310, 1985.

JENKINSON, A. F. The frequency distribution of the annual maximum (or minimum) of meteorological elements, **Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society**, 81,158–171, 1955.

JORION, Phillippe. **Value at Risk**: The New Benchmark for Controlling Market Risk. Irwin. Chicago, 1996.

JORION, Phillippe. **Value at Risk**: A nova fonte de referência para a gestão de riscos financeiros, McGraw Hill, 2003.

KUPIEC, Paul. Stress Testing in a Value at Risk Framework. **Journal of Derivatives**, 6, pp. 7–24, 1998.

LAVENDA, B. H.; CIPPOLONE, E. Extreme value statistics and thermodynamics of earthquakes: aftershock sequences. **Annali di geofisica**, 43, 967-982, 2000.

LINSMEIER, T.J.; PEARSON, N.D. Value at Risk. **Financ. Anal. J.**, 56(2): 47-67, 2000.

LONGERSTAEY, J. **Introduction to RiskMetrics**, 4th edition. Morgan Guaranty Trust Company, New York, 1996.

LONGIN, F. The Asymptotic Distribution of Extreme Stock Market Returns, **Journal of Business**, 69 (3), 383-408, 1996.

LOPES, Daniel C. **Análise quantitativa da volatilidade entre os índices Dow Jones, Ibovespa e S&P500**, Dissertação de mestrado, UFRS, 2006.

MANDELBROT, B. New methods in statistical economics. **J. Polit,Econ**., 71: 421 – 440, 1963.

MCNEIL, Alexander J. **Extreme Value Theory for Risk Managers**. ETH Zentrum, 1999.

MCNEIL, Alexander J.; FREY, Rudiger. Estimation of Tail Related Risk Measure for Heteroscedastic Financial Time Series: An Extreme Value Approach.
Quantitative Risk Management: concepts, techniques and tools. **Princiton University Press**, 2005.

MENDES, Beatriz V. M. **Computing Robust Risk Measures Using Extreme Value Theory**. In: XXI Encontro da Sociedade Brasileira de Econometria, 1999, Belém - Pará. Anais do XXI Encontro de Econometria, v. 1. p. 59-77, 1999.

MONTE-MOR, Danilo S. GEV **Long-Short Strategy**: uma nova modalidade quantitativa, I Encontro de Economia do Espírito Santo, 2010.
Moore, Gordon. Moore's Law: Past, Present and Future. **Electronics Magazine**, Vol. 38, No. 8. pp. 114-117, 1965.

NELSON, D. B. Stationarity and persistence in the GARCH(1,1) model. **Econometric Theory,** vol. 6, 318–334, 1990.

NELSON, D. B. Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach. **Econometrica,** vol 59, 347–370, 1991.

OLIVEIRA, Sandra C.; ANDRADE, Marinho G. Abordagem Bayesiana para modelos estocasticos com heterocedasticidade para os retornos Ibovespa. In: **19o Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística**, São Pedro – SP, 2010.

PICKANDS, J. The two-dimensional poisson process and extremal processes. **Journal of Applied Probability**, vol 8, 745-756, 1971.

PICKANDS, J. Statistical inference using extreme order statistics. **Annals of Statistics**, vol 3, 119-131, 1975.

PRESCOTT, P. & WALDEN, A. T. Maximum likelihood estimation of the parameters of the generalized extreme value distribution. **Biometrika** 67, 723-724, 1980.

SEYMOUR, A.J.; POLAKOW D.A. Coupling of Extreme-Value Theory and Volatility Updating with Value-at-Risk Estimation in Emerging Markets: A South African Test. **Multinational Financ. J.**, 7(1/2): 3 –23, 2003.

SHUMWAY, Robert H.; STOFFER, David S. **Time Series Analysis and Its Applications**, Springer, 3rd ed., 2011.

SMITH, R. L. Extreme value theory based on the r largest annual events. **Journal of Hydrology** 86, 27-43, 1986.

SOBRINHO, Nelson F. S. Extração da volatilidade do Ibovespa, **Resenha BM&F** No 144, 2001.

THOMPSON, M. L.; Reynolds, J.; Cox, L. H.; Guttorp, P.; Sampson, P. D. A.; review of statistical methods for the meteorological adjustment of tropospheric ozone. **Atmospheric Environment** 35, 617-630, 2001.

TSAY, Ruey S. **Analysis of Financial Time Series** – Financial Econometrics, John Wiley & Sons, Inc, pag 256-299, 2002.

ZIEGELMANN, F.A.; Pereira, P.L.V. Modelos de Volatilidade Estocástica com Deformação temporal: um estudo empírico para o índice IBOVESPA. **Pesquisa e Planejamento Econômico**, v. 27, n.2, 1997.