

Inspere
Mestrado Profissional em Economia

Guilherme Marcondes Machado

**Decomposição da Curva de Juros Real e
Nominal para o Brasil**

São Paulo
2021

Guilherme Marcondes Machado

Decomposição da Curva de Juros Real e Nominal para o Brasil

Dissertação apresentada ao programa de Mestrado Profissional em Economia como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Economia.

Orientador: Prof. Prof. Dr. Gustavo Barbosa Soares

Área de concentração: Finanças/ Macroeconomia

São Paulo
2021

Guilherme, Marcondes Machado

Decomposição da Curva de Juros Real e Nominal para o Brasil. /
Guilherme Marcondes Machado. – São Paulo, 2021.

42f.

Dissertação (Mestrado) –Insper, 2021.

Orientador: Prof. Dr. Gustavo Barbosa Soares

1. TERMO1. 2. TERMO2. 3. TERMO3. I. Guilherme Marcondes Machado. II. Decomposição da Curva de Juros Real e Nominal para o Brasil.

Guilherme Marcondes Machado

Decomposição da Curva de Juros Real e Nominal para o Brasil

Dissertação apresentada ao programa de Mestrado Profissional em Economia como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Economia.

Orientador: Prof. Prof. Dr. Gustavo Barbosa Soares

Área de concentração: Finanças/ Macroeconomia

Banca Examinadora

Prof. Dr. Gustavo Barbosa Soares
Insper

Prof. Dr. Diogo Abry Guillén
Insper

Prof. Dr. Marcelo Figueiredo Salomon
BWGI

RESUMO

O entendimento da dinâmica das estruturas da curva de juros e os prêmios implícitos na precificação dos ativos é de extrema importância não só para a academia quanto para a execução de políticas públicas e para os agentes do mercado. Utilizando-se do modelo criado por Abrahams, Adrian, Crump e Moench (2016), este trabalho procura decompor os prêmios existentes nas curvas brasileiras entre prêmios nominais, reais e de inflação e entender sua dinâmica ao longo do tempo. Para tal, foram utilizados os preços obtidos das negociações dos títulos federais no mercado secundário de janeiro de 2010 até outubro de 2021 e analisados os resultados obtidos pelo modelo com situações históricas recentes, onde os prêmios de fato se mostraram em patamares mais altos quando mais altas eram as incertezas políticas e econômicas do país e o risco de inflação de fato se mostrou mais alto quanto mais incerta era a expectativa da mesma. Já a inflação esperada do modelo se mostrou muito aderente às expectativas de mercado e à inflação realizada. Por fim, o prêmio nominal e o CDS apresentaram trajetórias coincidentes ao longo do período.

Palavras-chave: : Prêmio de Risco. Modelo AACM.

ABSTRACT

Understanding the dynamics of the interest curve structures and the implicit premiums in asset pricing is extremely important not only for academic purposes but also for the execution of public policies and the market agents. Using a model created by Abrahams, Adrian, Crump and Moench (2016), this work seeks to decompose the existing premiums in the Brazilian public bonds between nominal, real and inflation premiums and understand their dynamics over time. For this purpose, the prices obtained from the federal bonds trades in the secondary market from January 2010 to October 2021 were collected and the results obtained from the model, compared with recent historical situations, where the premiums were in fact shown at higher levels, the higher the political and economic uncertainties in the country and the risk of inflation proved to be higher the more uncertain was its expectation. The model's expected inflation proved to be very consistent with market expectations and actual inflation. Finally, the nominal premium and the CDS showed coincident trajectories over the period.

Keywords: Term Premium. AACM model.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Taxa de Juros Nominal	23
Figura 2 – Taxa de Juros Real	23
Figura 3 – Excesso de Retorno Nominal	24
Figura 4 – Excesso de Retorno Real	25
Figura 5 – Primeiro Fator (Nível)	25
Figura 6 – Segundo Fator (Inclinação)	26
Figura 7 – Terceiro Fator (Curvatura)	26
Figura 8 – Quarto Fator (Real 1)	27
Figura 9 – Quinto Fator (Real 2)	27
Figura 10 – Taxa de Juros Nominal de 1 ano	28
Figura 11 – Erro de Ajuste da Taxa Nominal de 1 ano	28
Figura 12 – Taxa de Juros Nominal de 5 anos	28
Figura 13 – Erro de Ajuste da Taxa Nominal de 5 anos	29
Figura 14 – Taxa de Juros Nominal de 10 anos	29
Figura 15 – Erro de Ajuste da Taxa Nominal de 10 anos	29
Figura 16 – Taxa de Juros Real de 1 ano	30
Figura 17 – Erro de Ajuste da Taxa Real de 1 ano	31
Figura 18 – Taxa de Juros Real de 5 anos	31
Figura 19 – Erro de Ajuste da Taxa Real de 5 anos	31
Figura 20 – Taxa de Juros Real de 10 anos	32
Figura 21 – Erro de Ajuste da Taxa Real de 10 anos	32
Figura 22 – Prêmio na Curva de Juros Nominal	33
Figura 23 – Curva Nominal Neutra ao Risco	33
Figura 24 – Decomposição da Curva de 1 ano	34
Figura 25 – Decomposição da Curva de 10 anos	34
Figura 26 – Prêmio na Curva de Juros Real	35
Figura 27 – Decomposição dos Prêmios de Risco para 10 anos	36
Figura 28 – Decomposição dos Prêmios de Risco para 5 anos	36
Figura 29 – Decomposição dos Prêmios de Risco para 2 anos	37
Figura 30 – Selic X Inflação Acumulada X Prêmios	37
Figura 31 – Inflação Esperada	39
Figura 32 – Inflação Esperada para 1 Ano	39
Figura 33 – Comparativo CDS x Prêmio de Risco do Modelo	40

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Juros Nominais	22
Tabela 2 – Juros Reais	23
Tabela 3 – Excesso de Retorno Nominal	24
Tabela 4 – Excesso de Retorno Real	25

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ACM2013	Adrian, Crump and Moench (2013)
AACM2016	Abrahams, Adrian, Crump and Moench (2016)
DI1	Futuro de Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia
BACEN	Banco Central Do Brasil
LTN	Letra do Tesouro Nacional, também conhecidas como Tesouro Prefixado
NTN-F	Notas do Tesouro Nacional - Série F, também conhecidas como Tesouro Prefixado com Juros Semestrais
NTN-B	Notas do Tesouro Nacional – Série B, também conhecidas como Tesouro IPCA
IPCA	Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo
VNA	Valor Nominal Atualizado
NSS	Nelson-Siegel-Svensson

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
1.1	Estrutura da Dissertação	10
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	11
2.1	Dos modelos a serem utilizados	11
2.1.1	Do Nelson-Siegel-Svensson:	11
2.1.2	Do PCA:	13
2.1.3	Do Modelo ACM:	14
2.1.4	Do Modelo AACM:	16
3	ANÁLISE DE DADOS	21
3.1	Mercado Brasileiro	21
3.2	Estruturas da Taxa de Juros	22
3.3	Excesso de Retorno	24
3.4	Componentes Principais	25
3.5	Modelagem	27
4	RESULTADOS	33
4.1	Análise dos Prêmios de Risco	33
4.2	Decomposição do Prêmio de Risco	35
4.3	Análise Histórica dos Prêmios	37
4.4	Inflação Implícita Pelo Modelo	38
4.5	Comparação com o CDS	39
5	CONCLUSÃO	41
	REFERÊNCIAS	42

1 INTRODUÇÃO

Seja pela curiosidade acadêmica, por alguma oportunidade de mercado ou para uma melhor avaliação de políticas públicas, entender e tentar encontrar a correta precificação de um ativo é um objetivo muito buscado em artigos e dissertações. A estrutura de taxas de juros, por exemplo, tem uma atenção especial dos Bancos Centrais do mundo inteiro já que refletem as expectativas futuras do mercado em relação aos juros e inflação de um país.

Em seu artigo "*Decomposing real and nominal yield curves*", Abrahams, Adrian, Crump e Moench (2016)(AACM2016), decompõe o prêmio de risco embutido nos títulos públicos dos Estados Unidos, conseguindo entender melhor como ocorre a transmissão da política monetária para a economia e ajudando os formuladores de políticas públicas a tomarem decisões mais embasadas.

Este trabalho, por sua vez, visa decompor a estrutura de taxas de juros reais e nominais para o Brasil se utilizando do mesmo modelo utilizado em AACM2016. Assim como para a estrutura de juros dos Estados Unidos, espera-se encontrar, quantificar e qualificar prêmios de risco na curva brasileira e estudar o comportamento dos prêmios de risco nominal, real e de inflação à luz dos acontecimentos políticos e econômicos do período estudado, sendo esperado que os níveis dos prêmios sejam tão mais altos quanto mais incertos forem os prognósticos futuros.

Para tanto, foram extraídas as taxas dos títulos públicos negociados no mercado secundário de janeiro de 2010 até outubro de 2021 e encontradas as curvas zero para cada mês de referência. A partir das curvas zero, obtiveram-se os fatores de Nelson-Siegel-Svensson, construíram-se as curvas reais e nominais brasileiras e em seguida aplicou-se o modelo proposto por AACM2016.

1.1 Estrutura da Dissertação

A dissertação segue a seguinte estrutura, no Capítulo 2 revisita-se a literatura existente com foco nas técnicas a serem empregadas para a realização do modelo, como NSS e PCA, e os modelos propriamente ditos a serem utilizadas ao longo da dissertação.

No Capítulo 3 faz-se considerações sobre as especificidades de se analisar o mercado brasileiro, a análise dos dados iniciais e da aderência do modelo proposto à esses dados, comentando possíveis problemas de estimações e o sucesso das mesmas.

Já no Capítulo 4 analisam-se os prêmios obtidos e sua decomposição, observando comportamento dos prêmios de 5 anos por todo o período. Por fim, no Capítulo 5 faz-se as conclusões e considerações finais do trabalho.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Uma das primeiras e mais simples teorias sobre a estrutura a termo das taxas de juros é conhecida como Hipótese das Expectativas que remonta a antes da virada do século passado. Por essa teoria, em sua forma pura, os juros de longo prazo nada mais são que as expectativas das taxas de curto prazo refletidas ao longo do tempo sem espaço para prêmios de quaisquer natureza. Em outras versões mais modernas dessa teoria, ela reconhece a existência de tais prêmios, mas com os mesmos invariantes ao longo do tempo.

Essa teoria foi amplamente testada em vários países com mais ou menos sucesso mas, a partir do final da década de 80, começaram a aparecer novas e claras evidências contrárias a hipótese das expectativas e a existência de um prêmio variável na estrutura de taxa de juros a ficar mais aparente. Notoriamente, Fama e Bliss (1987), se utilizando de taxas *forwards* de vários prazos contra a taxa de um ano, concluem que existe um prêmio de risco e este varia ao longo do tempo.

Diversas técnicas desde então tem sido aplicadas para entender e quantificar esse prêmio, seja utilizando variáveis de mercado, como as *forwards* rates utilizadas por Cochrane e Piazzesi (2005) e posteriormente por Cochrane e Piazzesi (2008), incorporando variáveis macroeconômicas, como Ang e Piazzesi (2001) ou então utilizando de variáveis latentes, ou seja, não diretamente observáveis, como em ACM2013 e em AACM2016 no qual os autores utilizam dos PCAs como fatores de precificação.

2.1 Dos modelos a serem utilizados

Para conseguirmos encontrar os prêmios de risco são necessárias então, uma série de técnicas e modelos para nos amparar no processo. A seguir uma breve descrição das principais:

2.1.1 Do Nelson-Siegel-Svensson:

É um modelo paramétrico proposto inicialmente por Nelson e Siegel (1987)(NS), e posteriormente complementado por Svensson (1994)(NSS), que adicionou um segundo fator de curvatura, β_3 , permitindo uma gama de estruturas de juros mais complexas em relação ao NS original.

$$\begin{aligned}
NSS = & \beta_0 + \\
& \beta_1 \left(\frac{1 - \exp\left(-\frac{n}{\tau_1}\right)}{\frac{n}{\tau_1}} \right) + \\
& \beta_2 \left(\frac{1 - \exp\left(-\frac{n}{\tau_1}\right)}{\frac{n}{\tau_1}} - \exp\left(-\frac{n}{\tau_1}\right) \right) + \\
& \beta_3 \left(\frac{1 - \exp\left(-\frac{n}{\tau_2}\right)}{\frac{n}{\tau_2}} - \exp\left(-\frac{n}{\tau_2}\right) \right)
\end{aligned} \tag{2.1}$$

O modelo é amplamente utilizado em Bancos Centrais e na indústria financeira devido principalmente à facilidade de sua utilização, uma vez obtidos os fatores, por sua interpretabilidade dos fatores e sua grande aderência aos dados reais. Além disso, um dos grandes benefícios dessa abordagem é permitir que se calcule uma taxa de juros em qualquer período de tempo.

O primeiro fator β_0 , tem influência em toda a curva, já que não decai ao longo do tempo, pode, portanto, ser interpretado como um fator de longo prazo e como um fator do nível da curva de juros, uma mudança nesse fator repercute por toda a curva mudando-a completamente.

O segundo fator β_1 , decai rapidamente à zero, sendo, portanto, interpretado como um fator de curto prazo e como um fator de inclinação, pois uma mudança no mesmo provoca mudanças mais abruptas nos juros de curto prazo vis-a-vis no longo prazo.

O terceiro e quarto fatores β_2 e β_3 , são mais imprevisíveis, eles partem de 0 oscilam e caem novamente a 0 ao longo do tempo, podem ser interpretados como fatores de médio prazo ou de curvatura.

Normalmente, os fatores são calculados minimizando os erros de uma curva zero com os respectivos preços de mercado, mas existem diversas maneiras de ajustar os parâmetros iniciais e diversas maneiras de se computar esses erros. Por essa razão inúmeros artigos se debruçam sobre essa temática tentando estabelecer o melhor método para cada curva.

Enquanto Gürkaynak, Sack e Wright (2007), por exemplo, não estabelecem parâmetros iniciais para as curvas dos Estados Unidos e procuram minimizar os erros ajustando-os pela *duration* dos títulos públicos “*we estimate the six parameters, using maximum likelihood, to minimize the sum of the squared deviations between the actual prices of Treasury securities and the predicted prices, where the prices are weighted by the inverse of the duration of the securities.*” (GÜR KAYNAK; SACK; WRIGHT, 2007), Gimeno e Nave (2006) estabelecem os parâmetros iniciais para o cálculo do NSS para os juros espanhóis, definindo β_0 como a taxa do ativo com menor prazo de vencimento, β_1 como a diferença de taxas entre o ativo com menor e maior vencimentos, β_2 e β_3 em 0, supondo uma inexistência de curvatura, e τ_1 e τ_2 como o prazo do vencimento do ativo cuja taxa de juros for mais próximas entre a metade de β_0 e $\beta_0 + \beta_1$.

2.1.2 Do PCA:

A análise de componentes principais, inventado por Karl Pearson na virada do século XIX para o XX, é um método estatístico usado para reduzir a dimensionalidade dos dados sem perder informações sobre a sua variabilidade. No caso de renda fixa, o PCA permite analisar a curva de juros de uma forma não-paramétrica decompondo os dados muito extensos em poucos fatores, facilitando a análise. Tradicionalmente se utilizam três fatores principais, que podem ser interpretados como Nível, Inclinação e Curvatura da curva de juros.

Uma das vantagens de se usar o PCA é que os fatores gerados não são pré-concebidos, ou seja não é possível influir na escolha desses fatores baseado nas crenças pessoais de como a curva deveria se mover ao longo do tempo, dando mais credibilidade para as descobertas efetuadas a partir deles.

Para a execução do PCA é necessário primeiramente que os dados sejam centrados e padronizados, pensando em somente duas dimensões para simplificar o conceito, o dado centrado garante que a reta gerada pelos fatores passe pela origem do plano cartesiano e a padronização, por sua vez, garante que nenhum dado dominará o outro por ter uma escala diferente.

A partir desses dados, centralizados e padronizados, calcula-se a matriz de variâncias-covariâncias:

$$\Sigma = \frac{1}{n} X^T X \quad (2.2)$$

a qual tem três fatos básicos a serem observados.

Primeiro, o rank deve ser pleno, ou seja, o número de colunas linearmente independentes deve ser igual ao número de colunas da matriz, sem que nenhuma coluna seja uma combinação linear das demais.

Segundo não deve existir um vetor nulo, $v \neq 0$, sendo dessa forma a matriz classificada como definida e positiva.

$$v^T \Sigma v = \frac{1}{n} v^T X^T X v = \frac{1}{n} \|xv\|^2 > 0 \quad (2.3)$$

Terceiro, pela matriz ser definida e positiva os autovalores das matrizes são necessariamente positivos:

$$\Sigma v = \lambda v \quad (2.4)$$

$$v^T \Sigma v = \lambda v^T v = \lambda \|v\|^2 \implies \lambda > 0 \quad (2.5)$$

Encontra-se então os Z scores, projeções de X_i nas cargas do componente principal que formam um vetor unitário $\|\Phi_1\| = 1$.

$$z_{i1} = x_i^T \Phi_i \quad (2.6)$$

sempre procurando a maior variância possível desses scores devido à dualidade existente entre a variância e o erro de reconstrução. Maximizar a variância dos scores é minimizar o erro de reconstrução:

$$\sum_{i=1}^n \|X_i\|^2 = \sum_{i=1}^n |x_i^T \Phi_1|^2 + \sum_{i=1}^n |x_i^T \Phi_2|^2 \quad (2.7)$$

Já que $\sum_{i=1}^n \|X_i\|^2$ é fixado pelos dados e $\sum_{i=1}^n |x_i^T \Phi_2|^2$ é o erro total de reconstrução, e dado que :

$$\sum_{i=1}^n |x_i^T \Phi_1|^2 = \|X\phi_1\|^2 = \phi_1^T (X^T X) \phi_1 \quad (2.8)$$

$$\|\Sigma \Phi_1\|^2 = \|\lambda \Phi_1\| \quad (2.9)$$

$$\|\Sigma \Phi_1\|^2 = |\lambda|^2 1 \quad (2.10)$$

Dessa forma o primeiro componente principal é o autovetor com maior autovalor, o segundo componente principal é o autovetor com o segundo maior autovalor e assim sucessivamente.

2.1.3 Do Modelo ACM:

Adrian, Crump e Moench (2013) propuseram um modelo gaussiano afim com variáveis latentes de uma maneira alternativa aos modelos da época que primariamente utilizavam a máxima verossimilhança e criaram uma metodologia baseada em regressões afirmando que, além desse modelo ser computacionalmente muito mais rápido, os resultados obtidos eram superiores aos modelos existentes na época, como o de Cochrane e Piazzesi (2008), o qual eles comparam os resultados de seu trabalho.

Neste modelo, os fatores de precificação X_t são os 5 primeiros componentes principais extraídos das curvas zero dos títulos públicos dos Estado Unidos, construídas a partir do NSS disponibilizados por Gürkaynak, Sack e Wright (2007), e utilizam um estimador de mínimos quadrados em três etapas a fim de estimarem o preço do risco da economia e encontrar o prêmio existente.

A primeira etapa consiste em decompor os fatores de precificação entre fatores preditivos e fatores de inovação, regredindo os fatores contra os fatores defasados. Na segunda etapa, estimam o excesso de retorno contra os fatores defasados e os fatores de inovação contemporâneos e na terceira eles obtém o preço dos parâmetros de risco, através de uma regressão em seções transversais das exposições do retorno em relação aos fatores de precificação defasados sobre os preços de inovação contemporâneos.

Neste modelo, eles assumem que as variáveis evoluem ao longo do tempo seguindo o seguinte vetor auto-regressivo:

$$X_{t+1} = \mu + \Phi X_t + v_{t+1} \quad (2.11)$$

E que os choques v_{t+1} seguem uma distribuição gaussiana com uma matriz de variância-covariância Σ :

$$v_{t+1} | \{X_s\}_s^t = 0 \ N(0, \Sigma) \quad (2.12)$$

Eles assumem também que a taxa estocástica de desconto é

$$P_t^{(n)} = E_t \left(M_{t+1} P_{t+1}^{(n-1)} \right) \quad (2.13)$$

E o preço do risco é o mesmo que Duffee (2002):

$$\lambda_t = \Sigma^{-\frac{1}{2}} (\lambda_0 + \lambda_1 X_t) \quad (2.14)$$

Como excesso de retorno em manter um título por n períodos, eles definem:

$$rx_{t+1}^{(n-1)} = \log P_{t+1}^{(n-1)} - \log P_t^{(n)} - r_t \quad (2.15)$$

De forma que o excesso de retorno esperado dos títulos se torna:

$$rx_{t+1}^{(n-1)} = \underbrace{\beta^{(n-1)' (\lambda_0 + \lambda_1 X_T)}_{\text{Retorno Esperado}} - \underbrace{\frac{1}{2} (\beta^{(n-1)' \Sigma \beta^{(n-1)} + \sigma^2)}_{\text{Ajuste de Convexidade}} + \underbrace{\beta^{(n-1)' v_{t+1}}}_{\text{Retorno de Inovação Precificado}} + \underbrace{e_{t+1}^{(n-1)}}_{\text{Erro de Precificação}} \quad (2.16)$$

Ou sua forma matricial empilhando as maturidades e períodos de tempo:

$$rx = \beta' (\lambda_0 \iota'_T + \lambda_1 X_-) - \frac{1}{2} (B^* \text{vec} \Sigma + \sigma^2 i_N) \iota'_T + \beta' V + E \quad (2.17)$$

Partindo das definições e derivações matemáticas, o modelo então propõe um estimador baseado em uma regressão em três etapas:

Primeiro, estimam o processo autorregressivo por mínimos quadrados, decompondo $X_t + 1$ entre uma variável preditora e uma estimativa da inovação $v_t + 1$, empilham essa estimativa em uma matriz $\hat{\Sigma}$ e constroem um estimador da matriz de variância-covariância dessa estimativa de inovação $\hat{\Sigma} = \hat{V} \hat{V}' / T$.

Em seguida regridem o excesso de retorno contra uma constante, os fatores de precificação defasados e as inovações dos fatores de preços:

$$rx = a \iota'_T + \beta \hat{V} + c X_- + E \quad (2.18)$$

Juntando os regressores em uma matriz $(2K + 1) \times T$:

$$\tilde{Z} = [\iota_T' \hat{V} X] \quad (2.19)$$

Os estimadores se tornam por MQO (para detalhes ver equação 3.2.10 do livro *New Introduction to Multiple Time Series Analysis* de Lütkepohl (2005):

$$[\hat{a} \hat{\beta}' \hat{c}] = r x Z' (Z Z')^{-1} \quad (2.20)$$

Dos resíduos dessa regressão coleta-se \hat{E} com o qual é possível estimar:

$$\hat{\sigma}^2 = \text{trace}(\hat{E} \hat{E}') / NT \quad (2.21)$$

Para finalmente obter os estimadores do preço do risco λ_0 e λ_1 :

$$\widehat{\lambda}_0 = (\hat{\beta} \hat{\beta}')^{-1} \hat{\beta} (\hat{a} + \frac{1}{2} (\hat{\beta} * \text{vec}(\hat{\Sigma}) + \hat{\sigma}^2 \iota_N)) \quad (2.22)$$

$$\widehat{\lambda}_1 = (\hat{\beta} \hat{\beta}')^{-1} \hat{\beta} \hat{c} \quad (2.23)$$

Com todos os parâmetros devidamente estimados é possível construir uma curva que será muito próximo da curva original, de forma que ao se igualar os fatores de risco à 0, obtém-se a curva neutra ao risco. Da diferença entre a o modelo criado e a curva neutra ao risco extraem-se o prêmio a termo buscado.

$$y_t^{(n)} = -\frac{1}{n} (A_n + B_n' X_t) \quad (2.24)$$

Uma grande crítica à esse modelo é que ele é muito dependente das variáveis e do período utilizado. Quando se utilizam novos dados para complementar a série inicial os prêmios obtidos anteriormente tendem a mudar significativamente em nível, porém sempre mantendo a relação entre si.

2.1.4 Do Modelo AACM:

Em 2016, Abrahams se juntou à Adrian, Crump e Moench, para apresentar um modelo baseado em ACM(2013), mas que conseguisse estruturar conjuntamente os títulos públicos reais e nominais, modelo este que será utilizado com as curvas brasileiras neste trabalho. Embora a essência seja a mesma, há importantes diferenciações nesse modelo.

O vetor autorregressivo utilizado nesse modelo não possui constante e é ajustado pela média dos fatores de precificação.

$$X_{t+1} - \mu_x = \Phi (X_t - \mu_x) + v_{t+1} \quad (2.25)$$

E enquanto a hipótese de não-arbitragem, a evolução da taxa de desconto $M_{t+1} = \exp(-r_t - \frac{1}{2} \lambda_t' \lambda_t - \lambda_t' \Sigma^{-\frac{1}{2}} \nu_{t+1})$ e o preço do risco dessa economia $\lambda_t = \Sigma^{-\frac{1}{2}} (\lambda_0 + \lambda_1 X_t)$

sejam definidos da mesma forma que no ACM(2013) para os juros nominais, é necessário uma pequena diferenciação nos parâmetros para acomodar o novo valor autorregressivo de forma que eles definem os seguintes termos:

$$\tilde{\mu} = (I_K - \theta) \mu_x - \lambda_0 \quad (2.26)$$

$$\tilde{\Phi} = \Phi - \lambda_1 \quad (2.27)$$

Baseado na estrutura gaussiana a termo afim:

$$\log P_t^{(n)} = A_n + B_n' X_t \quad (2.28)$$

O que implica que a taxa livre de risco é:

$$r_t = \delta_0 + \delta_1' X_t \quad (2.29)$$

De forma que, pela restrição de não arbitragem:

$$A_n = A_{n-1} + B_{n-1}' \tilde{\mu} + \frac{1}{2} (B_{n-1}' \Sigma B_{n-1}) - \delta_0 \quad (2.30)$$

$$B_n' = B_{n-1}' \tilde{\Phi} - \delta_1' \quad (2.31)$$

$$A_0 = 0, \quad B_0 = 0 \quad (2.32)$$

O log do excesso de retorno nominal em manter um título por n períodos é também definido como ACM(2013):

$$rx_{t+1}^{(n-1)} = \log P_{t+1}^{(n-1)} - \log P_t^{(n)} - r_t \quad (2.33)$$

As hipóteses para os juros reais por sua vez são ligeiramente diferentes, seja Q_t o índice de preços no momento t, o preço de um título em um período t é definido como:

$$P_{t,R}^{(n)} = E_t^Q \left[\exp(r_t - \dots - r_{t+n-1}) \frac{Q_{t+n}}{Q_t} \right] \quad (2.34)$$

E a inflação de um período é de:

$$\pi_t = \ln \left(\frac{Q_t}{Q_{t-1}} \right) \quad (2.35)$$

De forma que:

$$\frac{Q_{t+n}}{Q_t} = \exp \left(\sum_{i=1}^n \pi_{t+i} \right) \quad (2.36)$$

E assumindo que o log dos preços de títulos indexados à inflação é afim dos fatores de precificação:

$$\log P_{t,R}^{(n)} = A_{n,R} + B'_{n,R} X_t \quad (2.37)$$

Implicando em:

$$\pi_t = \pi_0 + \pi'_1 X_t \quad (2.38)$$

Podemos determinar:

$$A_{n,R} = A_{n-1,R} + (B_{n-1,R} + \pi_1)' \tilde{\mu} + \frac{1}{2} (B_{n-1,R} + \pi_1)' \Sigma (B_{n-1,R} + \pi_1) - \delta_{0,R} \quad (2.39)$$

$$B'_n = (B_{n-1,R} + \pi_1)' \tilde{\Phi} - \delta'_1 \quad (2.40)$$

$$A_0 = 0, \quad B_0 = 0 \quad (2.41)$$

Onde:

$$\delta_0 = \delta_{0,R} + \pi_0 \quad (2.42)$$

As regressões realizadas em AACM(2016) também divergem ligeiramente do modelo proposto em ACM(2013), a começar pelos fatores de precificação. Enquanto no modelo anterior X_t é composto pelos 5 primeiros fatores principais da curva nominal, neste modelo eles definem X_t com 6 fatores:

- a) Os três primeiros fatores obtidos a partir das curvas de juros nominais,
- b) Um fator de liquidez bem definido, gerados a partir de duas métricas distintas, a média do erro absolutos dos erros de ajuste da curva NSS e uma média móvel da razão da negociação dos títulos nominais e reais no mercado primário.
- c) Os dois primeiros fatores da curva de juros real, obtidos por sua vez através dos resíduos de uma regressão da curva de juros real contra os três componentes principais anteriores e do fator de liquidez. Esta etapa de ortogonalização é feita a fim de se reduzir a colinearidade incondicional entre os fatores de precificação.

Uma vez obtido X_t , os autores seguem para as seguintes etapas de regressão:

Primeiro, os fatores são decompostos entre componentes previsíveis e as inovações, regredindo os fatores contra os mesmos defasados:

$$X_{t+1} - \mu_x = \Phi (X_t - \mu_x) + v_{t+1} \quad (2.43)$$

Em seguida, estima-se o excesso de retorno dos títulos empilhando o excesso real e o nominal, e regride-se em uma regressão aparentemente não correlacionada contra uma constante, os fatores defasados e os fatores contemporâneos

$$R = \alpha \iota'_T - B\tilde{\Phi}X_- + BX + E \quad (2.44)$$

o que por MQO vai gerar $(\widehat{\alpha}_{ols}, \widehat{B\tilde{\Phi}}_{ols}, \widehat{B}_{ols} \text{ e } \widehat{E}_{ols})$, onde $E_{s-1} [e_s e'_s] = \Sigma_e$ e $E_{s-1} [e_s] =$

0

Utilizando os resíduos obtém-se:

$$\widehat{\Sigma}_e = T^{-1} \widehat{E}_{ols} \widehat{E}'_{ols} \quad (2.45)$$

E o estimador:

$$\widehat{\tilde{\Phi}}_{gls} = -(\widehat{B}'_{ols} \widehat{\Sigma}_e^{-1} \widehat{B}_{ols}) \widehat{B}'_{ols} \widehat{\Sigma}_e^{-1} \widehat{B\tilde{\Phi}}_{ols} \quad (2.46)$$

Depois, roda-se uma nova regressão aparentemente não correlacionada em ι'_T e $(-\widehat{\tilde{\Phi}}_{gls} X_+ X)$ para obter estimadores de α e β mais eficientes, nomeados $\widehat{\alpha}_{gls}$ e \widehat{B}_{gls} , para finalmente estimar $\tilde{\mu}$ como:

$$\widehat{\tilde{\mu}}_{gls} = -(\widehat{B}'_{gls} \widehat{\Sigma}_e^{-1} \widehat{B}_{gls})^{-1} \widehat{B}'_{gls} \widehat{\Sigma}_e^{-1} \left(\widehat{\alpha}_{gls} + \frac{1}{2} \widehat{\gamma}_{gls} \right) \quad (2.47)$$

Onde partindo de:

$$\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{N_N}, (B_{1,R} + \pi_1), \dots, (B_{N_R,R} + \pi_1))' \quad (2.48)$$

$$\gamma = (B'_1 \Sigma B_1, \dots, B'_{N_N} \Sigma B_{N_N}, (B'_{1,R} + \pi_1)' \Sigma (B_{1,R} + \pi_1), \dots, (B'_{N_R,R} + \pi_1)' \Sigma (B_{N_R,R} + \pi_1))' \quad (2.49)$$

temos que:

$$\widehat{\gamma}_{gls} = (B^* \text{vec}(\Sigma)) \quad (2.50)$$

$$B^* = [\text{vec}(\beta^{(1)} \beta^{(1)'}) \dots \text{vec}(\beta^{(N)} \beta^{(N)'})', \text{vec}(\beta_{1,R}^{(1)} \beta_{1,R}^{(1)'}) \dots \text{vec}(\beta_{N_R,R}^{(N)} \beta_{N_R,R}^{(N)'})]' \quad (2.51)$$

Finalmente, os estimadores do preço de mercado dos parâmetros de risco podem ser obtidos por:

$$\widehat{\lambda}_0 = (I_k - \widehat{\Phi}) \widehat{\mu}_x - \widehat{\tilde{\mu}}_{gls} \quad (2.52)$$

$$\widehat{\lambda}_1 = \widehat{\Phi} - \widehat{\tilde{\Phi}}_{gls} \quad (2.53)$$

Com todos os parâmetros definidos pode-se estimar um modelo de curva para os juros reais e um modelo de curva para os juros nominais e, da mesma forma que em ACM(2013), ao estimar este modelo com os preços de mercado dos parâmetros de risco λ_0

e λ_1 iguais a 0, encontra-se as curvas neutras ao risco tanto nominais quanto reais e os respectivos prêmios de risco. Além disso, ao subtrair-se o prêmio de risco real do prêmio de risco nominal, obtém-se o prêmio de risco de inflação, o quanto os participantes do mercado exigem para encarteirar títulos indexados à inflação.

Por fim, o modelo permite encontrar a expectativa de inflação, ao analisar a diferença entre os títulos nominais e aqueles indexados à inflação para cada período de tempo:

$$\pi_t^{(n)} = y_t^{(n)} - y_{t,R}^{(n)} = -\frac{1}{n} \left[A_n + B'_n X_t - (A_{n,R} + B'_{n,R} X_t) \right] \quad (2.54)$$

3 ANÁLISE DE DADOS

3.1 Mercado Brasileiro

Uma vez definidos os métodos e modelos a serem utilizados, o próximo passo é a definição dos dados. O histórico de emissão da dívida pública no Brasil é diferente e muito mais recente que de países com economias desenvolvidas, notadamente EUA e Inglaterra, de onde os autores do artigo original testaram o modelo proposto, o que exige algumas considerações iniciais.

Em seu capítulo do livro *Dívida Pública: A Experiência Brasileira*, Pedras (2009) descreve a história da dívida pública brasileira atentando para a história recente dos títulos públicos a serem utilizados neste trabalho. Foi somente a partir de 2003 que títulos prefixados mais longos e com pagamento de cupons periódicos (NTN-F) foram emitidos, e a primeira vez que estes títulos tiveram um vencimento maior ou igual a 10 anos foi em 2007. Em 2008, porém, o agravamento da crise internacional fez com que a participação dos títulos prefixados na composição da dívida fosse reduzida. Baseado nesse histórico, decidiu-se coletar as informações dos títulos públicos somente a partir de 2010, quando o mercado já estava mais reestabelecido à sua normalidade, para a realização deste trabalho.

O mercado brasileiro de taxa de juros nominais tem uma característica diferente da maior parte dos países, a liquidez está no mercado de DI1 futuro negociado na B3 ao invés de estar nos títulos públicos emitidos pelo governo. Os títulos públicos negociados no mercado secundário, ou seja, entre os participantes do mercado, são negociados em conjunto com os contratos de DI1 correspondentes, de forma a neutralizar o risco de taxa de juros quando da compra ou venda desses títulos, tem como preço um spread entre essa taxa de DI futuro e a taxa do título para vencimento em questão. Mesmo quando da compra dos títulos públicos no mercado primário, ou seja, diretamente do Governo, os participantes do mercado tomam por referência o preço do DI1 futuro negociado na hora do leilão e adicionam o spread de referência do dia para realizarem suas propostas.

Já no mercado de juros reais, a liquidez está como na maior parte dos países desenvolvidos, nos títulos públicos, enquanto o mercado de swaps é pouco desenvolvido. Apesar dessas peculiaridades, e para maior coerência dentro do modelo, escolheu-se utilizar os títulos federais brasileiros tanto para os juros nominais quanto para os juros reais assim como no modelo original.

Foram obtidas todas as negociações de títulos federais no mercado secundário disponíveis no BACEN¹, e consideradas somente as operações que ocorreram entre grupos econômicos diferentes a fim de se evitar operações com taxas não necessariamente praticadas no mercado durante o momento da operação por algum ajustes intra companhia.

¹ Ver <http://www4.bcb.gov.br/pom/demab/negociacoes/apresentacao.asp?idpai=SELICOPERACAO>

Com o intuito de evitar eventuais distorções causadas pela falta de liquidez de alguns títulos, em especial dos indexados pela inflação, suavizaram-se as taxas dos títulos obtidos anteriormente considerando uma média dos três últimos dias de cada mês, e não somente do último dia, como as taxas de referência daquele mês, sempre se atentando para a ausência de algum título caso alguma variação muito grande entre os dias tenha ocorrido, nestes poucos casos uma interpolação foi feita para evitar distorções.

Ainda para as NTN-Bs, um ajuste adicional foi necessário, foram excluídos os títulos com vencimentos inferiores à 6 meses da data de coleta, os quais em sua maioria causavam distorções na taxa real de curto prazo devido à baixa liquidez.

Para a execução do modelo AACM2016 é necessário que se tenha um estrutura de juros a termo para cada mês em análise e como os vencimentos dos títulos públicos tem datas de vencimento fixas é necessário que utilizar alguma técnica para a obtenção dessa estrutura a termo de juros e, assim como no modelo original, foram utilizados os fatores de Nelson-Siegel-Svensson(NSS).

A partir da curva zero obtida através dos títulos públicos suavizados os fatores NSS reais e nominais para cada data foram calculados e, a partir dos parâmetros NSS encontrados, construíram-se n curvas mensais, com $n=1, \dots, 120$ meses tanto para os juros reais e quanto para os nominais para todos os meses de janeiro de 2010 até outubro de 2021, para um total de $T= 141$ observações.

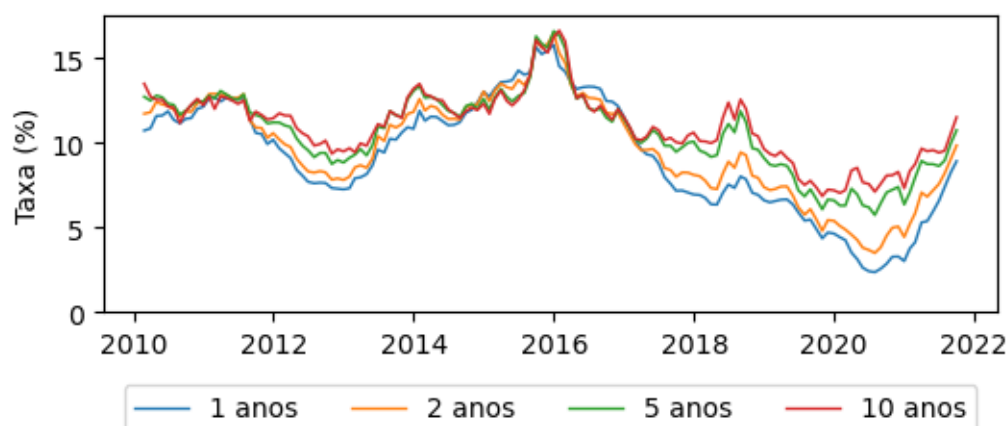
3.2 Estruturas da Taxa de Juros

Na Figura 1 e Tabela 1, temos o a estrutura da taxa de juros nominal ao longo do tempo, podemos ver que as taxas são bem comportadas e condizentes com a existência de um prêmio pela retenção de títulos com vencimentos mais longos já que os mesmos são maiores que os títulos de curto prazo consistentemente ao longo de todo o período observado. Nota-se também que o desvio padrão das taxas é tão menor quanto maior é o horizonte de vencimento observado. É válido mencionar que por curtos períodos de tempo, quando as taxas de juros se encontram em níveis muito elevados, as taxas de curto prazo são superiores às de longo prazo. Uma análise mais cuidadosa sobre alguns dos períodos e a possível explicação dos movimentos das curvas será efetuada quando da análise dos prêmios no Capítulo 4.

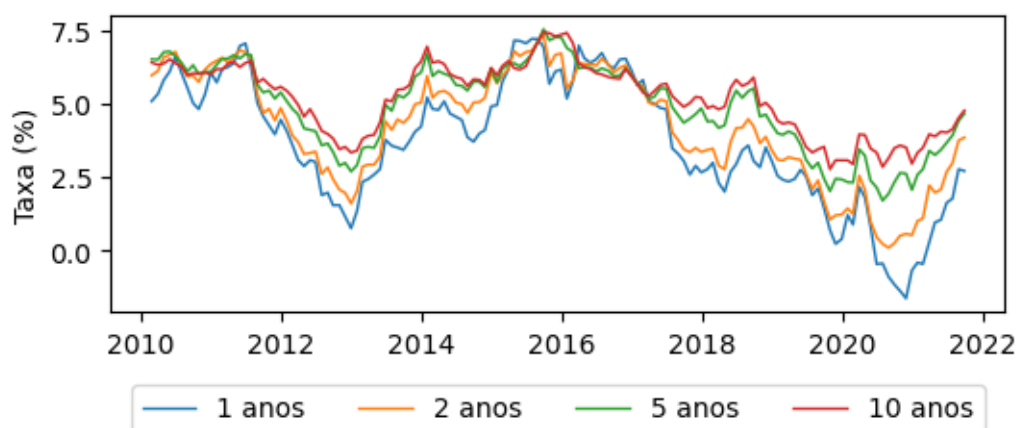
Tabela 1 – Juros Nominais

	1 Ano	2 Anos	5 Anos	10 Anos
Média	9.23%	9.78%	10.64%	10.99%
Máx	15.77%	16.46%	16.58%	16.62%
Mín	2.34%	3.48%	5.72%	6.84%
DP	3.35%	2.99%	2.35%	2.03%

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 1 – Taxa de Juros Nominal

Nas Figura 2 e Tabela 2, temos a estrutura dos juros reais ao longo do período. Assim como para os juros nominais, as taxas de vencimentos mais longos são consistentemente maiores que as de curto prazo, e seu desvio padrão também decai quanto mais longo o prazo observado. É interessante notar também, que entre o final de 2020 e início de 2021, as taxas reais de 1 ano foram negativas e as de 2 anos se aproximaram de 0, para depois voltar a um patamar positivo com o aumento da inflação.

Figura 2 – Taxa de Juros Real**Tabela 2** – Juros Reais

	1 Ano	2 Anos	5 Anos	10 Anos
Média	3.72%	4.25%	4.92%	5.20%
Máx	7.22%	7.34%	7.55%	7.43%
Mín	-1.64%	0.09%	1.69%	2.77%
DP	2.19%	1.90%	1.48%	1.20%

Fonte: Elaborado pelo autor

3.3 Excesso de Retorno

Na estimação dos excessos de retorno nominais e reais seguiu-se o modelo original, de forma que para a parte nominal utilizou-se $N_n = 11$ excesso de retornos mensais, com maturidades $n = 6, 12, 24, \dots, 120$ meses e a parte real com $N_r = 9$ excessos de retornos com maturidades iguais a $n = 24, \dots, 120$ meses sendo considerada a taxa livre de risco a taxa de um mês obtida através dos parâmetros do NSS e a inflação de cada período a calculada através dos VNAs das NTN-Bs.

Pode-se ver na Figura 3 e na Tabela 3 que o excesso de retorno obtido é condizente com o esperado, ele é maior e mais volátil quanto mais longo o prazo analisado, assim como no modelo original. Nota-se que as médias dos excessos tanto reais quanto nominais são muito próximas entre si enquanto os desvios padrão do excesso de retorno real é significativamente menor que os do excesso de retorno nominal, além disso, a amplitude dos valores do excesso de retorno nominais também são maiores que as do excesso de retorno nominal, condizentes com os resultados obtidos na análise original com os juros estadunidenses.

Figura 3 – Excesso de Retorno Nominal

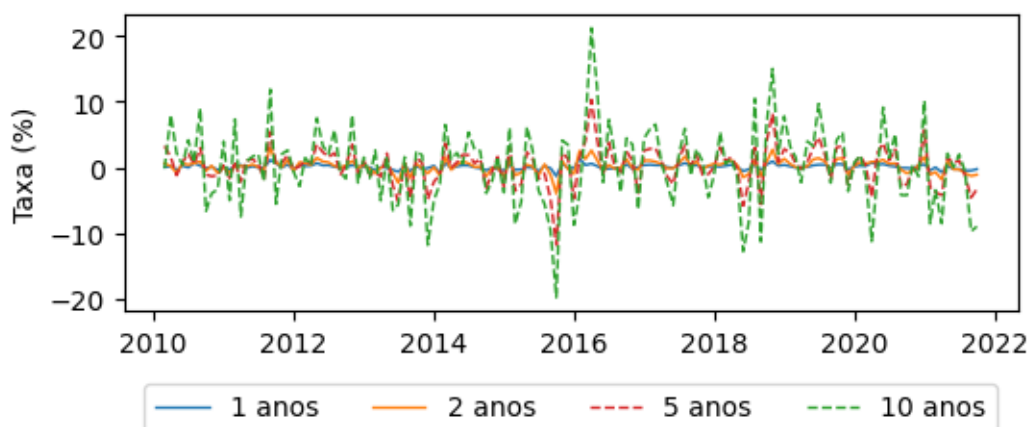
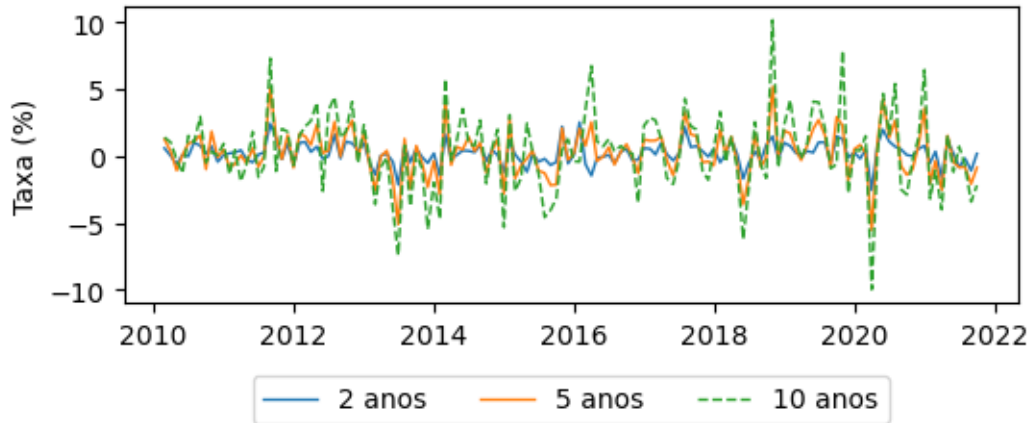


Tabela 3 – Excesso de Retorno Nominal

	1 Ano	2 Anos	5 Anos	10 Anos
Média	0.08%	0.18%	0.29%	0.34%
Máx	1.33%	3.02%	10.29%	21.2%
Mín	-1.33%	-3.99%	-11.79%	-19.77%
DP	0.38%	0.99%	2.88%	5.91%

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 4 – Excesso de Retorno Real**Tabela 4** – Excesso de Retorno Real

	2 Anos	5 Anos	10 Anos
Média	0.20%	0.28%	0.33%
Máx	2.52%	5.17%	10.15%
Mín	-2.55%	-5.53%	-9.95%
DP	0.83%	1.72%	2.94%

Fonte: Elaborado pelo autor

3.4 Componentes Principais

Extraíram-se então os K_n componentes principais dos juros nominais a partir curvas geradas anteriormente e foram escolhidos os três primeiros componentes assim como em AACM2016, responsáveis em conjunto por 99,39% da variação dos dados (PCN1= 96,57%, PCN2 = 3,04% e PCN3 = 0,31%).

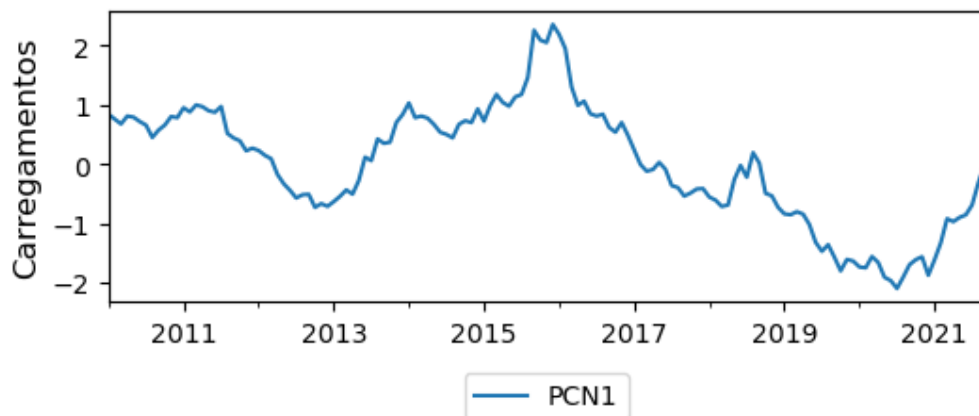
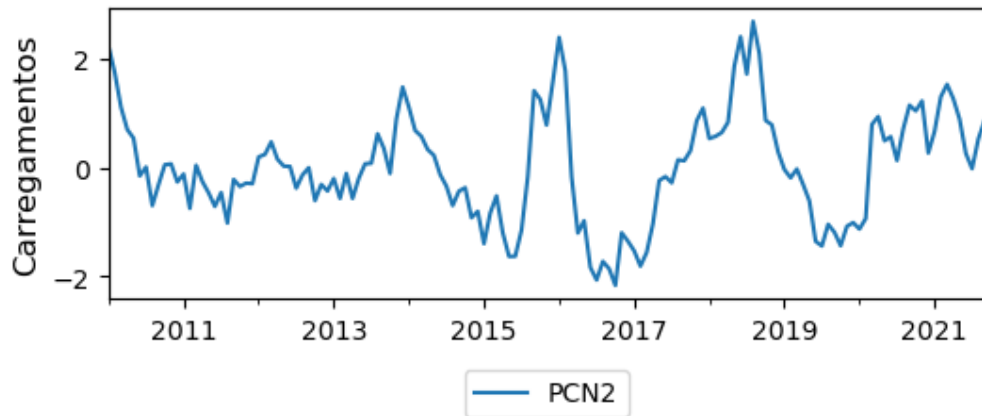
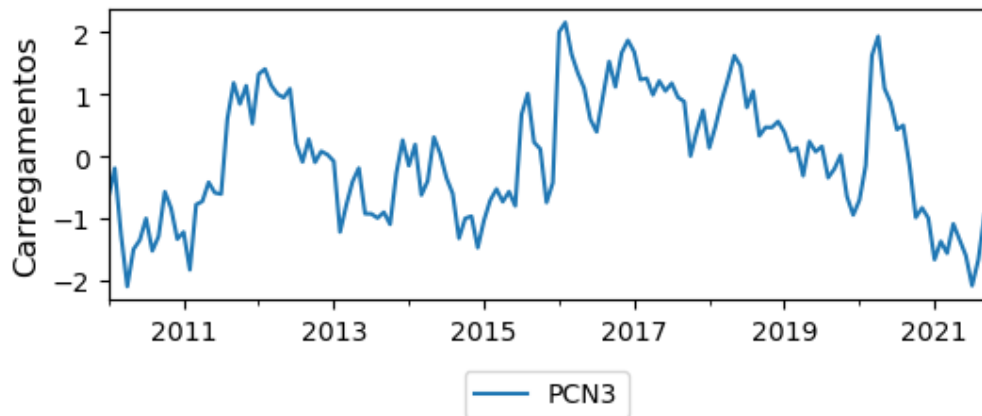
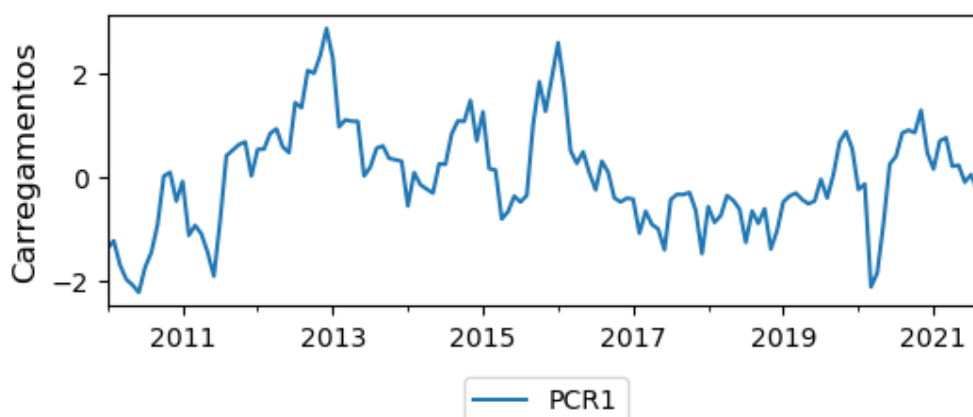
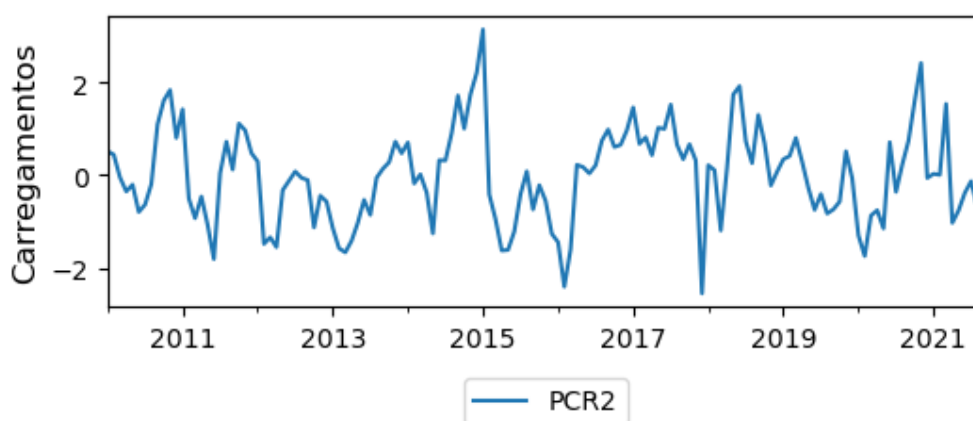
Figura 5 – Primeiro Fator (Nível)

Figura 6 – Segundo Fator (Inclinação)**Figura 7** – Terceiro Fator (Curvatura)

Quanto ao fator de liquidez, optou-se por não o utilizar devido às diferenças fundamentais entre o mercado de títulos indexados à inflação no Brasil dos títulos dos Estados Unidos. Segundo Vicente e Graminho (2015), “Embora haja uma diferença significativa entre os volumes de negociação de títulos nominais e reais, essa diferença de liquidez não é apreçada (prêmio de liquidez não é significativo). Este resultado, aparentemente contraditório, ocorre porque no Brasil títulos reais são geralmente mantidos até o vencimento. Por isso os investidores não exigem uma recompensa devido à exposição à incerteza de liquidez, o que por sua vez elimina a relevância deste prêmio”, e assim como para esses autores, neste trabalho ao se adicionar um fator de liquidez similar ao utilizado no modelo original não foi encontrada melhora na aderência das curvas do modelo contra as curvas originais.

Dessa forma, a extração dos K_r componentes principais se deu pelos resíduos de uma regressão das curvas reais contra os 3 componentes nominais extraídos anteriormente. Decidiu-se utilizar dos 2 primeiros fatores reais obtidos, assim como AACM2016, responsáveis em conjunto por 95.22% da variação ($PCR1 = 77,30\%$ e $PCR2 = 17,92\%$). Dessa forma, para a modelagem tem-se $K = K_n + K_r = 3 + 2 = 5$ fatores de precificação.

Figura 8 – Quarto Fator (Real 1)**Figura 9** – Quinto Fator (Real 2)

3.5 Modelagem

Finalmente, com os fatores de precificação selecionados, pode-se aplicar a metodologia descrita na subseção 2.1.4 do AACM(2016), e gerar curvas de juros nominais do modelo e compará-las com as curvas originais. Como pode-se ver nos gráficos abaixo, a aderência é muito boa entre as duas curvas nominais para todos os prazos analisados: 1ano, 5 anos e 10 anos, e por todo o período de observação, com médias muito próximas à zero e valores absolutos pequenos.

Encontramos para 1 ano, na Figura 10 e Figura 11 , um erro de ajuste médio de -0.139% , com o erro máximo de 0.37% e o mínimo de -0.71% . Para 5 anos, Figura 12 e Figura 13 , o erro de ajuste médio de foi de -0.028% , com o erro máximo de 0.20% e o mínimo de -0.26% . E para 10 anos, Figura 14 e Figura 15 , encontramos um erro de ajuste médio de -0.024% , com o erro máximo de 0.34% e o mínimo de -0.42% . O erro de ajuste médio, portanto, cai quão maior o prazo analisado.

Figura 10 – Taxa de Juros Nominal de 1 ano

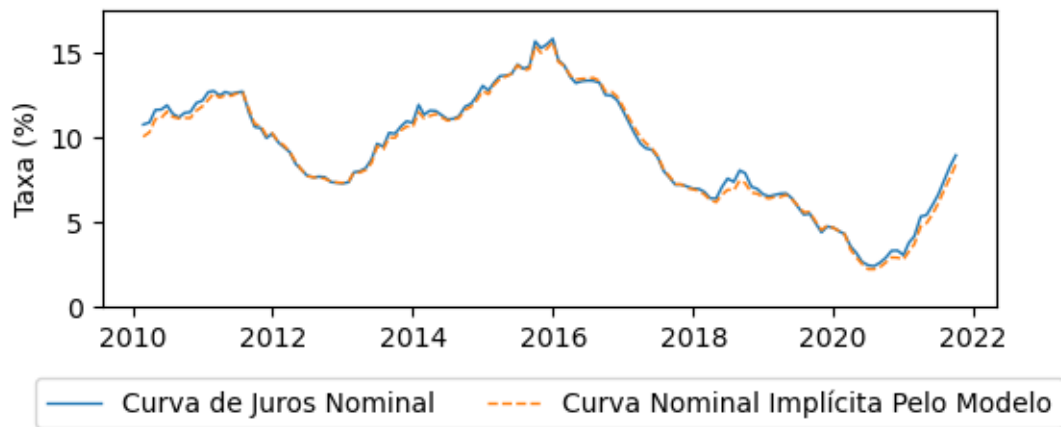


Figura 11 – Erro de Ajuste da Taxa Nominal de 1 ano

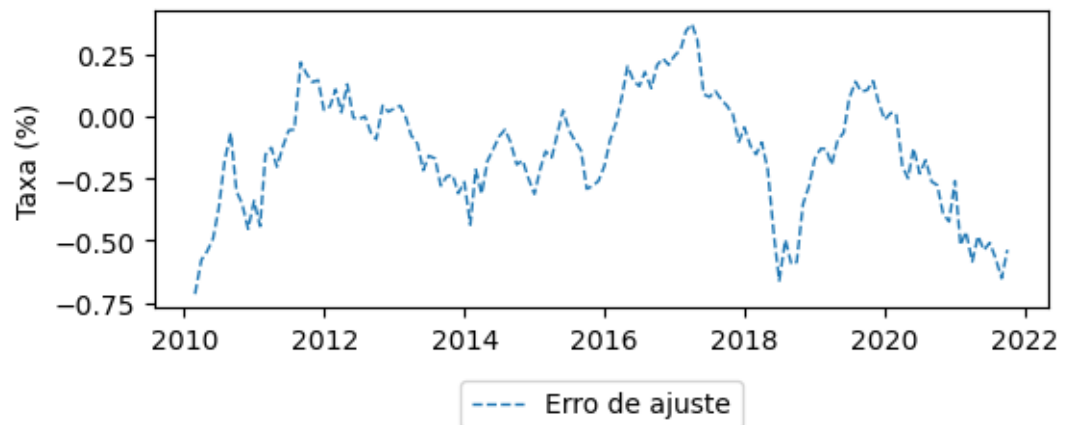


Figura 12 – Taxa de Juros Nominal de 5 anos

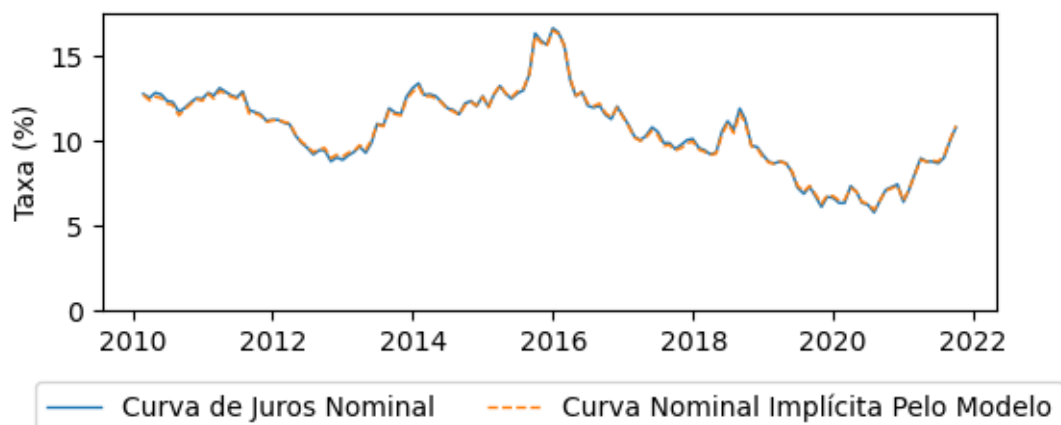


Figura 13 – Erro de Ajuste da Taxa Nominal de 5 anos

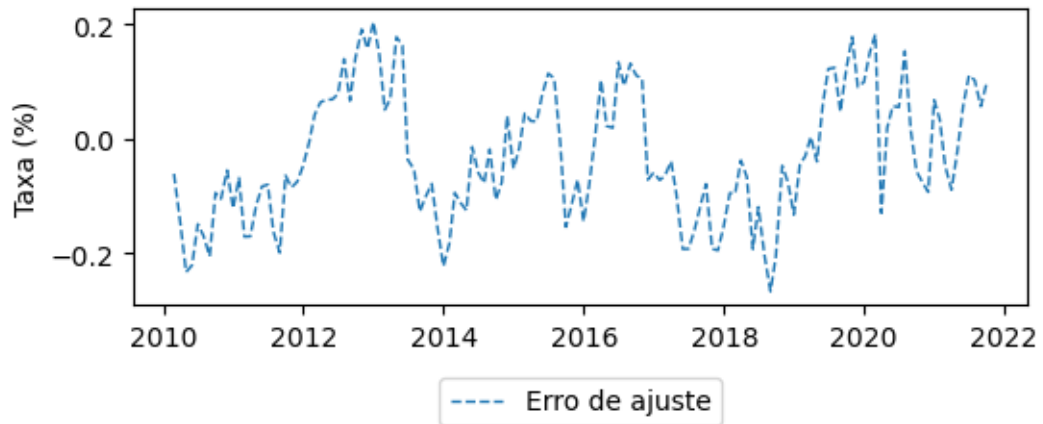


Figura 14 – Taxa de Juros Nominal de 10 anos

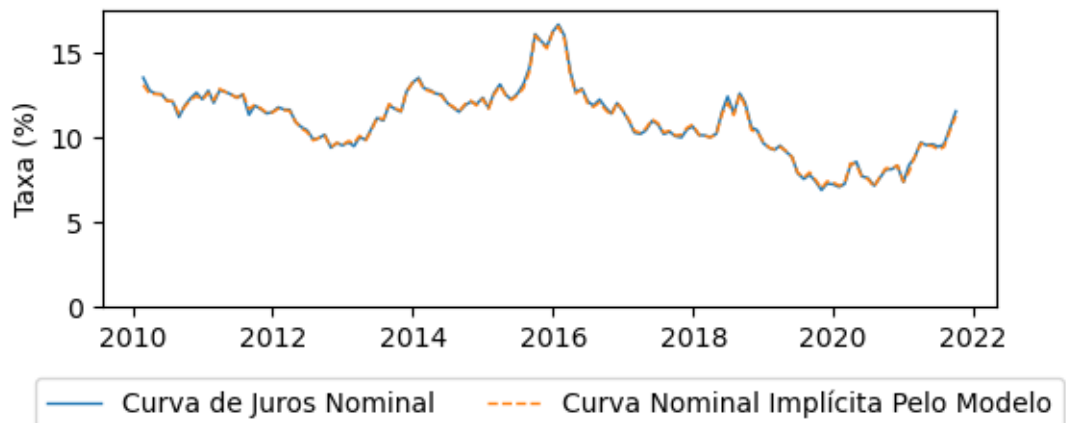
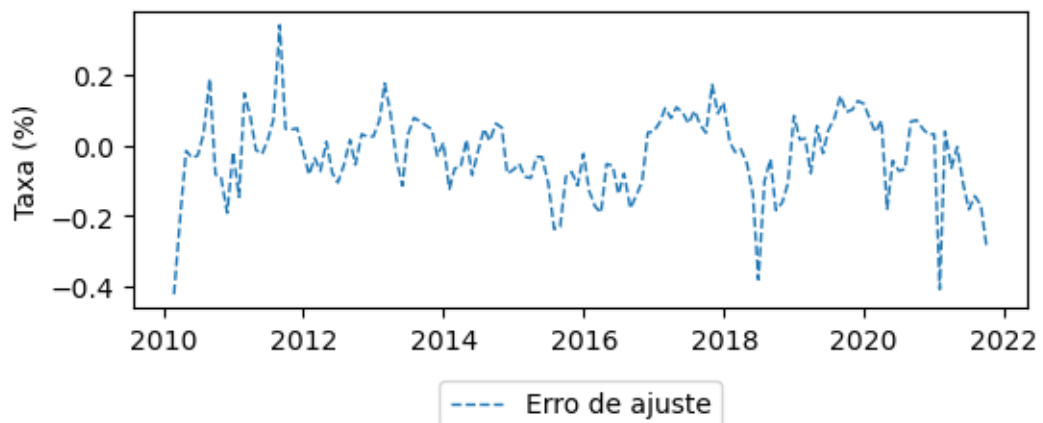


Figura 15 – Erro de Ajuste da Taxa Nominal de 10 anos



Quando analisamos as curvas reais geradas pelo modelo a aderência para a curva original é um bem menos precisa, ela tende a subestimar a curva em 0.5% na parte mais curta da curva e assim como para os juros nominais, melhora quão mais longo for o prazo de maturidade observado, chegando a -0.17% para os 10 anos

Algumas hipóteses foram levantadas sobre o por que dessa diferença. Ela pode ser um algum erro de estimação dos fatores de NSS, já que diferentemente do estudo original, onde os fatores NSS estavam disponíveis por um trabalho cuidadoso feito por Gürkaynak, Sack e Wright (2007), este estudo tentou gerar os próprios fatores. Certamente, com um trabalho dedicado exclusivamente a encontrar os melhores fatores, testando uma gama maior de possibilidades, os fatores encontrados minimizariam melhor os erros da curva NSS contra as originais, possivelmente tornando a curva real gerada pelo do modelo também mais aderente às originais.

Outra hipótese a ser considerada é que erro pode vir ainda por fatores intrínsecos dos títulos públicos ligados à inflação, como pouca liquidez das NTN-Bs ou pela da existência de uma oportunidade de arbitragem nas nesses títulos públicos indexados à inflação.

Para 1 ano, Figura 16 e Figura 17 , o erro de ajuste médio foi de -0.44% , com o grades erro máximo de 2.36% e o mínimo de -3.13% . Para 5 anos, Figura 18 e Figura 19 , encontramos um erro de ajuste médio de -0.34% , com o erro máximos de 1.10% e o mínimo de -1.50% . Enquanto para 10 anos, Figura 20 e Figura 21 , encontramos um erro de ajuste médio de -0.17% , com o erro máximos de 0.62% e o mínimo de -1.25% .

Figura 16 – Taxa de Juros Real de 1 ano

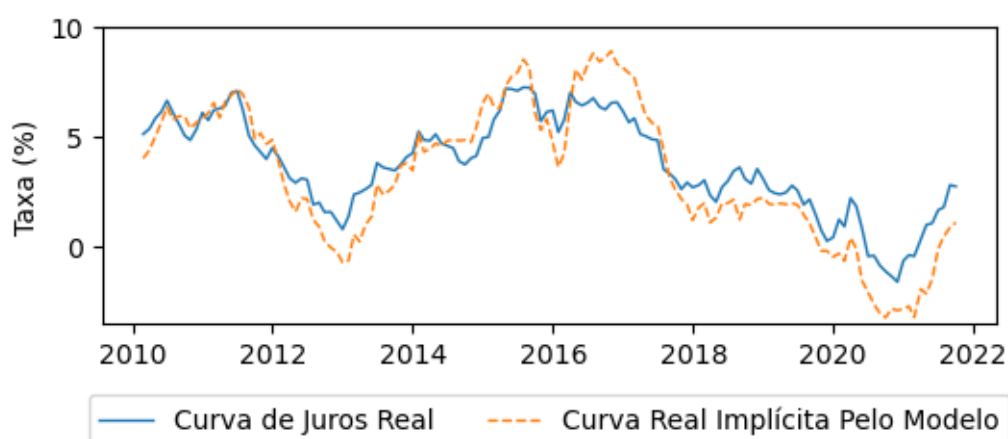


Figura 17 – Erro de Ajuste da Taxa Real de 1 ano

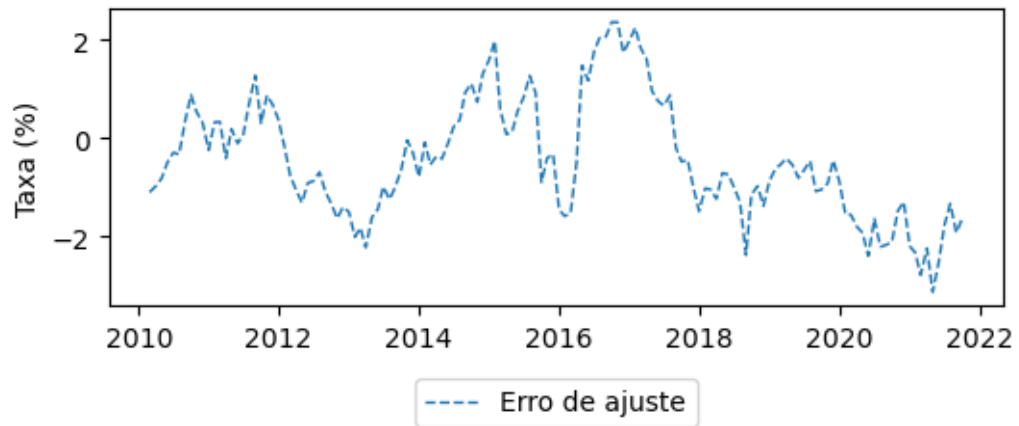


Figura 18 – Taxa de Juros Real de 5 anos

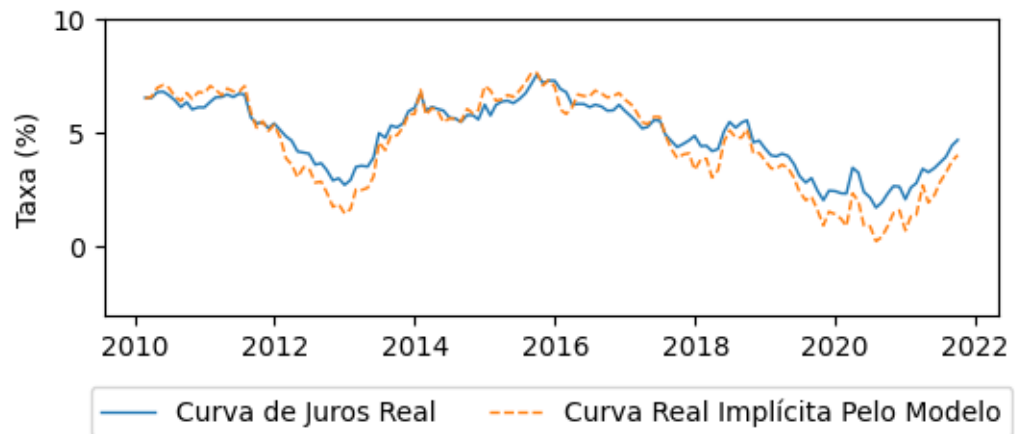


Figura 19 – Erro de Ajuste da Taxa Real de 5 anos

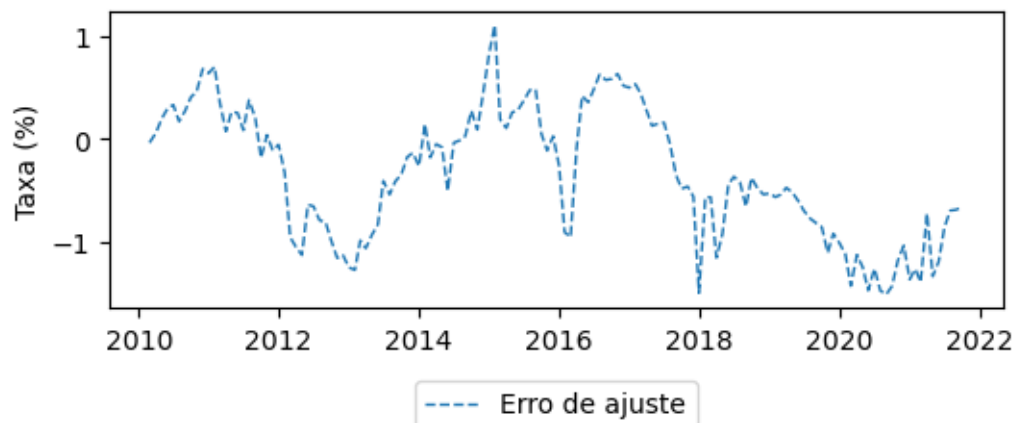
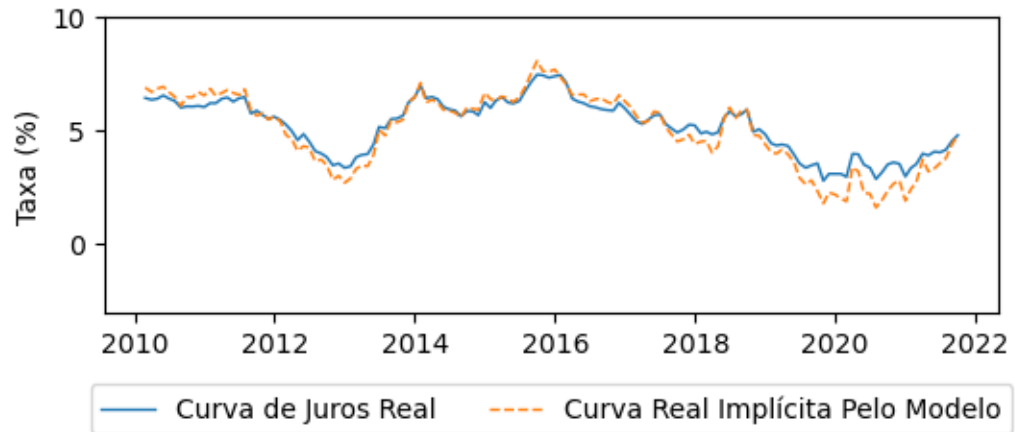
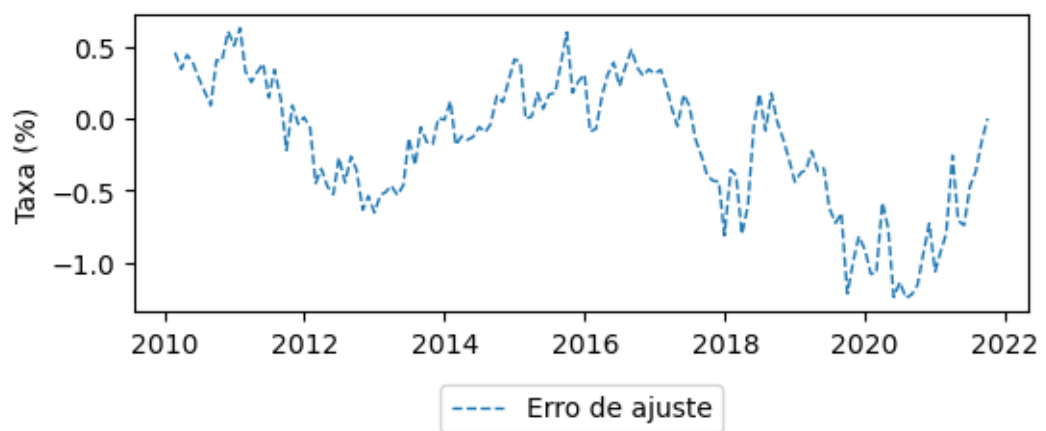


Figura 20 – Taxa de Juros Real de 10 anos**Figura 21** – Erro de Ajuste da Taxa Real de 10 anos

4 RESULTADOS

4.1 Análise dos Prêmios de Risco

Baseado na metodologia da subseção 2.1.4 e nos dados do Capítulo 3 pode-se encontrar os prêmios para cada período. Como descrito anteriormente, ao reestimar-se o modelo anterior com os parâmetros de risco zerados, ou seja $\hat{\lambda}_0 = 0$ e $\hat{\lambda}_1 = 0$, encontra-se uma curva neutra ao risco, e ao se subtrair essa curva neutra ao risco da curva original, o prêmio de risco implícito da estrutura a termo das taxas de juros.

Os resultados foram muito consistentes com a literatura, em Takimoto (2016), por exemplo o autor decompõe a curva de juros nominal utilizando a técnica proposta por Cochrane e Piazzesi (2008) para o mercado brasileiro e encontra prêmios de risco para 5 anos em períodos correlatos muito próximos ao encontrados nesse trabalho em magnitude, e sobretudo em direção.

Figura 22 – Prêmio na Curva de Juros Nominal

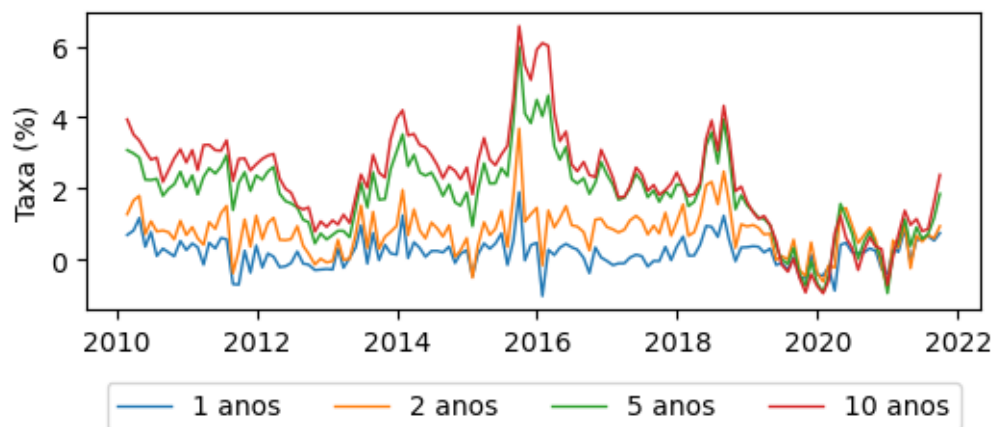
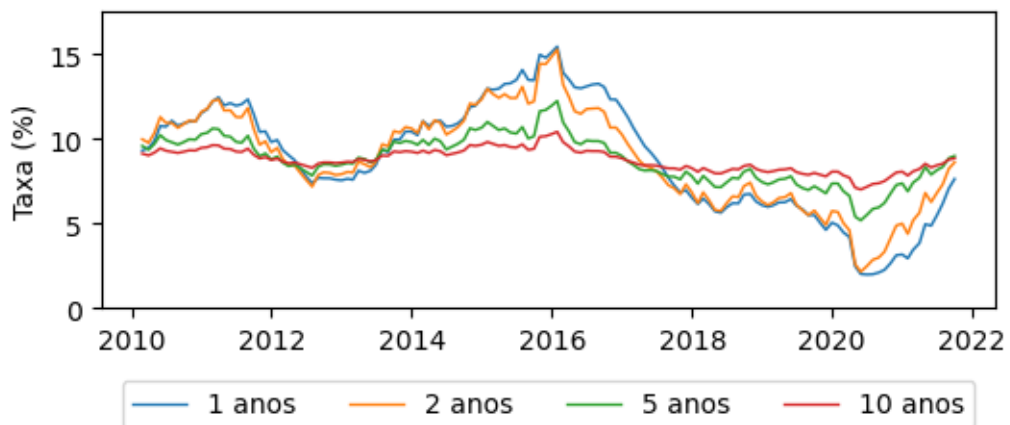


Figura 23 – Curva Nominal Neutra ao Risco



As curvas Nominais neutras ao risco tem comportamentos bem diferentes quando se analisam prazos diferentes. Quanto mais longo é o prazo de vencimento analisado mais estável é a curva e menos relacionado ao CDI é a mesma. Pode-se ver que no início de 2016, quando a curva neutra de 1 ano atingiu valores acima de 15% a curva de 10 anos ficou apenas 1.70% mais alta que sua média de 8.73% enquanto a amplitude da curva de 1 ano é muito maior. Apesar disso, as curvas nominais da Tabela 1 para os prazos de 1 e 10 anos tem valores muito próximos. Este fato corrobora a existência de prêmios de risco diferentes para cada maturidade. Enquanto na média o prêmio de risco de 10 anos corresponde a 18.41% da curva nominal de 10 anos, para 1 ano essa relação cai para 2.08%.

Figura 24 – Decomposição da Curva de 1 ano

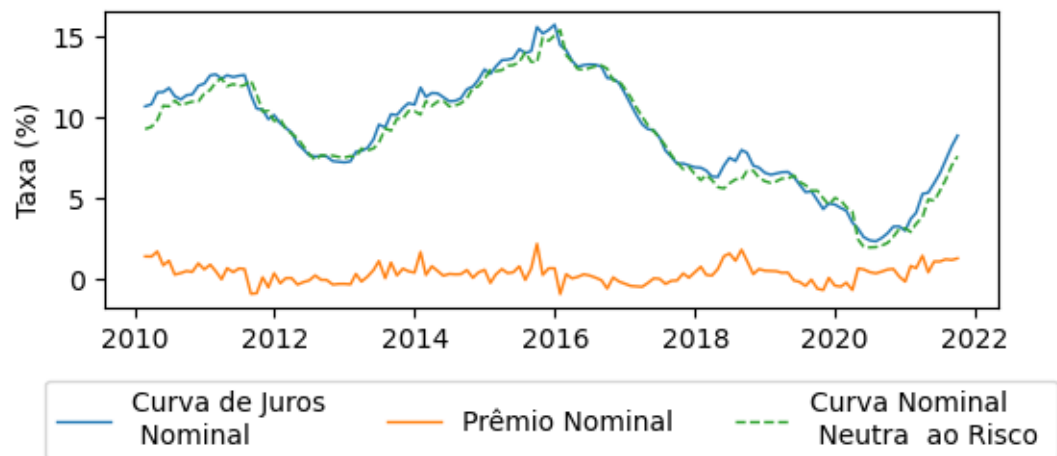


Figura 25 – Decomposição da Curva de 10 anos

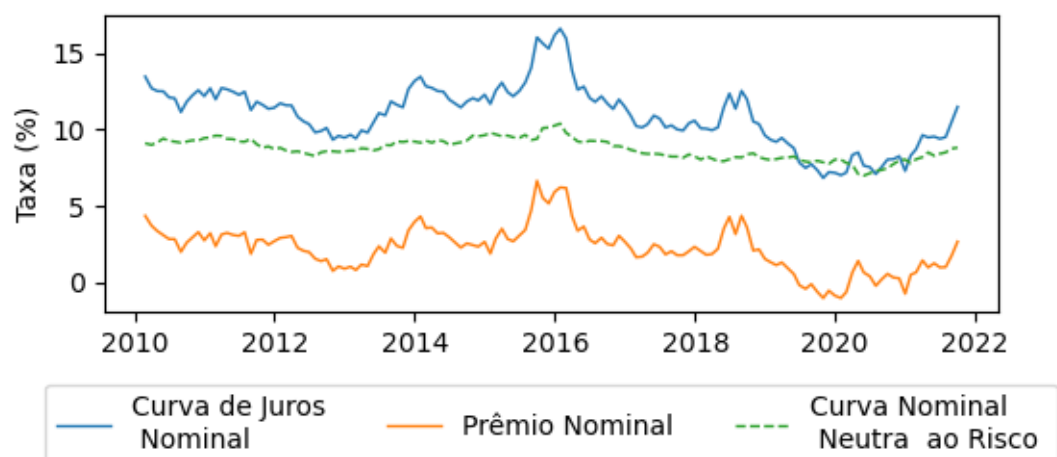
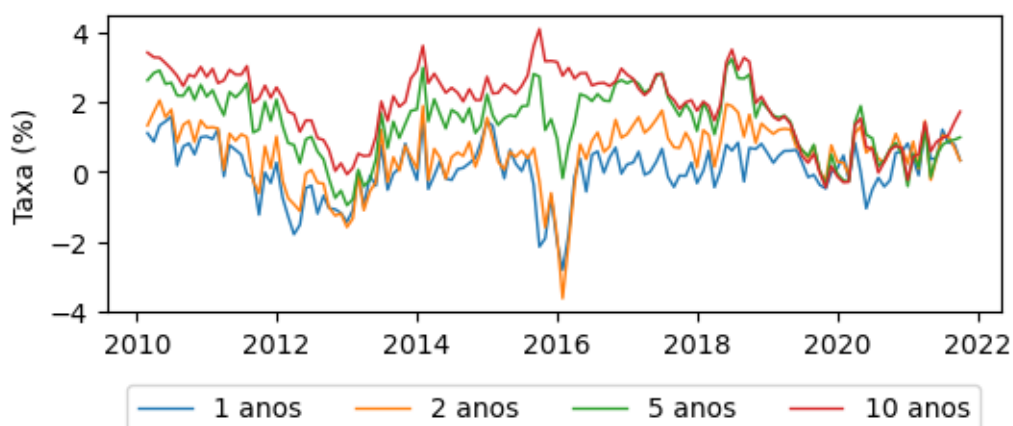


Figura 26 – Prêmio na Curva de Juros Real

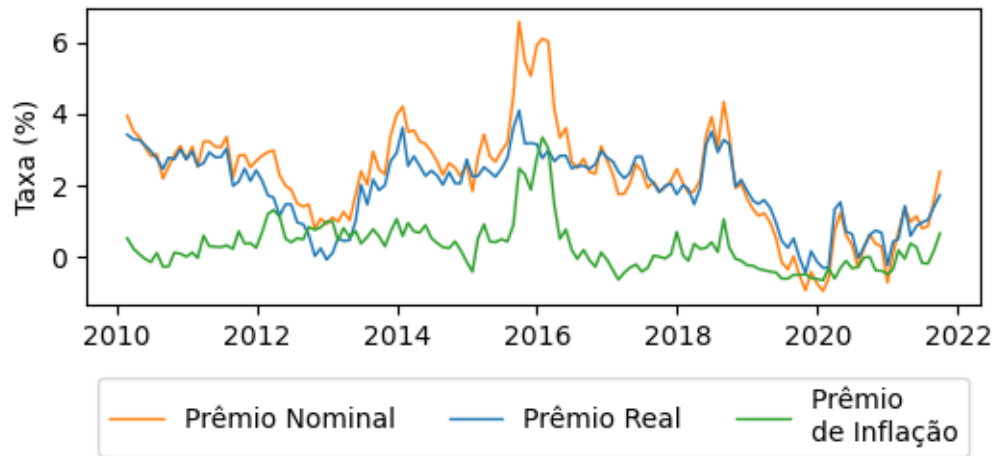
Analisando-se os prêmios reais encontrados temos alguns fatos interessantes. Primeiro, assim como esperado a quanto maior o prazo, maior o prêmio exigido pelo mercado para a compra do título público. Segundo, quando comparados com os prêmios nominais, os prêmios reais apresentam uma estabilidade muito maior. E terceiro, em meados de 2016, o prêmio real de 1 e 2 anos ficou negativo. Enquanto é verdade que a aderência do modelo não é plenamente satisfatória para o período e prazo, ao se analisar 5 anos vemos que talvez esse prêmio negativo seja de fato uma realidade do período.

Esse prêmio negativo pode ser interpretado como se os títulos públicos atrelados a inflação fossem considerados como um seguro pelos agentes do mercado e, de fato, pelo período que ocorre, com uma incerteza política muito grande fruto do início do processo de impeachment da presidente Dilma Rousseff e a inflação saindo do controle atingindo as máximas do período analisado essa interpretação ganha força.

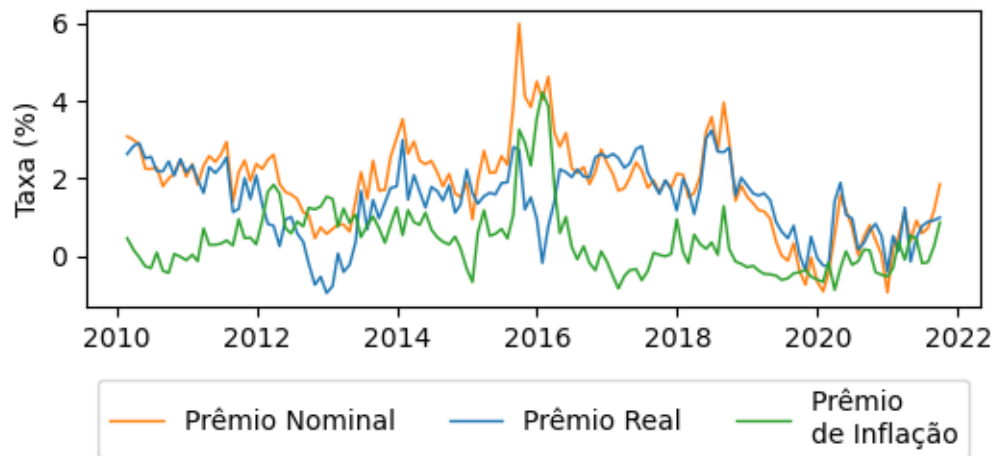
4.2 Decomposição do Prêmio de Risco

Quanto à decomposição do prêmio de risco nominal, entre real e de inflação é interessante notar que em comparação com os resultados originais dos Estados Unidos, o prêmio de risco de inflação é muito mais importante na formação do prêmio nominal.

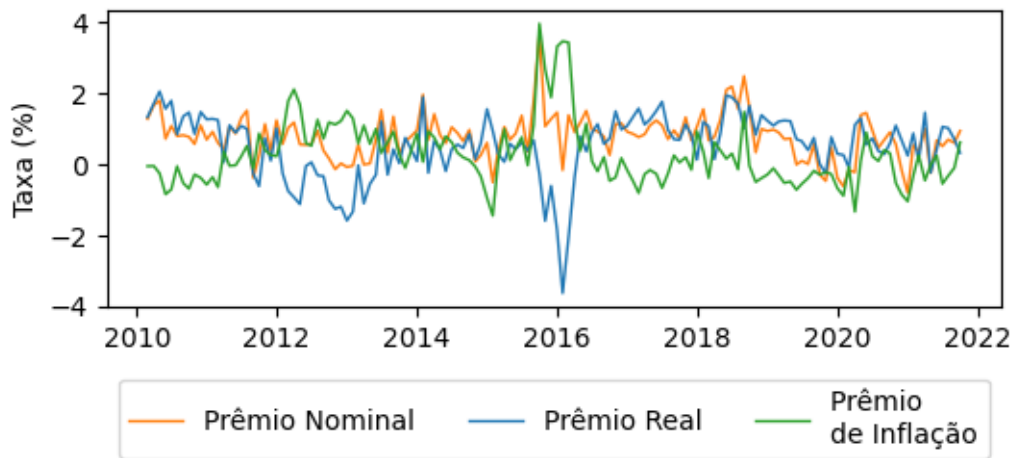
Começando a análise para 10 anos, o qual tem a melhor aderência entre o modelo e as curvas reais, a fim de se conseguir um insight melhor dos movimentos e tentar evitar conclusões contaminadas por algum erro, vê-se que em períodos conturbados (na próxima seção 4.3 um detalhamento de alguns períodos é realizado), o prêmio de inflação assume uma importante parcela do prêmio total, especialmente em meados de 2016. Uma outra constatação interessante é que o prêmio de inflação é negativo em alguns períodos, em linha com as análises em outros países, e por breves períodos de tempo, superior ao prêmio real.

Figura 27 – Decomposição dos Prêmios de Risco para 10 anos

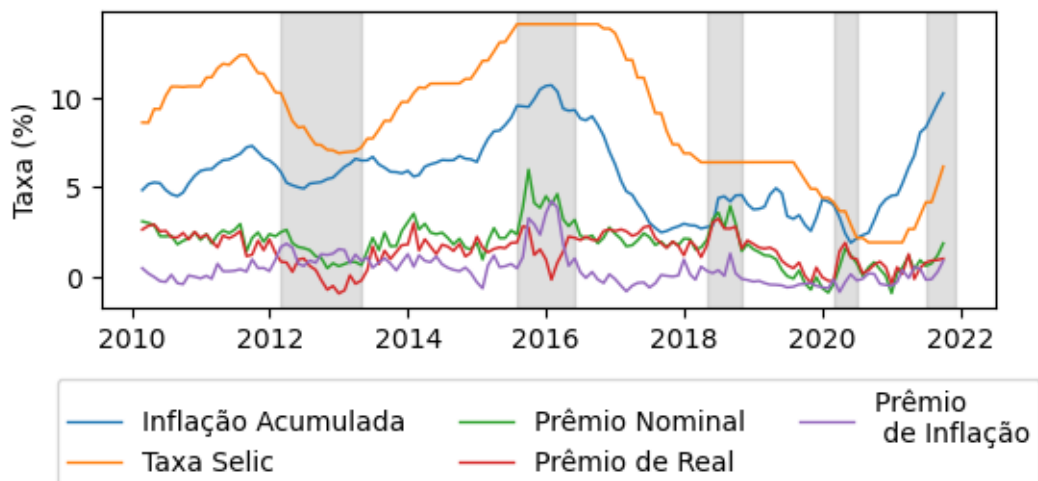
Já na decomposição de 5 anos, os períodos que o prêmio de inflação é superior ao real são mais frequentes e o prêmio real por vezes é negativo, esta maturidade será usada de exemplo na próxima seção e uma análise cuidadosa será feita.

Figura 28 – Decomposição dos Prêmios de Risco para 5 anos

Por fim, a decomposição dos prêmios de risco de 2 anos apresenta uma dificuldade maior de análise, os erros de ajuste do modelo existente não permite uma clara conclusão dos movimentos mas com base nas outras maturidades é possível inferir que durante meados de 2016 o risco real de fato estava negativo e o de inflação nas máximas do período analisado, provavelmente frutos de uma inflação descontrolada em um ambiente político extremamente conturbado o que gerava incertezas quanto do futuro econômico do Brasil.

Figura 29 – Decomposição dos Prêmios de Risco para 2 anos

4.3 Análise Histórica dos Prêmios

Figura 30 – Selic X Inflação Acumulada X Prêmios

Para se analisar corretamente o comportamento dos prêmios encontrados é necessário que se faça um estudo do ambiente político e econômico e como isso os afetou. Para tal análise, utilizou-se os prêmios encontrados de 5 anos contra a inflação acumulada e a taxa SELIC efetiva.

Durante o final de 2011 o Banco Central começou um ciclo de cortes da taxa SELIC que muitos participantes consideraram excessivo. A meta SELIC saiu de 12.50% em 20 de julho de 2011 para 7.25% em 10 de outubro de 2012. No começo desse ciclo, podemos ver que todos os prêmios caíram junto com a SELIC em um movimento natural, em março de 2012 porém, pode-se ver que o prêmio de inflação ultrapassa o prêmio real, mostrando que os participantes do mercado não estavam satisfeitos com a queda excessiva de patamar dos juros e passaram a exigir um prêmio muito grande para manter posições atreladas à

inflação. Essa posição somente foi normalizada em maio de 2013, quando o BACEN voltou a subir os juros e a inflação a mostrar sinais de estabilidade.

No final de 2015, o ambiente político estava muito conturbado com a possibilidade de Impeachment da presidente Dilma Rousseff, a meta SELIC estava nos patamares mais elevados da história recente e a inflação continuava a subir. O mercado passou então a exigir um prêmio muito maior com as incertezas futuras e atingiu o maior nível nominal do período analisado. Observa-se que apesar disso, o prêmio real ficou próximo a zero, enquanto o prêmio de inflação teve uma alta significativa.

Em 2018, ano eleitoral, o ambiente político voltou a ser especialmente tumultuado, com a prisão de Lula, candidato líder das pesquisas, e o antagonismo entre os candidatos com propostas econômicas completamente divergentes a incerteza tomou conta das precificações. Como era de se esperar, os prêmios nominais subiram consideravelmente nesse período puxados pelos prêmios reais, neste período no entanto, a inflação não era uma grande preocupação, com a taxa SELIC estável e assim o prêmio de inflação se manteve bem comportado.

Em março de 2020, com início da pandemia do Covid-19 e sua conseqüente incerteza nos rumos econômicos do país, os prêmios nominais tiveram uma alta expressiva, novamente puxados pelo prêmio real e com a estabilidade do prêmio de inflação, condizente com a queda nos preços durante o período.

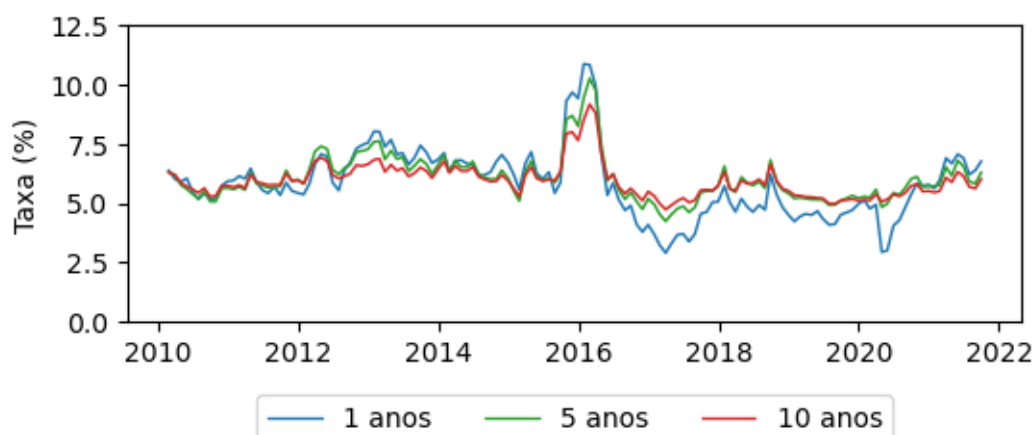
Por fim, nos meses mais recentes a inflação voltou a ser uma preocupação na economia e os prêmios de inflação voltaram a dar sinais de subida nesses últimos meses do escopo do trabalho, tendência essa que deve se manter caso o tema seja revisitado no futuro.

Esta análise histórica dos prêmios permite conclusões muito interessantes. Conforme o esperado, em momentos de grandes incertezas políticas e principalmente fiscais os prêmios tendem a subir, enquanto em momentos de calmarias o prêmio exigido pelo mercado tende a cair. Além disso, é possível concluir que quando a natureza das incertezas trazem períodos de inflação mais alta, o prêmio de inflação é o que move os prêmios nominais, enquanto quando os períodos de inflação controlada é o prêmio real que tem mais significância na explicação das mudanças do prêmio nominal

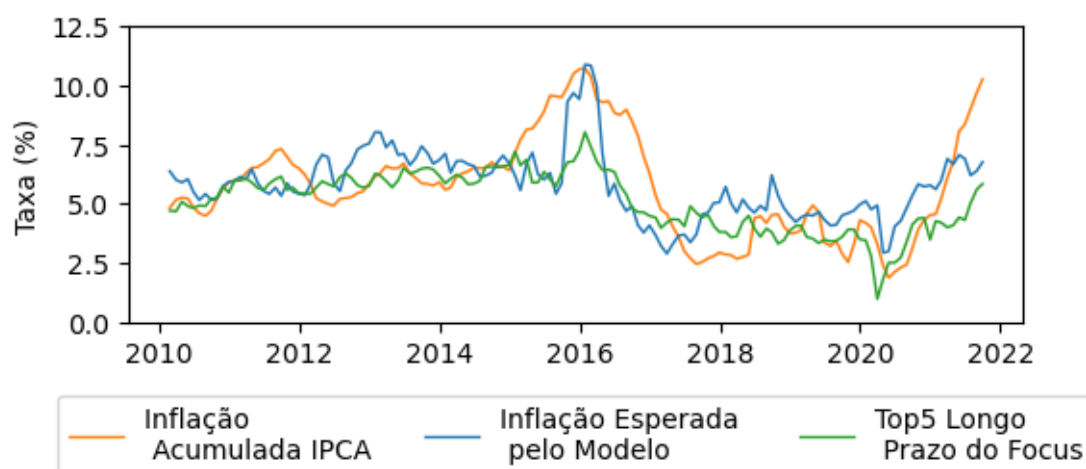
4.4 Inflação Implícita Pelo Modelo

O modelo AACM2016, na Equação 2.54, ainda permite que seja estimada a inflação esperada para todos os períodos de tempo pelo pela diferença entre as taxas de juros reais e nominais para o período proposto. Pode-se ver que a inflação de curto prazo tem amplitudes maiores que as de longo prazo.

É interessante notar que a inflação implícita é consistentemente maior que o centro da meta de inflação do período analisado (4.5% de 2010 até 2019 e caindo 0.25% por ano depois disso).

Figura 31 – Inflação Esperada

Quando analisamos a inflação realizada acumulada em 12 meses, a inflação esperada do modelo, e a inflação esperada pelo Top5 de longo prazo do Focus vemos que há uma aderência muito grande entre elas.

Figura 32 – Inflação Esperada para 1 Ano

4.5 Comparação com o CDS

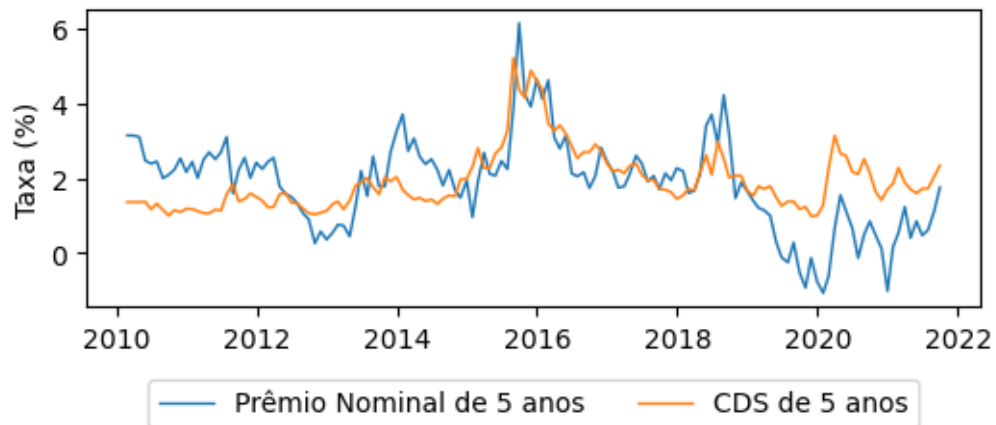
Por fim, é interessante notar que o comportamento do prêmio nominal de 5 anos e do CDS na Figura 33. Ambas têm um comportamento parecido a despeito de um se referir a prêmios domésticos e outro como um seguro contra o não pagamento da dívida externa brasileira.

Uma hipótese para tal comportamento é que a deterioração fiscal no país ao provocar inflação local pode levar a uma fuga de capitais, sejam eles investidos em títulos públicos ou outros investimentos, elevando a cotação do dólar no país e gerando um risco maior de não pagamento da dívida externa.

Uma outra hipótese é que o aumento do prêmio nominal reflete incertezas econômicas e políticas, como visto na seção 4.3, fatores componentes do CDS, vide ao aumento da chance um não pagamento da dívida externa em casos de desfuncionalidade grave do país.

Essa correlação pode se dar ainda através da via fiscal. Com um aumento do descontrole fiscal, a inflação e a expectativa da mesma tendem a subir gerando uma dificuldade maior para se cumprir os pagamentos em períodos futuros é um aumento da chance de calote na dívida externa.

Figura 33 – Comparativo CDS x Prêmio de Risco do Modelo



5 CONCLUSÃO

O trabalho de decomposição das as curvas nominais e reais no Brasil, utilizando o modelo conjunto proposto em AACM(2016), possibilitou analisar o comportamento dos prêmios de risco contidos nos títulos públicos brasileiros e obteve resultados consistentes com literatura e com as expectativas iniciais. Não só os prêmios encontrados foram tão maiores quão maiores eram os prazos observados, como eles aumentaram em períodos de incertezas políticas e econômicas e diminuíram em períodos de calmaria.

A decomposição dos prêmios em relação à nominal, real e de inflação também teve um comportamento que segue a intuição inicial. Em períodos que as incertezas do mercado tinha como componentes principais um perigo inflacionário, os prêmios de inflação aumentaram rapidamente, enquanto em períodos que essas incertezas não tinham essa natureza, ou sejam, a expectativa de inflação estava controlada, eles permaneceram bem comportados. A previsão da inflação esperada também foi muito aderente com a realizada e com as expectativas de mercado e um comparativo com ativos aparentemente não correlacionados como o CDS mostrou um interessante campo a ser estudado.

Um dos problemas inerentes aos modelos ACM2013 e AACM2016 é a extrema dependência dos dados observados, uma mudança no horizonte de tempo gera mudanças importantes no nível dos prêmios encontrados.

A aderência do modelo no tocante dos juros reais em relação às curvas reais observadas, não se mostrou muito boa nesse estudo, especialmente para os prazos mais curtos da análise. Algumas hipóteses foram levantadas sobre essa questão. Diferentemente do estudo original, onde os fatores NSS estavam disponíveis por um trabalho cuidadoso feito por Gürkaynak, Sack e Wright (2007), este estudo tentou gerar os próprios fatores e certamente, com um trabalho dedicado exclusivamente a encontrar os melhores fatores, testando uma gama maior de possibilidades a fim de se encontra os melhores fatores minimizem os erros da curva, a curva de juros real do modelo gerado ficasse com mais aderência às originais e consequentemente os prêmios encontrados, mais acurados. Outra hipótese é que a liquidez mais baixa dos títulos indexados à inflação tenham influído no modelo ou ainda que exista uma possibilidade de arbitragem nesses títulos.

Por fim, cabe ressaltar que é sempre complicado importar um modelo criado para mercados desenvolvidos para mercados emergentes, o risco de crédito inerente do Brasil adiciona um fator complicador na análise e pode ser o motivo também da baixa aderência nos juros reais. A criação de um modelo conjunto adicionando o risco de crédito no modelo original permitiria então uma conclusão mais definitiva acerca dos prêmios encontrados, sendo um caminho complexo porém promissor para análises posteriores.

REFERÊNCIAS

- ADRIAN, T.; CRUMP, R. K.; MOENCH, E. Pricing the term structure with linear regressions. *Journal of Financial Economics*, v. 110, n. 1, p. 110–138, 2013. ISSN 0304-405X. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304405X13001335>>.
- ANG, A.; PIAZZESI, M. *A No-Arbitrage Vector Autoregression of Term Structure Dynamics with Macroeconomic and Latent Variables*. [S.l.], 2001. Disponível em: <<https://EconPapers.repec.org/RePEc:nbr:nberwo:8363>>.
- COCHRANE, J.; PIAZZESI, M. Decomposing the yield curve. 2008.
- COCHRANE, J. H.; PIAZZESI, M. Bond Risk Premia. *American Economic Review*, v. 95, n. 1, p. 138–160, March 2005. Disponível em: <<https://ideas.repec.org/a/aea/aecrev/v95y2005i1p138-160.html>>.
- DUFFEE, G. R. Term premia and interest rate forecasts in affine models. *The Journal of Finance*, v. 57, n. 1, p. 405–443, 2002. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/1540-6261.00426>>.
- FAMA, E.; BLISS, R. R. The information in long-maturity forward rates. *American Economic Review*, v. 77, n. 4, p. 680–92, 1987. Disponível em: <<https://EconPapers.repec.org/RePEc:aea:aecrev:v:77:y:1987:i:4:p:680-92>>.
- GIMENO, R.; NAVE, J. *Genetic algorithm estimation of interest rate term structure*. [S.l.], 2006. Disponível em: <<https://EconPapers.repec.org/RePEc:bde:wpaper:0634>>.
- GÜRKAYNAK, R.; SACK, B.; WRIGHT, J. The u.s. treasury yield curve: 1961 to the present. *Journal of Monetary Economics*, v. 54, n. 8, p. 2291–2304, 2007. Disponível em: <<https://EconPapers.repec.org/RePEc:eee:moneco:v:54:y:2007:i:8:p:2291-2304>>.
- LÜTKEPOHL, H. *New introduction to multiple time series analysis*. Berlin [u.a.]: Springer, 2005. ISBN 3540262393. Disponível em: <http://gso.gbv.de/DB=2.1/CMD?ACT=SRCHA&SRT=YOP&IKT=1016&TRM=ppn+366296310&sourceid=fbw_bibsonomy>.
- NELSON, C.; SIEGEL, A. F. Parsimonious modeling of yield curves. *The Journal of Business*, v. 60, n. 4, p. 473–89, 1987. Disponível em: <<https://EconPapers.repec.org/RePEc:ucp:jnlbus:v:60:y:1987:i:4:p:473-89>>.
- PEDRAS, G. B. V. *Dívida pública : A experiência brasileira*. [S.l.]: Brasília : Secretaria do Tesouro Nacional, 2009. ISBN 9788587841346.
- SVENSSON, L. *Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992 - 1994*. [S.l.], 1994. Disponível em: <<https://EconPapers.repec.org/RePEc:nbr:nberwo:4871>>.
- TAKIMOTO, H. *Estimação do Prêmio de Risco da Curva de Juros no Brasil*. [S.l.], 2016.
- VICENTE, J. V. M.; GRAMINHO, F. M. Decompondo a Inflação Implícita. *Revista Brasileira de Economia - RBE*, v. 69, n. 2, June 2015. Disponível em: <<https://ideas.repec.org/a/fgv/epgrbe/v69y2015i2a23933.html>>.