



Insper

Business and Economics
Working Papers

BEWP 090/2010

Inferência Bayesiana aplicada
ao modelo dinâmico de
Nelson-Siegel com volatilidade
estocástica nos fatores

João F. Caldeira
Márcio P. Laurini
Marcelo S. Portugal

Inferência Bayesiana Aplicada ao Modelo Dinâmico de Nelson-Siegel com Volatilidade Estocástica nos Fatores

João F. Caldeira^{*,b}, Márcio P. Laurini^a, Marcelo S. Portugal^c

^a*Instituto Insper de Ensino e Pesquisa e Imecc-Unicamp*

^b*Departamento de Economia, UFRGS e Banco SICREDI SA*

^c*Departamento de Economia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul e CNPq*

Abstract

Neste artigo nós propomos estimar o modelo dinâmico da estrutura a termo da curva de juros de Nelson e Siegel (1987) considerando duas especificações alternativas. Na primeira nós consideramos os pesos dos fatores como variantes no tempo e tratamos a heterocedasticidade condicional via um modelo volatilidade estocástica com fatores comuns. No segundo caso consideramos um modelo onde os fatores latentes seguem individualmente processos autoregressivos com volatilidade estocástica. Os assim chamados fatores de volatilidade buscam capturar a incerteza ao longo do tempo associada ao nível, inclinação e curvatura da curva de juros. A estimação é realizada através de métodos de inferência bayesiana, por Markov Chain Monte Carlo. Os resultados mostram que os fatores de volatilidade são altamente persistentes, dando suporte ao fato estilizado de que os choques na volatilidade das taxas de juros são altamente persistentes, e também indicam que o uso de estruturas de volatilidade estocástica levam a melhores ajustes dentro da amostra para a curva de juros observada.

Key words: Estrutura a termo da taxa de juros, volatilidade estocástica, MCMC, modelos de fatores

JEL: C53, E43, G17

*Autor Contato: J.F. Caldeira, PPGE, UFRGS; E-mail: joao@ppge.ufrgs.br; Tel.: +55-(51)3358-8810; Fax: +55-(51)3358-4870.

1. Introdução

Ajustar e prever a estrutura a termo das taxas de juros é de extrema relevância para formuladores de política econômica. Em finanças, as informações reveladas pela curva de juros são importantes para a precificação de títulos, derivativos da taxa de juros, gestão de carteiras e alocação de ativos. Na macroeconomia a curva de juros traz importantes informações sobre o estado da economia e dos negócios. Assim, muitos pesquisadores tem se detido sobre o tema, fazendo florescer uma extensa literatura tratando do ajuste e previsão da estrutura a termo¹. Apesar de existir um grande número de trabalhos relacionados ao tema, poucos se dedicaram a ajustar e prever a curva de juros levando em conta a heterocedasticidade condicional presente na estrutura a termo da curva de juros.

Este problema é de grande importância já que usualmente nestes modelos o pressuposto de volatilidade constante nas taxas de juros tem implicações práticas importantes sobre as políticas de gerenciamento de risco, que podem ser demasiadamente simples ignorando o risco de uma estrutura de volatilidade que se altera no tempo. Outra implicação importante é que na presença de volatilidades condicionais os intervalos de confiança dos ajustes e previsões derivadas destes modelos serão calculados de forma incorreta.

Para analisar as consequências da presença de estruturas de volatilidade variantes no tempo, é importante recuperar as características das principais classes de modelos utilizados na modelagem da estrutura a termo de taxas de juros. Estes modelos podem ser divididos em três classes principais : os modelos de não arbitragem; os modelos de equilíbrio; e os modelos estatísticos.

Os modelos de não arbitragem para a estrutura a termo de taxas de juros são obtidos através da imposição de condições de consistência entre as curvas de juros de diversas maturidades que impeçam a existência sistemática de oportunidades de arbitragem, e são baseados na existência de uma medida martingale equivalente. Exemplos de modelos desta classe são os modelos de Hull e White (1990), e o framework geral que define estes modelos está colocado na contribuição fundamental de Heath et al. (1992). Em relação ao problema de volatilidades variantes no tempo, note que a estrutura definida em Heath et al. (1992) permite a possibilidade de estruturas de volatilidade estocástica.

No entanto a presença de estruturas de volatilidade estocástica na classe de modelos HJM leva a dois problemas importantes. O primeiro problema é dado forma como estes modelos são normalmente utilizados, na precificação de instrumentos derivativos. Nesta utilização os parâmetros do modelo HJM são obtidos pela calibração perfeita da curva de juros observada em um determinado dia através de preços de instrumentos de mercado. Embora esta forma permita a precificação livre de arbitragem de instrumentos derivativos, ela não permite a realização de previsões para a curva de juros, já que este ajuste é de natureza cross-section e não permite recuperar diretamente a dinâmica obser-

¹Veja por exemplo Filipovic (2009) para uma revisão sobre modelagem de taxas de juros.

vada na estrutura a termo da taxas de juros. O segundo ponto importante é que usualmente a imposição de estruturas gerais de volatilidade estocástica em modelos de não-arbitragem para a estrutura a termo de taxas de juros leva a dinâmicas não Markovianas para estas curvas de juros, o que dificulta o uso de métodos econométricos para a estimação de parâmetros, e assim é necessário o uso de métodos de calibração baseados em árvores multinomias usando preços de instrumentos de mercado, o que leva ao primeiro problema comentado que é impossibilidade de se gerar previsões para a curva futura de juros.

A segunda classe de modelos, os modelos de equilíbrio, são obtidos através da imposição de condições de equilíbrio entre os rendimentos das diversas maturidades na curva de juros. Estes modelos são normalmente baseados na modelagem da taxa a termo instantânea, utilizando tipicamente a estrutura de modelos modelos afins, em que as taxas de outros vencimentos podem ser derivadas assumindo que o prêmio de risco é dado por uma função afim. Modelos desta classe foram desenvolvidos em Vasicek (1977), Cox et al. (1985), Duffie and Kan (1996) ou em Dai and Singleton (2002). Estes modelos embora tenha a vantagem de ser analiticamente tratáveis e permitirem a obtenção de fórmulas fechadas para precificação de títulos e derivativos, tem um problema fundamental no ajuste e previsões para a curva de juros. A literatura aponta que estes modelos são normalmente deficientes nestes aspectos, e as previsões geradas pelos modelos de equilíbrio não superam as previsões do modelo de passeio aleatório, como mostrado, por exemplo, em Duffie and Kan (1996). Em relação ao problema da presença de volatilidades variantes no tempo, a imposição de estruturas de volatilidade estocástica nesta classe de modelos leva a problemas como a não existência de formulações afins ou então a necessidade de modelos não-homogeneos no tempo, levando a necessidade do uso de métodos de calibração, e que da mesma forma que na classe de modelos de não-arbitragem, impede o ajuste dinâmico da curva de juros e a elaboração de previsões. Uma discussão geral destes problemas pode ser encontrada em Brigo and Mercurio (2006).

A terceira principal classe de modelos é dada pelos modelos estatísticos. Estes modelos são obtidos como representações puramente estatísticas da evolução da estrutura a termo de taxas de juros, e assim são obtidos sem a imposição direta de condições de não-arbitragem ou equilíbrio. Esta classe é composta principalmente por modelos de componentes principais, modelos de fatores ou de variáveis latentes, bem como por modelos de interpolação. De acordo com Matzner-Lober and Villa (2004), grande parte da intuição a respeito da dinâmica da rentabilidade de títulos e bônus provém de modelos dessa classe, como em Litterman and Scheinkman (1991) e em Pearson and Sun (1994).

Dentre os modelos estatísticos, o modelo de Nelson-Siegel (Nelson and Siegel (1987)) e suas variantes, são os mais populares entre gestores de renda fixa e bancos centrais. A atratividade dos modelos de fatores do tipo Nelson Siegel se deve à sua parcimonia e boa performance empírica. Modelos deste tipo conseguem capturar a maior parte da evolução da estrutura a termo da taxa de juros através do uso de apenas três fatores. Várias extensões do modelo de Nelson-Siegel foram propostas (ver Almeida et al. (2007), Laurini and Hotta

(2008), Bjork and Christensen (1999), Rudebusch and Wu (2008), entre outros).

Os trabalhos de Diebold and Li (2006) e Diebold et al. (2006) voltaram atenção para o modelo de Nelson-Siegel e reinterpretaram o modelo dinâmico de Nelson-Siegel como um modelo estatístico de três fatores para descrever a curva de juros ao longo do tempo. Os três fatores são interpretados como nível, inclinação e curvatura, de forma consistente a interpretação obtida em Litterman and Scheinkman (1991) em que a interpretação tem algum sentido econômico. A principal contribuição é que Diebold e Li e Diebold, Rudebusch e Aruoba mostram que as previsões geradas superam muitos outros modelos, incluindo modelos de séries de tempo, tais como modelos de vetores autoregressivos (VAR) e modelos dinâmicos de correção de erro (ECM). Diebold et al. (2006) estendem a estrutura incluindo fatores macroeconômicos não latentes, como inflação e hiato do produto. Além disso, o modelo de Nelson-Siegel é colocado no formato de espaço de estados, onde os três fatores são tratados como componentes não observados e são modelados por um vetor autoregressivo.

A estimação dos parâmetros, em Diebold and Li (2006) e Diebold et al. (2006), parte de duas suposições simplificadoras. Os pesos dos fatores do modelo de Nelson-Siegel dependem de um único parâmetro de peso (decaimento), e para viabilizar a estimação dos fatores latentes variantes no tempo em um arcabouço linear, os pesos dos fatores são mantidos constantes ao longo do tempo para cada maturidade. Em Diebold and Li (2006), o parâmetro de peso é determinado exogenamente a adicionalmente estes pesos são mantidos constantes em toda a amostra. A segunda hipótese, também assumida em Diebold et al. (2006), Yu and Zivot (2008), Almeida et al. (2007), Caldeira et al. (2009) diz respeito à volatilidade, que é mantida constante para todas as maturidades e ao longo de todo o período amostral.

Estes pressupostos estão relacionados a maior dificuldade de estimação na presença de volatilidades e fatores de decaimento (peso) variantes no tempo. Ao abandonar estes pressupostos, a estimação pelos métodos usuais de mínimos quadrados ordinários não pode ser mais utilizada, e também as técnicas de estimação simultânea como a verossimilhança obtida através da decomposição do erro de previsão através do filtro de Kalman utilizadas em Caldeira, Moura e Portugal (2008) já não podem ser utilizadas pelo fato que com a representação com volatilidades e decaimentos variantes no tempo não é possível obter uma representação em espaço de estados linear e gaussiana.

Outro problema está relacionado com a alta dimensionalidade da estrutura a termo, que é tornada mais problemática ainda com o uso de volatilidades estocástica multivariadas. Neste problema se a estrutura de volatilidade é adotada para todos os fatores latentes o processo de volatilidade se torna um processo multivariado, o que torna os problemas de estimação bastante mais complicados, já que modelos multivariados de volatilidade estocástica apresentam problemas de inferência não triviais, como pode ser visto por exemplo em Chib et al. (2009). Algumas formas de tratar a questão foram propostas por Koopman et al. (2010), Laurini and Hotta (2008) e Hautsch and Ou (2009). Em Koopman et al. (2010) é adotada uma estrutura de volatilidade fatorial para as variáveis latentes, baseada em uma especificação baseada na classe de modelos

GARCH. Esta representação no entanto apresenta algumas limitações - para evitar os problemas de identificação e estimação em modelos GARCH multivariados, a estrutura de volatilidades é baseada em uma estrutura basicamente univariada, já que nesta especificação a volatilidade dos demais fatores latentes é obtida como um deslocamento linear de apenas um fator para a volatilidade. Também é importante notar que a forma de estimação utilizada é baseada em uma aproximação para a verossimilhança do processo, que pode não ser ter propriedades de otimalidade estatística. Outra dificuldade inerente a este modelo é a incompatibilidade de modelos GARCH com representações em tempo contínuo, o que limita a interpretação destes modelos em termos de processos de precificação em finanças.

Em Laurini and Hotta (2008) e Hautsch and Ou (2009) o processo de volatilidade estocástica é baseado nos modelos conhecidos como modelos log-normais de volatilidade estocástica, introduzidos por Taylor (1986). No modelo de Laurini and Hotta (2008) a especificação log-normal de volatilidade estocástica é assumida apenas para os erros de medida da curva de juros, enquanto que a estrutura de fatores latentes é assumida homocedástica. Na especificação proposta por Hautsch and Ou (2009) é assumido uma estrutura de volatilidade estocástica log-normal para cada fator latente, assim obtendo uma representação mais geral para o processo de volatilidade estocástica. Note que nestas duas abordagens a estimação é baseada em métodos Bayesianos utilizando Markov Chain Monte Carlo, devido às dificuldades inerentes a estimação de modelos de volatilidade estocástica, em que não é possível obter fórmulas fechadas para a avaliação da função de verossimilhança.

Neste trabalho apresentamos uma generalização das estruturas de volatilidade apresentadas em Koopman et al. (2010), Laurini and Hotta (2008) e Hautsch and Ou (2009). Utilizando dados dos contratos de DI-Futuro negociados na BM&F, nós estimaremos o modelo dinâmico de Nelson-Siegel com os pesos dos fatores e volatilidade variando no tempo. Nós consideramos duas especificações para modelar a volatilidade condicional. Na primeira, análoga a utilizada em Koopman et al. (2010) o grau de risco inerente à estrutura a termo é capturado via um componente comum de volatilidade. Na segunda alternativa propomos modelar diretamente a volatilidade estocástica de cada fator latente do modelo de Nelson-Siegel. Modelar a volatilidade diretamente nos fatores, além de ser uma abordagem mais parcimoniosa permite capturar a incerteza associada ao nível, inclinação e curvatura da curva de juros. Assim, a chamada volatilidade do nível reflete a volatilidade relacionada ao nível geral dos juros, enquanto a volatilidade da inclinação captura a incerteza inerente ao spread entre as taxas de longo e curto prazos. Já a volatilidade de curvatura está associada ao risco de mudanças na curvatura da estrutura a termo. Nesta especificação também é possível modelar o erro de medida da curva de juros como um processo com volatilidade estocástica, na forma utilizada em Laurini and Hotta (2008).

Ao contrário das especificações utilizadas em Koopman et al. (2010) e Hautsch and Ou (2009), nas duas especificações propostas o parâmetro que determina o peso dos fatores, λ_t , é também considerado como um processo latente que

varia estocasticamente ao longo do tempo, sendo tratado como um quarto fator latente. Esta adição é importante para a modelagem de curvas de juros de países emergentes, caracterizadas pelas frequentes mudanças nos formatos e maturidades máximas nas curvas de juros, como discutido em Laurini and Hotta (2008). A dinâmica dos fatores latentes de nível, inclinação e curvatura, juntamente com o parâmetro que determina o peso dos fatores é modelada conjuntamente como um processo autoregressivo. O parâmetro que determina o peso dos fatores é uma função não linear do vetor de observações. Levar em conta a heterocedasticidade condicional tem por objetivo melhorar a qualidade do ajuste e previsão em períodos de alta volatilidade, e para as maturidades que historicamente apresentam maior volatilidade. Além de tratar uma característica das curvas de juros dos mercados emergentes, que geralmente apresentam maior volatilidade do que curvas de juros de países desenvolvidos, caracterizadas por uma maior estabilidade no tempo e menores volatilidades.

2. Modelo de fatores de Nelson e Siegel para estrutura a termo da taxa de juros

Em um dado ponto do tempo, t , a curva de juros, denotada aqui por $y_t(\tau)$, é uma função representando a taxa de juros como uma função das maturidades τ . O modelo exponencial da curva de juros proposto por Nelson and Siegel (1987) e reinterpretado por Diebold and Li (2006) considera uma forma paramétrica para a evolução da estrutura a termo da taxa de juros ao longo do tempo, em que os coeficientes são tratados como nível, inclinação e curvatura. A curva de juros correspondente é:

$$y_t(\tau) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} \right) + \beta_{3,t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} - e^{-\lambda_t \tau} \right). \quad (1)$$

A forma da curva de juros é determinada pelos três parâmetros ($\beta_{1,t}$, $\beta_{2,t}$ e $\beta_{3,t}$) e pelos pesos associados a eles. O parâmetro λ_t , tratado como fixo em Diebold and Li (2006), governa a taxa de decaimento exponencial, pequenos (grandes) valores de λ_t estão associados a um decaimento suave (rápido), e ajustam melhor as maturidades mais longas (curtas). O peso do primeiro componente é 1 (constante) para todas as maturidades, assim $\beta_{1,t}$ representa o fator de longo prazo, e é interpretado como nível da curva de juros, que influencia igualmente as taxas de curto e longo prazo. O peso do segundo componente, $\left(\frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} \right)$ começa em 1 e converge para zero monotonicamente e rapidamente, sendo $\beta_{2,t}$ interpretado como inclinação da curva de juros, ou fator de curto prazo, dado que este fator influencia muito as taxas de juros curto prazo. O peso do terceiro componente, $\left(\frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} - e^{-\lambda_t \tau} \right)$, é uma função côncava, que assume valor zero para a maturidade zero, cresce, depois converge monotonicamente para zero nas maturidades mais longas. Assim, $\beta_{3,t}$ é interpretado como curvatura, ou fator de médio prazo, pois está associado às taxas de juros de médio prazo.

Em cada ponto do tempo existem taxas de juros $y_t(\tau)$ para diversas maturidades τ . Então, a equação pode ser estimada em cada ponto do tempo, de onde se obtêm séries de tempo dos parâmetros, β_t . Assim, se o comportamento dos fatores latentes β_t puder ser modelado e previsto, pode-se obter previsões da curva de juros a partir deles. Diebold and Li (2006), Almeida et al. (2007), entre outros, adotam um procedimento de dois passos para estimar o modelo. No primeiro passo são obtidas séries de tempo dos parâmetros através de regressões por mínimos quadrados em cada t , conseqüentemente as três séries de tempo dos β_t 's são modeladas por um processo autoregressivo de primeira ordem.

Uma alternativa, consiste em colocar o modelo no formato de espaços de estados e estimar todos os parâmetros simultaneamente. O sistema, composto pela equação de transição e equação de medida, é representado da seguinte forma:

$$y_t(\tau) = \Lambda(\lambda_t)\beta_t + \varepsilon_t. \quad (2)$$

Onde $\Lambda(\lambda_t)$ é uma matriz ($N \times 3$) de pesos dos fatores, que será variável no tempo apenas se o parâmetro de decaimento λ for variável.

$$\beta_t = (I - \Phi)\mu + \Phi\beta_{t-1} + \eta_t. \quad (3)$$

A equação de medida (2) define o vetor de taxas de juros ($T \times N$) para as N maturidades, como a soma dos fatores multiplicados pelos seus pesos, com um vetor de erros distribuídos Gaussianamente e independente entre as maturidades. O vetor β_t de dimensão (3×1) representa os fatores, e Φ é a matriz de coeficientes do VAR que modela a dinâmica dos estados (fatores latentes) ao longo do tempo. Para estimar o modelo em formato linear, através de Filtro de Kalman, por exemplo, os pesos dos fatores precisam ser mantidos constantes ao longo do tempo para cada maturidade, fazendo $\lambda_t = \lambda$.

3. Especificação do modelo com volatilidade estocástica nos fatores

No modelo de Nelson-Siegel o que determina a forma da curva de juros é o parâmetro λ_t . Na maioria dos trabalhos que estima o modelo através do método de dois passos o parâmetro que determina o peso dos fatores é determinado *a priori* por algum critério. Mesmo quando os parâmetros são estimados em uma única etapa através do Filtro de Kalman, λ_t é mantido fixo para todos os períodos. Isto se faz necessário uma vez que o algoritmo de estimação por máxima verossimilhança através da decomposição do erro de previsão usando o Filtro de Kalman se aplica apenas a modelos que são lineares no vetor de estados, o que não acontece quando λ_t varia no tempo.

Ao se tratar o parâmetro λ_t como fixo ao longo do tempo, a maturidade para a qual a curvatura é máxima se mantém a mesma para todo o período, e a velocidade de decaimento do fator $\beta_{2,t}$ também se mantém inalterada. Aqui, assumimos que o parâmetro λ_t é variante no tempo ele passa a ser tratado como um quarto fator latente. Assim, o novo vetor de estados, β_t , agora com quatro

parâmetros, incluindo $\lambda_t = \beta_{4,t}$, é modelado por um VAR. A nova equação de medida resultante desta alteração é não linear no parâmetro $\beta_{4,t}$.

$$y_t = \Lambda(\beta_{4,t}) (\beta_{1,t}, \beta_{2,t}, \beta_{3,t})' \quad (4)$$

A volatilidade pode ser modelada via inclusão de um componente comum de volatilidade agregada, ou tratada individualmente para cada fator. Koopman et al. (2010) adotam a especificação com componente comum de volatilidade, que é modelada por um processo GARCH. Nesse caso o modelo é linearizado e estimado através de filtro de Kalman extendido. Nós estimamos uma especificação semelhante, onde o processo GARCH é substituído por um processo de volatilidade estocástica log-normal, sendo que a formulação utilizada é a de um modelo autoregressivo para o componente comum não observado de volatilidade estocástica, com:

$$\varepsilon_t = \Gamma \varepsilon_t^* + \varepsilon_t^+, \quad t = 1, \dots, T \quad (5)$$

Onde Γ é um vetor de pesos ($N \times 1$), ε_t^* é um ruído escalar, e ε_t^+ é um vetor de ruídos ($N \times 1$). Os ruídos são mutuamente independentes e suas distribuições são dadas por:

$$\varepsilon_t^* \sim NID(0, \sigma_t^2), \quad \varepsilon_t^+ \sim NID(0, \Sigma_\varepsilon^t), \quad t = 1, \dots, T. \quad (6)$$

Onde a variância σ_t^2 segue um processo ARSV(1), dado por:

$$\log(\sigma_t^2) = \mu_\sigma + \phi \log(\sigma_{t-1}^2) + \nu_t, \quad t = 1, \dots, T. \quad (7)$$

Em que o ruído da equação da volatilidade, ν_t , é um ruído branco gaussiano com variância σ_ν^2 .

A escolha pela formulação utilizando o modelo log-normal de volatilidade estocástica pode ser justificada por diversos fatores. Existem evidências empíricas indicando que modelos capturam melhor fatos estilizados de séries financeiras e possuem desempenho preditivo superior a outras classes de modelos de volatilidade (e.g. Koopman et al. (2005)). Estes modelos também possuem formulações naturais em tempo contínuo, o que não acontece com os modelos GARCH usuais, e estes componentes adicionais de volatilidade estocástica podem ser formulados como fatores latentes adicionais na formulação de espaço de estados, e tratados pela mesma metodologia de estimação Bayesiana utilizando Markov Chain Monte Carlo.

O parâmetro λ_t e a variância σ_t^2 são variantes no tempo, e são especificados como um processo autoregressivo e um ARSV, respectivamente. Assim, λ_t depende dos fatores latentes $(\beta_{1,t}, \beta_{2,t}, \beta_{3,t})$ e a variância depende dos valores passados do distúrbio não observado ε_t^* . Como λ_t e ε_t^* são tratados como fatores latentes, tem-se um modelo em formato de espaços de estados não linear, com os cinco parâmetros variando no tempo. A equação de medida é dada por:

$$y_t = Z_t(\alpha_t) + \varepsilon_t^+, \quad \varepsilon_t^+ \sim NID(0, \Sigma_\varepsilon^+), \quad t = 1, \dots, T. \quad (8)$$

com $\alpha_t = (\beta_{1,t}, \beta_{2,t}, \beta_{3,t}, \beta_{4,t}, \varepsilon_t^*)' = (\beta_t', \varepsilon_t^*)'$ e onde $Z_t(\alpha_t)$ é um vetor ($N \times 1$) de funções

$$Z_t(\alpha_t) = \Lambda(\lambda_t(\beta_{1,t}, \beta_{2,t}, \beta_{3,t})' + \Gamma_\varepsilon \varepsilon_t^*, \quad t = 1, \dots, T. \quad (9)$$

com $\lambda_t = \beta_{4,t}$.

A dinâmica dos fatores latentes em β_t é modelada por um processo autoregressivo de primeira ordem, VAR(1). A equação de transição dos estados é definida por:

$$\alpha_{t+1} = c + \begin{bmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \alpha_t + \begin{pmatrix} \eta_t \\ \varepsilon_{t+1}^* \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} \eta_t \\ \varepsilon_{t+1}^* \end{pmatrix} \sim NID\left(0, \begin{bmatrix} \Sigma_\eta & 0 \\ 0 & h_{t+1} \end{bmatrix}\right),$$

para $t = 1, \dots, T$ e $c = [\mu'(I - \Phi)', 0]'$.

Uma abordagem alternativa analisada aqui consiste em tratar a heterocedasticidade condicional diretamente nos fatores latentes da curva de juros. Nesta especificação é modelada a volatilidade estocástica diretamente nos fatores de nível, inclinação e curvatura, permitindo capturar a incerteza ao longo tempo inerente a cada um dos fatores individualmente. A equação de medida mantém a mesma do caso anterior, $y_t(\tau) = \Lambda(\lambda_t)\beta_t + \varepsilon_t$, com o parâmetro λ_t sendo tratado como variante no tempo, logo a matriz de pesos dos fatores $\Lambda(\lambda_t)$ também é variante no tempo. O vetor de erros ($N \times 1$) definido como:

$$\varepsilon_t := (\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}, \dots, \varepsilon_{Nt}) \sim^{i.i.d} N(0, \Sigma) \quad (11)$$

com

$$\Sigma = \text{diag}\{\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_N^2\}. \quad (12)$$

Neste caso, tanto os fatores (estados não observáveis) como as volatilidades estocásticas associadas a eles são tratados como fatores latentes, sendo que a dinâmica dos fatores latentes é modelada por um vetor autoregressivo de primeira ordem, e para a heterocedasticidade condicional a formulação utilizada é a de um modelo autoregressivo para o componente não observado de volatilidade estocástica de cada fator, ARSV(1).

Como antes, assume-se que o vetor η_t (3×1), da equação de transição dos estados (equação 3) é independente de ε_t , e

$$\eta_t \sim^{i.i.d} N(0, H_t). \quad (13)$$

A matriz de covariância H_t é especificada em termos de um processo de volatilidade estocástica com a seguinte forma:

$$\text{vec}(\ln H_t) = \mu_h + \Phi_h \text{vec}(\ln H_{t-1}) + \xi_t \quad (14)$$

onde μ é um vetor de parâmetros (6×1) e Φ_h é uma matriz de parâmetros (6×6). Assume-se que o termo de erro ξ_t é independente de η_t e ε_t , e é normalmente distribuído com matriz de covariância Σ_h capturando as covariâncias das covariâncias,

$$\xi_t \sim^{i.i.d} N(0, \Sigma_h). \quad (15)$$

Para diminuir o esforço computacional, uma alternativa é restringir as matrizes H_t e Φ_h para uma especificação diagonal. Assim, a estrutura dos fatores latentes pode ser expressa por:

$$\begin{pmatrix} \beta_{1,t} \\ \beta_{2,t} \\ \beta_{3,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_L \\ \mu_S \\ \mu_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & a_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{1,t-1} \\ \beta_{2,t-1} \\ \beta_{3,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_{1,t} \\ \eta_{2,t} \\ \eta_{3,t} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

onde $\eta_t \sim^{i.i.d} N(0, H_t)$, com

$$diag(\ln H_t) = \begin{pmatrix} \ln(h_t^{\beta_1}) \\ \ln(h_t^{\beta_2}) \\ \ln(h_t^{\beta_3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_h^{\beta_1} \\ \mu_h^{\beta_2} \\ \mu_h^{\beta_3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_h^{\beta_1} & 0 & 0 \\ 0 & \phi_h^{\beta_2} & 0 \\ 0 & 0 & \phi_h^{\beta_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln(h_{t-1}^{\beta_1}) \\ \ln(h_{t-1}^{\beta_2}) \\ \ln(h_{t-1}^{\beta_3}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_{1,t} \\ \eta_{2,t} \\ \eta_{3,t} \end{pmatrix}. \quad (17)$$

em que $h_t^{\beta_1}$, $h_t^{\beta_2}$ e $h_t^{\beta_3}$ são os fatores de volatilidade, que capturam a incerteza ao longo do tempo relativa ao nível, inclinação e curvatura da curva de juros. O componente de nível da volatilidade, $h_t^{\beta_1}$, é a variância (variante no tempo) comum para todas as taxas de juros. Já o componente $h_t^{\beta_2}$ está associado à inclinação da curva de juros, refletindo a volatilidade do prêmio de risco das taxas de juros para as maturidades mais longas em relação às curtas. O fator $h_t^{\beta_3}$ está associado à incerteza relativa às taxas de juros para maturidades intermediárias, ou à curvatura da curva de juros.

4. Dados, Estimação e Resultados

Nesta seção, inicialmente nós descrevemos a base de dados relativa as taxas de juros a serem usadas e o método de estimação. A seguir examinamos estimações e ajuste dentro da amostra quatro especificações do modelo.

4.1. Dados

O contrato futuro de depósito interbancário (DI Futuro) com maturidade τ é um contrato futuro do qual o ativo básico é taxa de juros acumulada diariamente (DI), capitalizada entre o momento da negociação t e τ . O valor do contrato é dado pelo seu valor no vencimento, R\$ 100.000,00 descontado pela taxa de juros acumulada, negociada entre o vendedor e o comprador do contrato. Ao comprar um contrato de DI Futuro ao preço no tempo t e mantê-lo até a maturidade τ , o ganho ou perda é dado por:

$$100.000 \left(\frac{\prod_{i=1}^{\zeta(t,\tau)} (1 + y_i)^{\frac{1}{252}}}{(1 + DI^*)^{\frac{\zeta(t,\tau)}{252}}} - 1 \right),$$

Onde y_i denota a taxa DI ($i - 1$) dias após o dia da negociação. A função ζ representa o número de dias entre t e τ .

O contrato de DI é muito similar a um título zero-cupom, exceto pelo fato de pagar os ajustes de margem diariamente. A cada dia o fluxo de caixa é a diferença entre o preço de ajuste (liquidação) do dia corrente e o preço de ajuste do dia anterior, corrigido pela taxa DI do dia anterior.

Os contratos de DI Futuro são negociados na BM&F, que determina o número de vencimentos com contratos autorizados. Geralmente, para cada dia, existem em torno de 20 vencimentos com contratos autorizados, mas nem todos apresentam liquidez. Normalmente por volta de 10 vencimentos apresentam contratos com maior liquidez. Existem contratos com vencimentos mensais para os meses que iniciam cada trimestre, janeiro, abril, julho e outubro. Além disso, existem contratos com vencimentos para os quatro meses subsequentes ao mês corrente. A data de vencimento é o primeiro dia útil do mês de vencimento do contrato.

Os dados usados neste trabalho consistem de observações diárias das taxas dos contratos de DI-Futuro, preços de fechamento. Na prática, não observamos diariamente contratos com todas as maturidades. Portanto, a partir das taxas observadas diariamente os dados foram convertidos em maturidades fixas de 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 15, 18, 24, 27, 29, 31 e 33 meses, por meio de interpolações usando cubic splines. A base de dados é composta pelas maturidades que apresentaram maior liquidez para o período de Janeiro de 2006 a Fevereiro de 2009, perfazendo um total de 756 observações. Trabalhar com maturidades fixas facilita a análise dos resultados, e empregar dados não interpolados é mais relevante quando o objetivo é verificar condições de não-abrigo, como em Laurini and Westin (2010), por exemplo, que usando uma base de dados similar para o mesmo período concluem para a não ocorrência de oportunidades de arbitragem. Consequência, possivelmente, da elevada liquidez dos contratos de DI-Futuro no período para as maturidades empregadas. Na tabela 1 são apresentadas algumas estatísticas descritivas da curva de juros. Para cada maturidade são reportadas média, desvio-padrão, mínimo, máximo e alguns coeficientes de autocorrelação. Nota-se que as taxas de juros para maturidades mais curtas são mais voláteis e apresentam maior persistência, diferindo um pouco do que geralmente se observa em curvas de juros de economias com mercados mais maduros. Pode-se observar também, que mesmo que levemente, a curva de juros apresenta inclinação positiva em média, característica tipicamente observada.

4.2. *Estimação Bayesiana baseado em MCMC*

As especificações do modelo pelas equações (2, 3 e 7) ou (2, 3 e 17) constitui um sistema em formato de espaços de estados não linear, em que a equação 2 é a equação de medida, expressando as taxas de juros observadas $y_t(\tau)$ como função dos fatores latentes, $\beta_{t,j}$, do parâmetro de peso dos fatores λ_t e das maturidades τ . A dinâmica dos fatores latentes é determinada pela equação 3, que descreve um processo regressivo de primeira ordem, com matriz de parâmetros dada por Φ .

Tabela 1: Estatísticas descritivas da curva de juros (Jan-06 a Fev-09).

Maturidade	Média	Desv. pad	Mínimo	Máximo	$\hat{\rho}(21)$	$\hat{\rho}(63)$
1	13.125	1.731	11.05	17.71	0.894	0.672
2	13.082	1.677	11.04	17.60	0.890	0.662
3	13.05	1.620	11.02	17.40	0.885	0.650
4	13.027	1.566	11.02	17.21	0.879	0.635
6	13.028	1.523	10.90	16.72	0.866	0.597
9	13.058	1.534	10.78	16.54	0.858	0.575
12	13.121	1.567	10.68	16.47	0.851	0.560
15	13.193	1.600	10.60	16.91	0.849	0.553
18	13.248	1.614	10.46	17.15	0.845	0.550
24	13.287	1.615	10.37	17.36	0.840	0.543
27	13.311	1.625	10.28	17.57	0.836	0.536
29	13.321	1.630	10.21	17.72	0.831	0.527
31	13.325	1.632	10.15	17.83	0.828	0.521
33	13.326	1.633	10.13	17.87	0.827	0.517

Nota: As duas últimas colunas apresentam autocorrelações para defasagens de 1 e 3 meses.

No primeiro caso é considerado um componente agregado de volatilidade estocástica para os erros da equação de medida, descrito pela equação 7, que segue a especificação proposta por Koopman et al. (2010), porém, neste caso a formulação empregada é a de um ARSV(1) para o componente não observado do log volatilidade estocástica. No segundo caso, em que é modelada diretamente a variância dos fatores, a matriz de covariância é especificada em termos de um processo de volatilidade estocástica dado pela equação 17.

Note que nas duas especificações o parâmetro que determina o peso dos fatores λ_t é tratado como variante no tempo e é inserido vetor β_t . Assim, o modelo não pode ser estimado por métodos de estimação como filtro de Kalman, que se aplicam apenas a modelos que são lineares no vetor de estados. Uma alternativa é linearizar localmente a equação de transição dos estados e empregar o algoritmo do filtro de Kalman estendido (para detalhes ver Anderson and Moore (1979)). Como é de particular interesse manter a especificação, a forma de realizar a estimação simultânea do modelo é através de métodos de inferência bayesiana usando Markov Chain Monte Carlo. Para justificativas adicionais do uso de métodos bayesianos em modelos de estrutura a termo pode ser consultado o trabalho de Chib and Ergashev (2009), que aponta as vantagens destes métodos em relação aos problemas de dimensionalidade, identificação e inferência em modelos multifatores para a estrutura a termo.

Ao empregar métodos de inferência bayesiana, o objetivo é encontrar a distribuição posterior dos parâmetros de interesse condicionados a amostra observada, denotada por $p(\Theta|y)$. Para encontrar a distribuição dos parâmetros condicionados a amostra, usa-se a relação:

$$p(\Theta|y) = p(\Theta, y)/p(\Theta) = p(y|\Theta)p(\Theta)/p(y) \quad (18)$$

onde $p(y|\Theta)$ é a verossimilhança do modelo, $p(\Theta)$ denota a distribuição a priori assumida para o parâmetro e $p(y)$ é a distribuição marginal da amostra, que precisa ser conhecida até uma constante de integração. Através do Lema de Bayes podemos escrever:

$$p(\Theta|y) = p(\Theta, y)/p(\Theta) = p(y|\Theta)p(\Theta)/c \quad (19)$$

assim temos que a posterior é proporcional ao produto da verossimilhança pela distribuição a priori:

$$p(\Theta|y) \propto p(y|\Theta)p(\Theta). \quad (20)$$

Quando o modelo a ser estimado pode ser colocado em formato de espaços de estados, uma forma conveniente de tratar o problema é através da metodologia de estimadores de Bayes Hierárquicos. Esta formulação é especialmente útil em modelos no formato espaços de estados já que a especificação hierárquica permite estimar a distribuição dos hiperparâmetros relacionados aos fatores latentes utilizando os próprios dados, especificando uma dinâmica de evolução para os fatores latentes.

O modelo diagonal conforme especificado acima corresponde a um modelo hierárquico latente em três níveis com seis processos latentes. Seja Θ a coleção de parâmetros do modelo, e seja $F_t := (\beta_{1t}, \beta_{2t}, \beta_{3t})$ e $V_t := (h_t^{\beta_1}, h_t^{\beta_2}, h_t^{\beta_3})$. Então, a função de verossimilhança do modelo é dada por:

$$p(\Theta|y) = \int_{F_1} \int_{F_2} \dots \int_{F_T} p(Y|\Theta, F_1, F_2, \dots, F_T)p(F_1, F_2, \dots, F_T|\Theta)dF_1dF_2 \dots dF_T, \quad (21)$$

onde $p(Y|\Theta, F_1, F_2, \dots, F_T)$ denota a densidade (condicional) das observações Y dados os parâmetros Θ , os fatores latentes e a estrutura imposta como dado pelas equações (2 e 12). Além disso, $p(F_1, F_2, \dots, F_T|\Theta)$ denota a densidade conjunta (condicional) dos fatores latentes, dados os parâmetros do modelo Θ e é determinada pela equação 3. Como os fatores são não observáveis, precisam ser integrados, resultando em uma integral de dimensão $(3.T)$. Claramente, $p(F_1, F_2, \dots, F_T|\Theta)$ depende de um novo conjunto de componentes desconhecidos representados pelos fatores de volatilidade V_1, \dots, V_T . Sendo computada como:

$$p(F_1, F_2, \dots, F_T|\Theta) = \int_{V_1} \int_{V_2} \dots \int_{V_T} p(F_1, F_2, \dots, F_T|\Theta, V_1, V_2, \dots, V_T) \times p(V_1, \dots, V_T|\Theta)dV_1dV_2 \dots dV_T, \quad (22)$$

onde $(V_1, \dots, V_T|\Theta)$ denota a densidade conjunta dos componentes da volatilidade como definido em 14. A função de verossimilhança acima não pode ser calculada analiticamente em forma fechada e requer técnicas de aproximação

numérica. Assim, o modelo pode ser estimado usando inferência baseada em Markov Chain Monte Carlo (MCMC), que aproximam esta integral como o resultado da simulação de cadeias de Markov. Consequentemente, considere $\Omega := \{\Theta, F_1, \dots, F_T, V_1, \dots, V_T\}$ como um vetor aleatório, cuja distribuição posterior $p(\Omega|Y)$ pode ser arranjada como:

$$\begin{aligned}
p(\Omega|Y) &= p(F_1, F_2, \dots, F_T, V_1, V_2, \dots, V_T, \Theta|Y) \\
&\propto p(Y|F_1, F_2, \dots, F_T, V_1, V_2, \dots, V_T, \Theta) \\
&\times p(F_1, F_2, \dots, F_T|V_1, V_2, \dots, V_T, \Theta) \\
&\times p(V_1, V_2, \dots, V_T, \Theta) \\
&\times p(\Theta)
\end{aligned}$$

Especificando as distribuições a priori, $p(\Theta)$, pode-se empregar o algoritmo Gibbs e o algoritmo de Metropolis-Hastings para simular a distribuição a posteriori, $p(\Omega|Y)$. Então, tanto os parâmetros e fatores estimados são obtidos tomando as médias amostrais das correspondentes amostras MCMC.

4.3. Análise dos Resultados

Para comparar as estimativas do modelo de Nelson-Siegel nas especificações com componente comum de volatilidade, e com fatores específicos de volatilidade nós também estimamos outras versões do modelo.

Inicialmente estimamos o modelo através do método de dois passos, com parâmetro λ fixo e sem levar em conta heterocedasticidade condicional, como proposto originalmente por Diebold and Li (2006). O parâmetro λ , que determina a forma da curva de juros, foi escolhido tal que minimize o RMSE para ajuste dentro da amostra ($\lambda = 0.1046$). Na tabela 2 são apresentados os parâmetros do VAR estimado para a dinâmica dos fatores. A dinâmica dos fatores latentes β_1 , β_2 e β_3 exibe elevada persistência, com coeficientes autoregressivos de 0.98, 0.99 e 0.99, respectivamente.

Na figura 1 plotamos os fatores latentes estimados. Parece claro que todos fatores exibem elevada persistência. A figura 2 traz a variância do erro de medida associada a esta especificação

Na tabela 3 a seguir apresentamos estatísticas para ajuste dentro da amostra para o modelo estimado pelo método de dois passos. Para critérios de comparação da qualidade do ajuste do modelo para as especificações alternativas propostas, calculamos ME (*Mean Error*), RMSE (*Root Mean Squared Error*), MAE (*Mean Absolute Error*), MPE (*Mean Percentage Error*), MAPE (*Mean Absolute Percentage Error*) e autocorrelação para uma defasagem. Nota-se que o modelo captura parte substancial da dinâmica da curva de juros, especialmente para as maturidades intermediárias, 12 e 15 meses, por exemplo. Entretanto, a elevada autorrelação nos resíduos indicam que informações importantes na média e variância estão sendo negligenciadas.

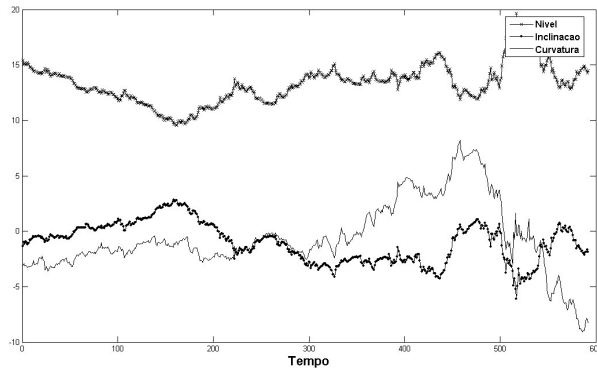
Com o objetivo de verificar se o parâmetro de decaimento varia ao longo do tempo, nós estimamos o modelo na especificação original de Diebold and Li

Tabela 2: Parâmetros do VAR para Modelo Estimado pelo Método de Dois Passos

	$\beta_{1,t-1}$	$\beta_{2,t-1}$	$\beta_{3,t-1}$	μ
$\beta_{1,t}$	0.984*** (0.012)	-0.002* (0.012)	0.003 (0.003)	13.189*** (0.1504)
$\beta_{2,t}$	0.015*** (0.012)	1.000*** (0.012)	0.002 (0.004)	-.211 (0.152)
$\beta_{3,t}$	-.033 (0.016)	-.045*** (0.016)	0.993*** (0.005)	0.384 (0.205)

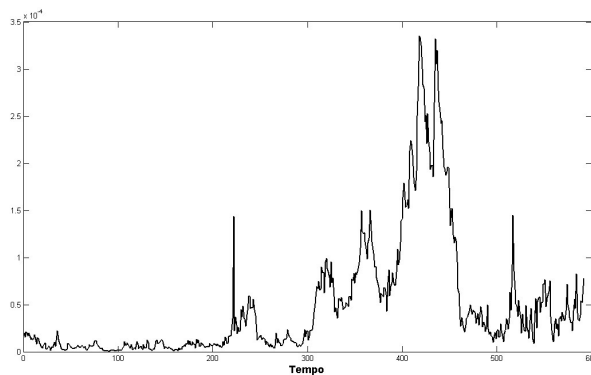
Nota: Erros padrões entre parênteses. Parâmetros obtidos da estimação do vetor autoregressivo para os fatores latentes. *, **, e *** indica significância estatística aos níveis de 10%, 5% e 1% respectivamente.

Figura 1: Fatores Latentes do Modelo Estimado pelo Método de Dois Passos.



β_1 , β_2 e β_3 obtidos por mínimos quadrados para cada período t .

Figura 2: Variância da Equação de Medida.



Variância dos erros de medida para modelo estimado pelo método de dois passos.

Tabela 3: Medidas de Ajuste da curva de Juros *in-sample* (Jan-06 a Fev-09).

Maturidade	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	ACF1
1	0.0028	0.005	0.0039	2.323	3.143	0.9776
2	0.0023	0.0051	0.004	-1.9552	3.1894	0.9903
3	0.0036	0.0068	0.0054	-2.9965	4.2797	0.9907
4	0.0042	0.0069	0.0055	-3.35	4.2983	0.9894
6	0.004	0.0054	0.0045	-3.1044	3.4733	0.9848
9	0.0033	0.0041	0.0035	-2.5686	2.7343	0.9781
12	0.0021	0.0026	0.0023	-1.6303	1.7834	0.9673
15	0.0007	0.0018	0.0015	-0.5964	1.1796	0.975
18	0.0006	0.0021	0.0017	0.3694	1.2656	0.982
24	0.0019	0.0032	0.0025	1.3454	1.8675	0.9821
27	0.0029	0.0041	0.0034	2.0897	2.5009	0.9829
29	0.0036	0.0049	0.0041	2.6405	3.0315	0.9827
31	0.0041	0.0054	0.0046	3.0056	3.3934	0.9823
33	0.0044	0.0057	0.0049	3.219	3.5979	0.9818
TOTAL	0.0029	0.0048	0.0037	-0.0863	2.8384	0.992

Nota: Modelo estimado pelo método de dois passos com fixo, $\lambda = .1046$, como em Diebold e Li.

(2006), porém, tratando o parâmetro λ como um fator latente que é modelado conjuntamente com os outros fatores por um processo VAR. Como comentado anteriormente, neste caso o modelo é não linear e desta forma os parâmetros são estimados simultaneamente por inferência bayesiana, através de MCMC. Para comparação do ajuste do modelo, a tabela 4 traz estatísticas dos erros de medida, definidos como as diferenças entre as taxas de juros observadas e suas estimativas.

Tabela 4: Medidas de Ajuste da curva de Juros *in-sample* (Jan-06 a Fev-09).

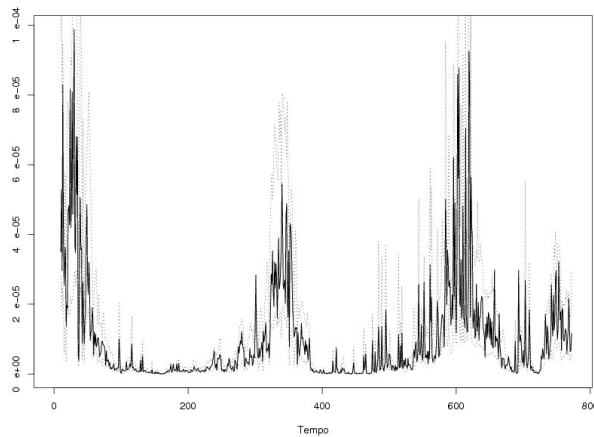
Maturidade	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	ACF1
1	0.002	0.0064	0.0047	1.4528	3.5273	0.0947
2	0.0018	0.0059	0.0045	1.2483	3.4316	0.7974
3	0.0014	0.0056	0.0043	0.9748	3.2793	0.8447
4	0.001	0.0047	0.0034	0.7123	2.6373	0.8151
6	0.0005	0.0029	0.0018	0.3644	1.3997	0.6698
9	0.0004	0.0021	0.0015	0.2555	1.1428	0.5871
12	0.0004	0.0018	0.0014	0.2801	1.0244	0.7348
15	0.0006	0.002	0.0014	0.3607	1.0342	0.9224
18	0.0005	0.0019	0.0015	0.2965	1.1255	0.9806
24	0.0002	0.0019	0.0014	0.054	1.0967	0.8771
27	0.0002	0.002	0.0013	-0.231	0.9927	0.6996
29	0.0006	0.0024	0.0016	-0.5345	1.1994	0.5719
31	0.001	0.0027	0.0019	-0.768	1.476	0.5222
33	0.0012	0.003	0.0022	-0.9259	1.6569	0.5002
TOTAL	0.0004	0.0036	0.0024	0.2529	1.7874	0.6412

Nota: Modelo estimado em uma única etapa por MCMC com λ_t variando no tempo.

Nota-se que, excluindo-se as maturidades mais curtas, o modelo ajusta melhor para todas as demais. Há destaque para as maturidades mais longas, acima de 18 meses, em que a melhora no ajuste é ainda mais significativa. Assim, parece ficar claro que tratar o parâmetro λ_t como fixo, apesar de facilitar os procedimentos de estimação do modelo, implica em perda na qualidade do ajuste. Esse resultado indica também que a maturidade para a qual a curvatura assume peso máximo não é constante ao longo do tempo. Assim, manter λ fixo ao longo de todo o período amostral pode ser muito restritivo, uma vez que os dados abrangem um longo período de tempo. Em particular, a maturidade na qual a o fator curvatura, β_{3t} é maximizada e a velocidade de decaimento do fator de inclinação β_{2t} dependem apenas do parâmetro λ , e são mantidas fixas por consequência. Entretanto, essas características da curva de juros podem mudar ao longo do tempo. A primeira especificação alternativa proposta para o modelo de Diebold and Li (2006) consiste em incluir um fator comum de volatilidade estocástica nos erros de medida, conforme definido pelas equações (2, 3 e 7), discutidas na seção 3. Neste caso, o fator de decaimento λ_t é tratado como um quarto fator latente e é estimado simultaneamente com os demais fatores. A

figura 3 apresenta o fator comum de volatilidade estocástica estimada. Pode-se observar que a volatilidade comum é especialmente alta no segundo semestre de 2008, período que coincide com a fase mais aguda da crise financeira internacional. O componente de volatilidade estocástica estimado mostra a capacidade do modelo em capturar a heterocedasticidade condicional existente nas taxas de juros, identificando os momentos de mudanças, como inversões de formato, por exemplo, ocorridas no final de 2006 e no último trimestre de 2008, períodos caracterizados por mudanças nos rumos da política monetária.

Figura 3: *Volatilidade Variante no Tempo.*



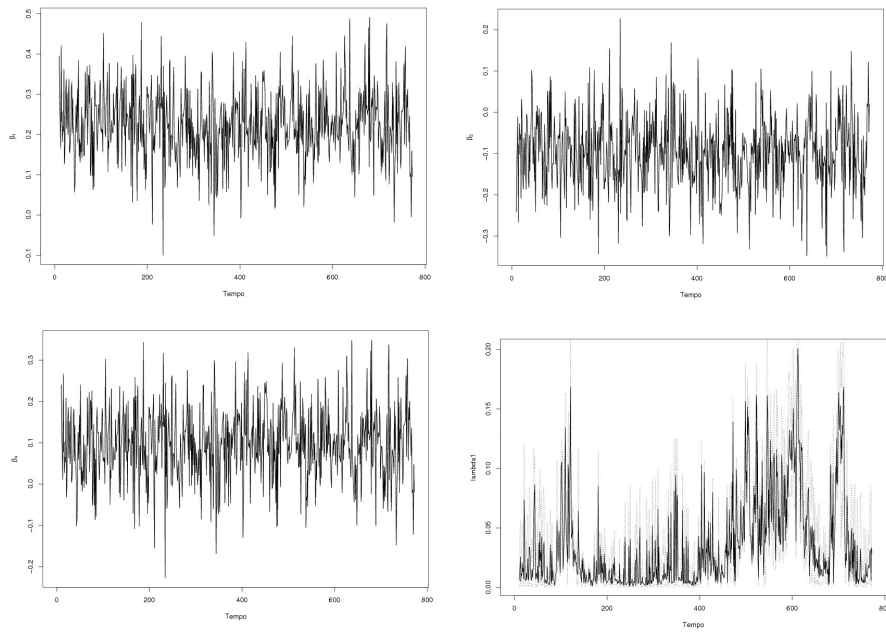
Volatilidade do modelo com componente comum de volatilidade estocástica e pesos dos fatores variando no tempo.

A tabela 5 traz estatísticas dos erros de medida para o modelo com componente comum de volatilidade estocástica e λ_t variando no tempo. Quando comparado com a especificação anterior, que não considerava heterocedasticidade condicional nos erros de medida. A melhora no ajuste para as maturidades mais longas reflete a presença de volatilidade condicional, principalmente nas taxas de juros para prazos mais longos.

A seguir apresentamos resultados da estimação do modelo considerando heterocedasticidade condicional nos fatores latentes de Nelson e Siegel e nos erros de medida. Nesta especificação, tanto a volatilidade dos fatores como o parâmetro de decaimento λ_t são tratados como variantes no tempo. A figura 4 apresenta as estimativas dos fatores, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ e λ_t , que é tratado como um quarto fator latente. Neste caso foi considerada uma especificação diagonal para a equação de transição que modela a dinâmica dos fatores, sendo a dinâmica do λ_t modelada por um AR(1).

Ao incluir um fator de volatilidade específico para cada fator latente, a persistência exibida pelos fatores latentes reduz significativamente, conforme pode

Figura 4: Estimativas dos Fatores Latentes e Fator de Decaimento - $(\beta_1, \beta_2, \beta_3 e \lambda_t)$.



Estimativas dos fatores obtidas com especificação diagonal para matriz da equação de transição e AR(1) para o fator de peso.

Tabela 5: Medidas de Ajuste da curva de Juros *in-sample* (Jan-06 a Fev-09).

Maturidade	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	ACF1
1	0.0019	0.0067	0.0047	1.3454	3.5182	0.2459
2	0.0018	0.0061	0.0045	1.1712	3.3533	0.7794
3	0.0014	0.0055	0.0041	0.9088	3.0897	0.8117
4	0.0009	0.0045	0.0032	0.6578	2.4134	0.771
6	0.0004	0.0026	0.0016	0.322	1.2154	0.5771
9	0.0003	0.0019	0.0014	0.2186	1.0575	0.5091
12	0.0004	0.0019	0.0014	0.2537	1.0829	0.7425
15	0.0006	0.002	0.0015	0.3479	1.0947	0.9269
18	0.0005	0.0019	0.0015	0.2985	1.1135	0.981
24	0.0002	0.0017	0.0013	0.0779	0.961	0.8621
27	0.0002	0.0017	0.0011	-0.1896	0.8147	0.6102
29	0.0006	0.002	0.0014	-0.4801	1.0768	0.4604
31	0.0009	0.0024	0.0018	-0.7042	1.3644	0.4285
33	0.0011	0.0027	0.0021	-0.8571	1.5551	0.424
TOTAL	0.0004	0.0036	0.0022	0.2408	1.6936	0.6345

Nota: Especificação com componente comum de volatilidade estocástica e λ_t variando no tempo.

ser observado na tabela 6, que mostra intervalos de confiança para os parâmetros estimados do modelo com componentes de volatilidade estocástica, especificado pelas equações (2, 3 e 17). Já o parâmetro λ_t apresenta persistência considerável, com coeficiente autoregressivo médio de 0.64.

As estimativas dos parâmetros relativos à dinâmica dos fatores de volatilidade estocástica são apresentados nas duas últimas colunas da tabela 6. Nós encontramos significante evidências de forte autocorrelações nos fatores de volatilidade, com coeficientes autoregressivos para dinâmica dos componentes de volatilidade para o nível, inclinação e curvatura em média 0.977, 0.995 e 0.994, respectivamente. Diferentemente dos fatores latentes, os processos de volatilidade estocástica apresentam elevada persistência. A evolução dos fatores de volatilidade é apresentada na figura 5. O fator nível apresenta padrão mais elevado de variações na volatilidade.

Intervalos de confiança para os parâmetros do processo de volatilidade estocástica dos erros de medida são apresentados na tabela 7.

Na tabela 8 apresentamos estatísticas referentes ao ajuste do modelo estimado com a especificação mais geral proposta aqui, que trata os pesos dos fatores como variantes no tempo, volatilidade estocástica nos erros de medida e componente de volatilidade específico para cada fator latente. Os resultados mostram que a extensão do modelo melhora significativamente a capacidade de ajuste, principalmente para as maturidades mais curtas, onde supera todas as especificações mais básicas. Quando comparado com a especificação com componente comum de volatilidade estocástica, esta versão do modelo apresenta

Tabela 6: Intervalos de Confiança dos Parâmetros a 95% - Φ e Φ_h

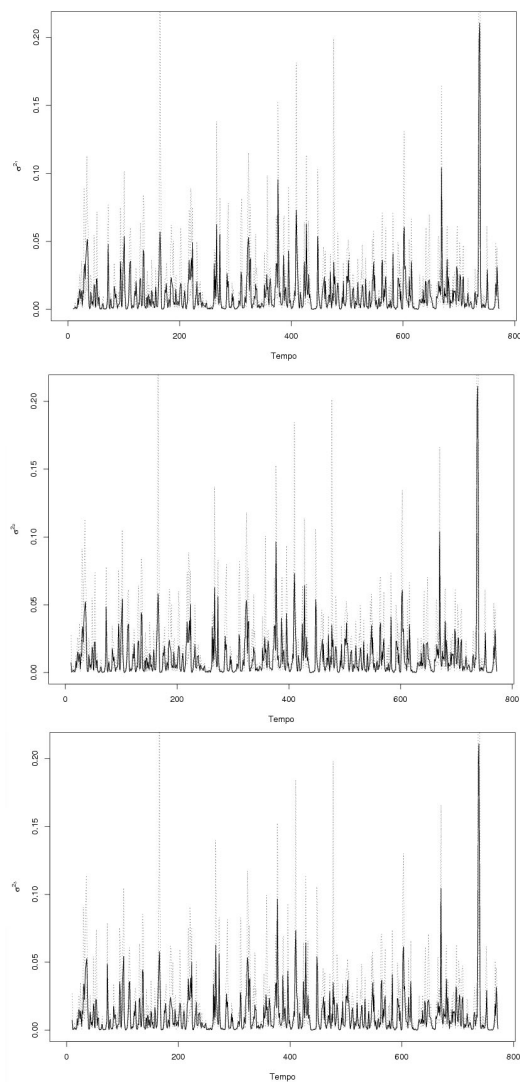
	Fatores Latentes		Fatores de Volatilidade	
	μ_β	ϕ_β	μ_h^β	ϕ_h^β
$\beta_{1(.025)}$	0.1766975	0.1096750	-14.19452	0.9628975
$\beta_{1(.50)}$	0.1858774	0.15298467	-13.40192	0.9774741
$\beta_{1(.975)}$	0.1956050	0.1944075	-13.19515	0.999200
$\beta_{2(.025)}$	-0.0876405	0.07427575	-12.37183	0.9865950
$\beta_{2(.50)}$	-0.0811913	0.14051617	-10.64274	0.9952372
$\beta_{2(.975)}$	-0.0744380	0.2024050	-10.56680	0.999800
$\beta_{3(.025)}$	0.07477875	0.07177125	-11.33084	0.9845000
$\beta_{3(.50)}$	0.08151998	0.13685784	-10.67576	0.9943536
$\beta_{3(.975)}$	0.08817710	0.2026050	-10.47721	0.9998000
$\lambda_{t(.025)}$	0.0057788	0.5646200		
$\lambda_{t(.50)}$	0.0084367	0.6373952		
$\lambda_{t(.975)}$	0.0111503	0.7005025		

Tabela 7: Intervalos de Confiança dos Parâmetros a 95% - σ_t

	$IC_{(0.025)}$	$IC_{(0.50)}$	$IC_{(0.975)}$
μ_σ	-19.71950	-18.34460	-17.33550
ϕ_σ	0.9923000	0.9967133	0.997500

Intervalos de confiança para os parâmetros da volatilidade estocástica dos erros de medida.

Figura 5: *Estimativas dos Fatores de Volatilidade* - $(\sigma_{\beta_1}, \sigma_{\beta_2}, \sigma_{\beta_3})$.



Estimativas dos fatores dos fatores de volatilidade estocástica obtidas com especificação diagonal para Φ_h^β (equação 17).

melhor desempenho para algumas maturidades, principalmente as mais curtas, e é superada em outras.

Tabela 8: Medidas de Ajuste da curva de Juros *in-sample* (Jan-06 a Fev-09).

Maturidade	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	ACF1
1	0.0015	0.006	0.0043	1.1093	3.2918	0.1916
2	0.0015	0.0056	0.0043	1.0681	3.2743	0.744
3	0.0012	0.0053	0.004	0.8417	3.1328	0.7804
4	0.0008	0.0045	0.0032	0.6052	2.5136	0.7372
6	0.0003	0.0027	0.0017	0.2841	1.3604	0.5638
9	0.0002	0.0021	0.0015	0.1882	1.1713	0.5268
12	0.0003	0.0019	0.0014	0.2301	1.1249	0.7345
15	0.0005	0.002	0.0014	0.328	1.0749	0.9217
18	0.0004	0.0019	0.0014	0.2811	1.1197	0.9803
24	0.0001	0.0017	0.0013	0.0619	1.0613	0.8484
27	0.0002	0.0019	0.0012	-0.2019	0.9408	0.6298
29	0.0006	0.0023	0.0015	-0.4878	1.1688	0.5076
31	0.0009	0.0027	0.0019	-0.7082	1.4701	0.4713
33	0.0011	0.0029	0.0021	-0.8576	1.6628	0.4579
TOTAL	0.0003	0.0034	0.0022	0.1959	1.7405	0.6135

Nota: Especificação com volatilidade estocástica nos fatores e λ_t variando no tempo.

Portanto, podemos concluir que as extensões do modelo contribuem significativamente para melhorar a capacidade de ajuste do modelo de Nelson e Siegel na formulação proposta por Diebold and Li (2006). A extensão que trata o parâmetro λ_t como variante no tempo, e componentes de volatilidade estocástica para cada fator foi a que apresentou os ganhos mais significantes, encorajando seu uso por participantes do mercado tanto na modelagem de risco e precificação de derivativos de renda fixa, ou como instrumento auxiliar para formuladores de políticas monetárias.

5. Conclusão

Neste artigo implementamos duas extensões para o modelo da estrutura a termo de Nelson e Siegel na formulação proposta por Diebold and Li (2006). Usando dados de contratos DI-futuro negociados na BM&F nós estimamos o modelo de Nelson e Siegel com pesos dos fatores e volatilidade variando no tempo. Na primeira especificação seguimos a estrutura proposta por Koopman et al. (2010), impondo um componente comum de volatilidade estocástica para os erros de medida que é modelado por um processo de volatilidade estocástica. No segundo caso nós ampliamos a formulação apresentada por Hautsch and Ou (2009) e propomos modelar diretamente a volatilidade estocástica dos fatores

latentes de Nelson e Siegel, tratando os pesos dos fatores como variantes no tempo. Esta estrutura permite capturar a volatilidade da curva de juros de uma forma flexível e ainda parsimoniosa. O modelo é representado no formato de espaços de estados, com os fatores na equação de transição apresentando volatilidade estocástica, e os próprios componentes de volatilidade estocástica seguindo um processo latente dinâmico. Uma vez que o modelo é não linear, nós propomos o uso de inferência bayesiana, com base em MCMC, para estimar o modelo de Nelson e Siegel com volatilidade estocástica.

Os resultados de nossa estimação fornecem evidências para distintas volatilidades estocásticas variantes no tempo para os fatores da curva de juros. Em particular, o fator nível é o que mais contribui para a volatilidade da curva de juros. Analisando a qualidade do ajuste obtida com o modelo, nós mostramos que a inclusão de volatilidade estocástica ao modelo melhora seu poder explicativo.

Na especificação com fator comum de volatilidade, proposta por Koopman et al. (2010), este fator pode ser interpretado como a volatilidade de um título base de um portfólio, na forma de um modelo GARCH como em Engle et al. (1990) e Engle and Ng (1993). Tal especificação não permite diferentes volatilidades nas taxas de juros individuais. Já com a especificação proposta aqui, o fator de volatilidade associado ao nível da curva de juros $h_t^{\beta_1}$, é um componente de variância comum no sentido do fator de volatilidade conjunta em Koopman et al. (2010) e pode ser visto como uma proxy implícita para a volatilidade de um título do mercado como usado em Engle et al. (1990). O fator de volatilidade $h_t^{\beta_2}$ captura as variações ao longo do tempo no spread entre as taxas para maturidades longas e curtas, e é interpretado como a volatilidade da inclinação. Similarmente, $h_t^{\beta_3}$ é a volatilidade de um portfólio de títulos com maturidades intermediárias, e assim captura a incerteza associada com a curvatura da curva de juros.

Aplicando o modelo para dados dos contratos de DI-futuro negociados na BM&F nós achamos fortes evidências para volatilidade variante no tempo nas taxas de juros, com os fatores de volatilidade apresentado elevada persistência. Ao comparar os resultados do ajuste da curva de juros para as especificações consideradas, fica claro que a inclusão da volatilidade estocástica no nível, inclinação e curvatura, ou via componente comum, melhora significativamente o ajuste quando comparado com as especificações básicas. A versão original do modelo proposta por Diebold and Li (2006), ajusta melhora para as maturidades mais curtas (1 e 2 meses). Já as especificações do modelo que incluem componente comum de volatilidade, ou que trata individualmente a volatilidade dos fatores latentes mostram-se superiores às demais, apresentando melhores critérios de ajuste para todas as maturidades analisadas. Sendo que para as maturidades mais curtas o modelo com componentes específicos de volatilidade apresenta melhor ajuste, com a situação se invertendo para as maturidades mais longas. Além disso, modelar a volatilidade estocástica específica de cada fator pode propiciar uma informação importante no cálculo de risco de carteiras de título públicos e derivativos. Alternativas a serem abordadas em trabalhos futuros pode ser a inclusão de fatores adicionais para curvatura e inclinação, como

proposto por Laurini and Westin (2010), tornando o modelo mais flexível, e também podem ser consideradas outras especificações para estrutura da volatilidade, considerando uma estrutura multivariada ou mudanças de regime.

Referências

- Almeida, C., R. Gomes, A. Leite, and J. Vicente (2007, December). Does curvature enhance forecasting? Working Papers Series 155, Central Bank of Brazil, Research Department.
- Anderson, B. D. O. and J. B. Moore (1979). *Optimal Filtering*. Englewood Cliffs: Prentice Hall.
- Bjork, T. and B. J. Christensen (1999). Interest rate dynamics and consistent forward rate curves. *Mathematical Finance*, 323–348.
- Brigo, D. and F. Mercurio (2006). *Interest Rate Models - Theory and Practice: With Smile, Inflation and Credit*. Springer.
- Caldeira, J. F., G. V. Moura, and M. S. Portugal (2009, August). Efficient interest rate curve estimation and forecasting in brazil. PPGE - Textos para Discussão 2009-08, PPGE - UFRGS.
- Chib, S. and B. Ergashev (2009). Analysis of multi-factor affine yield curve models. *Journal of the American Statistical Association* 104, 1324–1337.
- Chib, S., Y. Omori, and M. Asai (2009). Multivariate stochastic volatility. In T. Andersen, R. Davis, J.-P. Kreiß, and T. Mikosch (Eds.), *Handbook of Financial Time Series*, pp. 365–400.
- Cox, J. C., J. Ingersoll, Jonathan E, and S. A. Ross (1985, March). A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica* 53(2), 385–407.
- Dai, Q. and K. J. Singleton (2002, March). Expectation puzzles, time-varying risk premia, and affine models of the term structure. *Journal of Financial Economics* 63(3), 415–441.
- Diebold, F. X. and C. Li (2006, February). Forecasting the term structure of government bond yields. *Journal of Econometrics* 130(2), 337–364.
- Diebold, F. X., G. D. Rudebusch, and S. Borag[caron]an Aruoba (2006). The macroeconomy and the yield curve: a dynamic latent factor approach. *Journal of Econometrics* 131(1-2), 309–338.
- Duffie, D. and R. Kan (1996). A yield-factor model of interest rates. *Mathematical Finance* 6(4), 379–406.
- Engle, R. F. and V. K. Ng (1993). Time-varying volatility and the dynamic behavior of the term structure. *Journal of Money, Credit and Banking* 3(25), 336–349.
- Engle, R. F., V. K. Ng, and M. Rothschild (1990). Asset pricing with a factor-arch covariance structure: Empirical estimates for treasury bills. *Journal of Econometrics* 1-2(45), 213–237.

- Filipovic, D. (2009). *Term Structure Models*. Springer Finance.
- Haustsch, N. and Y. Ou (2009, March). Analyzing interest rate risk: Stochastic volatility in the term structure of government bond yields. CFS Working Paper 2009-03, Center for Financial Studies.
- Heath, D., R. Jarrow, and A. Morton (1992, January). Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation. *Econometrica* 60(1), 77–105.
- Koopman, S. J., B. Jungbacker, and E. Hol (2005). Forecasting daily variability of the s&p 100 stock index using historical, realised and implied volatility measurements. *Journal of Empirical Finance* 12, 445–475.
- Koopman, S. J., M. I. Mallee, and M. van der Wel (2010). Analyzing the term structure of interest rates using the dynamic nelson-siegel model with time-varying parameters. *Journal of Business and Economic Statistics*.
- Laurini, M. P. and L. K. Hotta (2008, October). Bayesian extensions to diebold-li term structure model. Insper Working Papers wpe 120, Insper Ibmecc São Paulo.
- Laurini, M. P. and A. P. K. Westin (2010, January). Arbitragem na estrutura a termo das taxas de juros: uma abordagem bayesiana. Insper Working Papers wpe 120, Insper Ibmecc São Paulo.
- Litterman, R. and J. Scheinkman (1991). Common factors affecting bond returns. *Journal of Fixed Income* 1(1), 54–61.
- Matzner-Lober, E. and C. Villa (2004). Functional principal component analysis of the yield curve. In *21th International Conference AFFI*. Association Francaise de Finance.
- Nelson, C. R. and A. F. Siegel (1987). Parsimonious modeling of yield curves. *The Journal of Business* 60(4), 473–489.
- Pearson, N. D. and T.-S. Sun (1994, September). Exploiting the conditional density in estimating the term structure: An application to the cox, ingersoll, and ross model. *Journal of Finance* 49(4), 1279–1304.
- Rudebusch, G. D. and T. Wu (2008). A macro-finance model of the term structure, monetary policy and the economy. *The Economic Journal* 118(530), 906–926.
- Taylor, S. J. (1986). *Modelling Financial Time Series*. John Wiley & Sons.
- Vasicek, O. (1977, November). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics* 5(2), 177–188.
- Yu, W. and E. Zivot (2008, October). Forecasting the term structure of treasury and corporate yields: Dynamic nelson-siegel models evaluation. SSRN working paper, SSRN.