Insper – Instituto de Ensino e Pesquisa

Luiz Henrique Leal Rodrigues Alves

TEORIA MODERNA DE PORTFÓLIO APLICADA AO MERCADO BRASILEIRO. MARKOWITZ VS DIVERSIFICAÇÃO INGÊNUA

São Paulo

2015

Luiz Henrique Leal Rodrigues Alves

TEORIA MODERNA DE PORTFÓLIO APLICADA AO MERCADO BRASILEIRO. MARKOWITZ VS DIVERSIFICAÇÃO INGÊNUA

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado ao Instituto de Ensino e Pesquisa - Insper como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Ciências Econômicas.

Área de habilitação: Finanças

Orientador: Marco Túlio Pereira Lyrio

São Paulo

2015

Luiz Henrique Leal R. Alves

TEORIA MODERNA DE PORTFÓLIO APLICADA AO MERCADO BRASILEIRO.

MARKOWITZ VS DIVERSIFICAÇÃO INGÊNUA

Monografia apresentada à Faculdade de Economia do Insper, como parte dos requisitos para conclusão do curso de graduação em Economia.

Data da Aprovação: __ / __ / __

BANCA EXAMINADORA

Prof. Marco Túlio Pereira Lyrio (Orientador)

INSPER

Prof. José Heleno Faro

INSPER

Prof. Michael Viriato Araujo

INSPER

RESUMO

O presente estudo busca analisar a performance do modelo de Markowitz (1952) frente à diversificação ingênua no mercado brasileiro. Com esse intuito, foram construídas três carteiras de ativos de risco ótimas de Markowitz com ações brasileiras, mudando de uma carteira para outra somente as quantidades de ativos "disponíveis". Isto foi feito para compreender como a ponderação do procedimento matemático vai se comportando frente a ponderação atribuída à diversificação ingênua conforme o aumento do número de ativos e pôde ser visto que não existe nenhum tipo de semelhança atribuída as ponderações das carteiras conforme o número de ativos aumenta. Ademais, pode ser observado que os rendimentos dessas carteiras que utilizam a teoria moderna de portfólio obtêm um desempenho inferior frente a uma estratégia de diversificação ingênua, a estratégia de diversificação mais simples possível, conforme o número de ativos "disponíveis" vai aumentando. E para comparação de resultados buscou-se utilizar como parâmetro de rendimento o Índice de Sharpe (1966), entretanto os retornos de todas as carteiras com os dados fora da amostra apresentaram Índice de Sharpe negativo inviabilizando qualquer tipo de comparação, então como alternativa como parâmetro de desempenho utilizou-se a Razão da Informação.

SUMÁRIO

1. - INTRODUÇÃO

O modelo de otimização de carteiras de Markowitz possui grande aplicabilidade prática nos processos de alocação de carteiras de investimento. Assim, o trabalho de Markowitz (1952), o qual deu origem à Teoria Moderna do Portfólio, fez com que a análise média-variância olhasse para o processo de alocação de ativos como uma otimização matemática.

Essa abordagem revolucionou a teoria de finanças ao mudar o foco da análise de investimentos de ativos individuais para a direção da diversificação, colocando em bases sólidas e matemáticas a relação entre risco e retorno, mostrando que o risco da carteira não depende apenas do risco associado a cada ativo, mas da covariância entre ativos individuais.

O fundamento proposto por Markowitz é a distinção entre a variabilidade dos retornos de um ativo individual e sua contribuição para o risco da carteira. O autor observou que, quando se tenta minimizar o risco, não é suficiente simplesmente investir em muitos ativos. É necessário evitar investir em ativos que apresentem um alto grau de interdependência entre seus retornos – formalmente, ativos que apresentem uma alta correlação.

Além disso, Markowitz mostrou que é possível identificar um conjunto de carteiras que fornecem o maior retorno esperado possível para um dado nível de risco ou o menor nível de risco possível para um dado nível de retorno esperado. O autor determinou que tais carteiras ocupam uma região geométrica de eficiência no espaço risco -retorno, chamada por ele de fronteira eficiente. Para qualquer investidor que se preocupe apenas com o trade-off entre risco e retorno, é economicamente eficiente limitar a escolha entre as carteiras que pertencem a essa fronteira.

Desta forma, o objetivo deste trabalho é analisar se o portfólio do modelo média-variância alcança um desempenho superior à uma carteira de diversificação diferente da proposta por Markowitz, e observar como as ponderações dos ativos das carteiras ótimas de risco de Markowitz se comportam em relação a esta outra carteira no mercado brasileiro. Neste estudo, a estratégia alternativa para “concorrer “ com o modelo média-variância foi à carteira de diversificação ingênua, que consiste em manter pesos iguais para todos os ativos disponíveis, equivalentes a 1/*N*, sendo *N* o número total de ativos.

Existem duas principais razões para utilizar a carteira ingênua como comparativo. O primeiro motivo é devido à sua fácil implementação, ou seja, não é complicado estimar os retornos dos ativos e sua otimização. O segundo motivo é que, apesar do grande desenvolvimento nos últimos 50 anos em teorias de carteiras muito mais sofisticadas como o *Modelo Lower Partial Moment (LPM)* e *Otimização do Valor em Risco Condicional*, os investidores continuam usando estratégias simples de alocação de seus ativos.

Além disso, vale enfatizar que a proposta deste estudo tem por objetivo entender a aplicabilidade do procedimento de Markowitz com ativos brasileiros, mostrando o benefício alcançado fazendo a utilização da ideia que revolucionou o mercado financeiro.

Para testar a teoria que está por trás do modelo de Markowitz foi necessário utilizar uma série de dados (retornos esperados de cada ativo, variâncias e as covariâncias entre eles), que podem ser encontrados de várias formas e com valores diferentes dependendo da maneira que o usuário considerar conveniente. Neste estudo, foi abordada apenas a metodologia com dados históricos que parte da forte premissa que retornos passados implicam ou pelo menos nos dão algum parâmetro para retornos futuros. A escolha desta metodologia se deu ao fato de que o modelo construído por dados históricos foi utilizado pelo próprio Markowitz em 1952, então iria-se testar na íntegra o trabalho do autor.

Feito o processo de localizar a fronteira eficiente de Markowitz ainda tem que se considerar um ativo livre de risco e encontrar seu retorno (rf) para só assim calcular a carteira ótima com risco. Ao se estimar o modelo da fronteira eficiente de ativos com risco de Markowitz em conjunto com ativo livre de risco chega-se ao ponto da carteira ótima a qual será encontrada maximizando o Índice de Sharpe, IS, (maximizando a inclinação da reta com a fronteira eficiente). E este processo é feito três vezes aumentando as quantidades de ativos utilizados na construção da fronteira eficiente (5, 10 e 20 ativos) para analisar se as ponderações atribuídas à carteira ótima, P, vão a caminho da diversificação ingênua conforme o número de ativos vai aumentando.

Além disso, tentou-se comparar o rendimento da carteira ótima contra a diversificação ingênua pelo Índice de Sharpe, IS, dos dados fora da amostra, entretanto os IS obtidos em todas as carteiras foram negativos, inviabilizando a comparação entre carteiras por ele. Assim, como parâmetro alternativo de desempenho utilizou-se a Razão de Informação que é uma medida do retorno ajustado ao risco de uma garantia financeira, ativo ou carteira.

Logo, este estudo buscou examinar e comparar a aplicabilidade e o desempenho da teoria moderna de portfólio com relação ao desempenho da carteira ingênua igualmente ponderada 1/N (diversificação ingênua) no mercado brasileiro. Assim, ao se utilizar a Razão de Informação como parâmetro de performance encontrou-se evidências que com os dados fora da amostra a Diversificação Ingênua apresenta melhores resultados frente a carteira ótima de risco pelo método de Markowitz. Isto implica que em situações reais a carteira igualmente ponderada se sobressai da carteira que revolucionou a teoria moderna de finanças quando o número de ativos é superior a 5 ativos.

Sendo assim, a próxima seção irá abordar os principais estudos relacionados tanto na esfera mundial como nacional. Na seção 3, será abordado todo o referencial teórico que embasa o estudo com a apresentação teórica- metodológica desenvolvida e utilizada por todo este trabalho; na seção 4 consta os procedimentos metodológicos adotados e necessários para a realização do estudo; na seção 5 consta os resultados, análise e discussão da pesquisa; concluindo na seção 6 as considerações finais realizadas.

2. REVISÃO DE LITERATURA

A abordagem da otimização de carteiras, proposta inicialmente por Markowitz (1952) em seu artigo “Portfolio Selection”, deu origem ao que hoje é conhecido como a Teoria Moderna do Portfólio. Com o advento desta teoria foi introduzida a análise média-variância das carteiras de investimentos, alterando o processo de alocação de ativos em um processo de otimização.

Apesar da grande influência e ter mais de 60 anos da publicação do artigo de Markowitz, ainda existe certa resistência entre os investidores para adotar a estratégia quantitativa de otimização baseada na abordagem risco-retorno, sendo uma das razões a dificuldade de implementação desta estratégia na prática, vez que deve-se obter estimativas precisas dos retornos esperados dos ativos e da matriz de covariâncias. Desta forma, aparece a carteira ingênua como alternativa à diversificação e, com isso, vários estudos são realizados a fim de testar e aprimorar o modelo média-variância.

DeMiguel, Garlappi e Uppal (2009) procuraram entender sobre quais condições a carteira ótima de média-variância tem um bom desempenho na presença de estimação do risco. Para isso, estimaram o desempenho da carteira ótima de Markowitz fora da amostra e utilizaram a carteira ingênua (1/N) como referência. Além disso, os mesmos construíram 14 modelos de portfólios e compararam com a carteira 1/N para o mercado americano, a partir desta análise, chegaram à conclusão que nenhum modelo é consistentemente melhor do que a carteira ingênua em termos de IS, certo equivalente ou turnover. Assim, procuraram entender porque nenhum dos modelos estava sendo superior à diversificação mais simples possível, e chegaram a algumas premissas que, caso fossem respeitadas, fariam com que as estratégias sofisticadas fossem melhor do que a ingênua. Para isso: (i) a janela de estimação deveria ser muito longa, amostra muito grande; (ii) o Índice de Sharpe, IS, antes da estimação do portfólio média-variância deveria ser substancialmente maior que o portfólio 1/N; (iii) o número de ativos deveria ser pequeno.

Outros autores como Ledoit e Wolf (2004) se opõem ao uso da matriz de covariância amostral com intuito de otimização de portfólios. Eles destacam que a matriz de covariância amostral clássica, estimada com os retornos históricos, apresenta baixo esforço computacional e ausência de viés, entretanto apresenta erros de estimação elevados, podendo comprometer o desempenho da otimização média-variância. Portanto, o uso excessivo de estimadores mais sofisticados reduz o erro de estimação mas introduz vieses, ou seja, para os autores, ao se utilizar metodologias estatísticas para encontrar melhores estimadores acaba introduzindo vieses e conforme o número de estimadores cresce o modelo apresenta pior desempenho. Assim Ledoit e Wolf sugerem a aplicação de técnicas Bayesianas de encolhimento para a estimação da matriz de covariância, combinando-se a matriz de covariância amostral com um estimador estruturado, a fim de encontrar os pesos ótimos da carteira.

Tu e Zhou (2011) indagaram que seus modelos de diversificação mista (diversificação ingênua com o modelo média-variância) possuem melhores resultados esperados que o investimento em uma carteira 1/N. Desta forma, segundo os autores podem existir combinações de pesos de 1/N com pesos resultantes da otimização de Markowitz (1952) que proporcionem melhores resultados do que as estratégias que as originaram, ou seja, de acordo com os autores a estratégia ótima é uma mixagem entre Diversificação Ingênua e Markowitz. A estratégia utilizada pelos autores envolve uma forte análise estatística dos dados e no momento de encontrar a carteira ótima de risco de Markowitz diferentes restrições são impostas sobre determinados ativos obtendo um IS superior que as duas carteiras isoladamente.

Já Pflug, Pichler e Wozabal (2012) consideram a estratégia de investimento uniforme (ingênua) interessante porque segundo seu estudo ela é uma estratégia difícil de ser superada. Em alguns artigos esses autores, mostram que são usadas em casos de incerteza na decisão do investidor. O estudo evidenciou que existe convergência para a estratégia uniforme em problemas de otimização de carteiras com Markowitz. Em geral, os investidores preferem portfólio diversificado quando a incerteza do modelo aumenta.

Já na esfera nacional, Faria e Moura (2013), procuraram utilizar o modelo de Markowitz com o objetivo de construir carteiras capazes de superar, em termos de eficiência, uma estratégia de diversificação ingênua. Considerando um agente racional (avesso ao risco), um portfólio mais eficiente que o ingênuo somente seria obtido se apresentasse sobre um determinado nível de risco um retorno esperado maior do que o ingênuo. Assim, o estudo foi realizado em 2 cenários, no primeiro cenário só considerou 2 ativos e a estratégia de otimização se mostrou mais eficiente e de forma consistente; no segundo cenário envolvendo 5 ativos a diversificação 1/N já se mostrou melhor. Logo, a teoria de Markowitz não se mostra eficiente pelo artigo de Moura e Farias, já que uma carteira com dois ativos não pode ser considerado bem diversificada, uma vez que, ainda existe muito risco específico na carteira.

A questão que surge a seguir é saber se o modelo proposto por Markowitz é capaz de obter melhores resultados financeiros (utilizando a razão de informação fora da amostra) no mercado brasileiro.

Ao se analisar todos os artigos citados, pode-se destacar que este assunto é muito discutido internacionalmente, e não existe um consenso geral em qual é a melhor estratégia (Naive x Markowitz), muito menos a metodologia utilizada para calcular cada carteira. O que existe em comum em todos esses artigos é a aplicação do modelo de Markowitz utilizando dados históricos (método utilizado pelo próprio criador da teoria), a fim de confrontar a análise da teoria na íntegra.

Por sua vez, este estudo tem o cerne no artigo de DeMiguel, Garlappi e Uppal (2007), logo, muitas das conclusões feitas pelos referidos autores serão consideradas pontos de partida esperados no presente estudo.

3. - ARCABOUÇO TEÓRICO

Esta seção está segmentada em três subseções. A primeira visa explicar e fundamentar todos os conceitos teóricos necessários para a abordagem do trabalho; na segunda serão descritos os modelos utilizados nos procedimentos de otimização de portfólio, bem como a carteira igualmente ponderada, sendo a mesma utilizada como referência; já na terceira seção será explicado os motivos da escolha do critério de avaliação de desempenho.

3.1.1 - RETORNO ESPERADO DE UM ATIVO

O retorno esperado, E(r), de um ativo é a expectativa de retorno que o investidor tem para o próximo período. Para o cálculo do retorno esperado, normalmente se utilizam dados de períodos anteriores, ou seja, retornos já obtidos por ações de determinada empresa, aplicando-se medidas de tendência central para o cálculo, sendo a média aritmética a mais comumente utilizada.

3.1.2 - RISCO DE UM ATIVO

O risco de um ativo é medido pela volatilidade dos retornos históricos, caracterizada pelo desvio padrão da amostra, ou seja, o desvio padrão passa a revelar o risco da operação. Pode-se também classificar risco como a capacidade de mensurar o estado de incerteza, a qual está associada à probabilidade de ocorrência de determinados resultados em relação a um valor médio esperado. Em outras palavras, risco pode ser considerado como a probabilidade da ocorrência de um fato, ou seja, como a volatilidade de resultados inesperados.

3.1.3 - RETORNO ESPERADO DE UMA CARTEIRA

O retorno esperado por uma carteira, E (Rp), com mais de um ativo é calculado pela soma dos pesos atribuído a cada ativo multiplicado pelo retorno esperado, E (Ri):

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot R_i$$

Onde, n é a quantidade total de ativos e W a ponderação atribuída a cada ativo.

3.2.1 – RISCO E AVERSÃO AO RISCO

O processo de construção de uma carteira geral exige: (1) escolher a composição da carteira de risco; (2) decidir sobre como investir nessa carteira (como alocar).

Mas como deve-se escolher a carteira? A primeira coisa que precisa preocupar-se é com o risco. O risco é suficiente para alterar uma decisão. Um indivíduo sempre iria recusar um investimento com um prêmio-pelo-risco, PMR, negativo porque o potencial de ganho é insuficiente para o risco envolvido, assim define-se que os investidores são avessos ao risco.

Os investidores avessos ao risco recusam carteiras de investimento que apresentam um jogo justo ou algo pior. Estes investidores consideram apenas as probabilidades isentas de risco ou especulativas com PMR positivas. Intuitivamente, uma carteira é mais atraente que a outra quando o seu retorno esperado é superior e o seu risco menor. Porém, quando o risco aumenta com o retorno, a carteira mais atraente não é fácil de ser encontrada sem uma análise mais aprofundada.

Desta forma, cada investidor pode atribuir uma classificação de prosperidade ou utilidade às carteiras concorrentes com base nos retornos e riscos esperados dessas carteiras. Valores de utilidade mais altos são atribuídos a carteiras com perfil de risco-retorno mais atraentes. Logo, carteiras recebem utilidade mais alta para maiores retornos e menor utilidade para maiores volatilidades para um indivíduo avesso ao risco.

Assim, para se obter a carteira ótima deverão ser utilizados títulos de todas as classes de ativos. Além disso, quando altera-se as proporções (ponderações) da carteira de risco para um ativo livre de risco (para maximizar a utilidade de cada indivíduo), não altera-se as proporções relativas dos vários ativos de risco dentro da carteira de risco. Mas sim, diminui-se o peso relativo da carteira de risco como um todo em favor do ativo isento de risco. Desta forma, as preferências do investidor (utilidade) não altera a formação da carteira ótima de risco, o conceito de utilidade foi utilizado para explicar como funciona a aversão ao risco.

Portanto, este estudo não aborda a questão de utilidade individual do investidor, pois o mesmo tem como objetivo analisar se as carteiras ótimas de risco (construídas com diferentes números de ativos) do procedimento de Markowitz possuem melhores rendimentos que as carteiras de diversificação ingênua e se as ponderações dos ativos vão se aproximar da diversificação ingênua conforme o número de ativos disponíveis aumentam.

3.2.2 – ATIVO LIVRE DE RISCO

Um ativo livre de risco é aquele em que o investidor sabe exatamente o valor que receberá ao final do prazo de investimento. Além disso, não pode haver incerteza quanto ao valor a ser recebido, pressupõe, portanto, um desvio padrão do retorno do ativo igual a zero. Portanto, dadas as características do ativo livre de risco, o mesmo deve ter um retorno fixo e sem possibilidades de não pagamento (default) em seu vencimento. Além disso, o prazo de vencimento do ativo deve coincidir com o período em que o investidor deseja mantê-lo. Usando a taxa de um título público como aproximação para a taxa livre de risco, caso haja divergência entre o prazo de vencimento do título e o período em que o mesmo será mantido pelo investidor, este terá de (i) vender o título no mercado secundário (caso o período de manutenção do título seja menor que o prazo de vencimento do mesmo) ou (ii) reinvestir o valor recebido no vencimento do título.

3.2.3 - CONSTRUÇÃO DA LINHA DE ALOCAÇÃO DE CAPITAL

A decisão de investimento pode ser considerada como um processo descendente: (1) alocação de capital entre carteira de risco e rf; (2) alocação de ativos na carteira de risco entre amplas classes de ativos.

Nesta seção examina-se as combinações possíveis de risco e retorno disponíveis para os investidores quando a escolha da carteira ótima de risco já foi feita (a carteira construída pelo procedimento de Markowitz será apresentada na próxima seção).

Supondo que a carteira ótima de risco já foi feita, P, agora a preocupação do investidor é a alocação de capital, isto é, a proporção do orçamento de investimento, y, a ser alocada à P. E a proporção remanescente, 1-y, que deverá ser alocada no ativo livre de risco. Adotando a taxa de retorno esperada de P como E(Rp), seu desvio padrão como σ_p, a taxa de retorno do ativo livre de risco (rf) e adotando o retorno esperado da carteira mista de ativos de risco e sem risco como E(Rc), chega-se a seguinte equação:

$$E(Rc) = y\ E(Rp) + (1-y)\ rf$$

$$\sigma_c = y\ \sigma_p$$

Representando a equação anterior em um gráfico e assumindo diversos valores para y, chegamos a Linha de Alocação de Capitais (LAC):

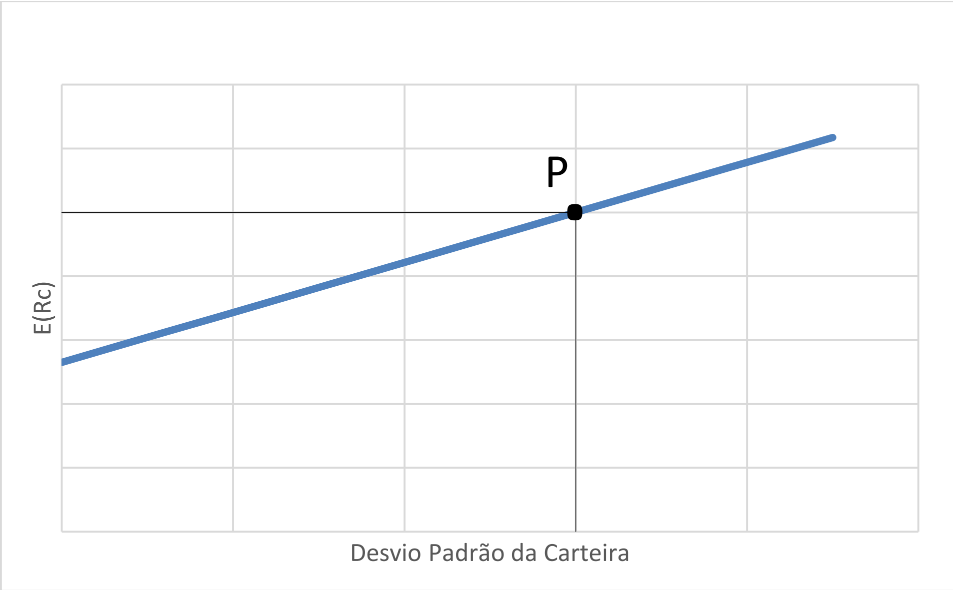


Gráfico 1 – Linha de Alocação de Capital

O gráfico acima representa o conjunto de oportunidades de investimentos. A LAC retrata todas as melhores combinações risco e retorno disponíveis para os investidores. Além disso, a inclinação da LAC é o próprio Índice de Sharpe (IS), (explicado mais a frente), que será utilizado para encontrar a carteira ótima de risco.

3.2.4 – PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DA CARTEIRA

Mas como construir uma carteira que consiga diminuir o risco? Primeiramente, o risco pode ser dividido em duas partes, existe o risco relacionado com as condições econômicas gerais, como ciclos econômicos, inflação, taxa de juros e taxa de câmbio. Nenhum desses fatores macroeconômicos podem ser previstos com 100% de precisão, afetando todos os ativos com risco (no estudo foram utilizadas ações), que é o risco sistemático. Além destes fatores, existem influências específicas de cada empresa, como sucesso em pesquisa e desenvolvimento e mudanças no pessoal. Esses fatores afetam única e exclusivamente aquela empresa, sem impactar as demais, que se denomina risco específico.

A diversificação permite que ao aumentar o número de ativos de uma carteira o risco dela possa diminuir, pois com uma maior distribuição em diferentes ativos a exposição a quantidades de riscos específicos (diminuindo a ponderação alocada em cada ativo) aumentam, mas seu impacto individual de cada risco específico na carteira diminuí pois a ponderação atribuída a cada ativo é menor. Assim a participação de cada ativo com risco específico contribui com a redução do risco da carteira, como pode-se observar no gráfico a seguir:

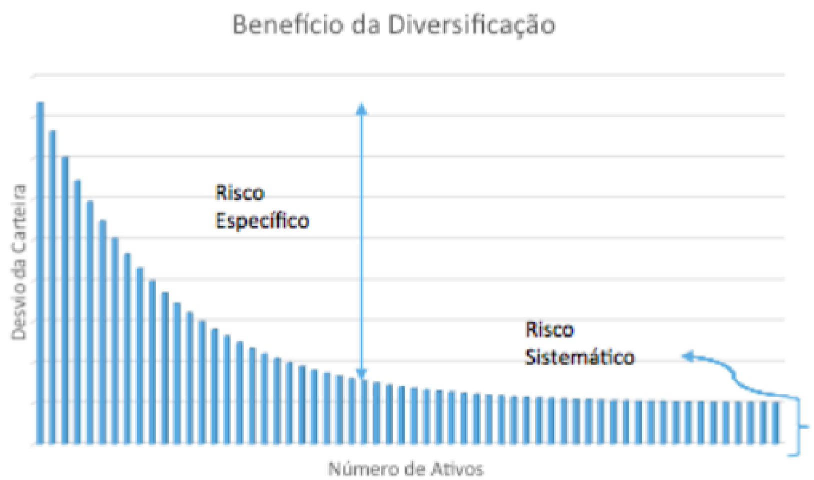


Gráfico 2 – Benefício da Diversificação

O gráfico 2 mostra que quando fontes de risco comuns afetam todas as empresas, mesmo uma ampla diversificação não é capaz de eliminar o risco. O desvio padrão da carteira diminui à medida que o número de ativos aumenta, mas não pode ser reduzido a zero, este risco como descrito anteriormente é denominado risco sistemático ou não diversificável que é o risco que todos os ativos com risco estão expostos.

3.2.5 – MODELO PARA OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRA DE MARKOWITZ

Para fazer a otimização da carteira ótima de Markowitz, deve-se fazer um procedimento que tem duas partes: primeiro, identificar as combinações de risco e retorno disponíveis com os ativos de risco (fronteira de mínima variância). Em seguida, identificar a carteira de risco ótima, vez que encontrando os pesos da carteira acaba-se gerando a CAL mais inclinada (maior IS).

De acordo com Markowitz, o processo de construção de portfólios é caracterizado por três elementos fundamentais: 1- A informação referente aos ativos sobre os quais se baseia; 2- Os critérios para classificação dos melhores e piores portfólios, que definem os objetivos da análise; 3- Os procedimentos computacionais, através dos quais os portfólios que atendem aos critérios em (2) são obtidos a partir dos dados inseridos em (1). Para o processo de construção, é necessário fornecer os seguintes dados:

- n estimativas de retornos esperados
- n estimativas de variância
- $(n^2-n)/2$ estimativas de covariância

Total: 2 n + (n2-n)/2

A ideia da teoria de carteiras é combinar todos os ativos disponíveis de forma a reduzir o risco por meio da diversificação. Para isso, pode-se reduzir o risco combinando ativos que possuem oscilações contrárias em seus preços. Portanto, Markowitz considera o retorno esperado de uma carteira composta por dois ativos igual ao retorno dado pela média ponderada dos pesos e pelos seus respectivos retornos. Já o risco é dado não só pelos riscos individuais e sim, pelo grau de relação entre estes ativos, dado pela covariância.

Desta forma, o primeiro passo é determinar as oportunidades de risco e retorno esperado disponíveis ao investidor. Elas são resumidas pela fronteira de mínima variância dos ativos de risco. Com base nos dados fornecidos de retorno esperado, variância e covariância, pode-se calcular a carteira de variância mínima para qualquer retorno esperado escolhido. A representação gráfica desses pares de retornos esperados e desvios padrões está representada no seguinte gráfico:

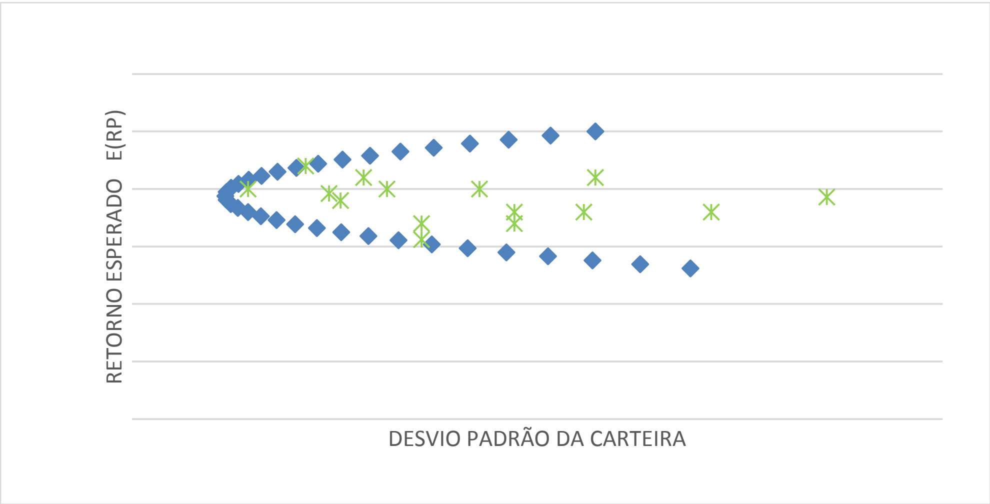


Gráfico 3 - Fronteira de Markowitz com Ativos de Risco

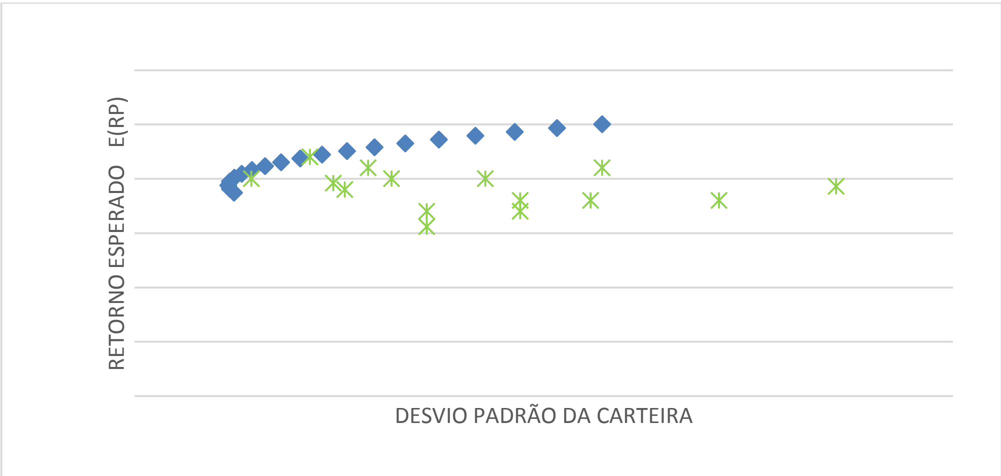


Gráfico 4 -Fronteira Eficiente com Ativos de Risco

Observa-se que todos os ativos individuais ficam à direita da fronteira. Isto implica que as carteiras de risco que contêm apenas um ativo são ineficientes. A diversificação de investimentos possibilita construir carteiras com retornos esperados mais altos e desvios padrões mais baixos.

O segundo passo do processo de otimização engloba o ativo livre de risco. Isto é, investidores podem aplicar seu capital em uma carteira de risco ou no ativo livre de risco. Além disso, ele não precisa ficar necessariamente 100% do seu capital investido somente em uma das opções, mas sim, pode fazer uma combinação delas. Assim, ele pode escolher uma combinação de investimento entre rf e um ponto da fronteira eficiente de Markowitz, onde cada ponto da fronteira representa uma carteira com risco.

Como mencionado na seção anterior, procura-se a linha de alocação de capital com o maior IS, ou seja, tem se que maximizar a inclinação, que será uma reta tangente, à fronteira, como pode ser visto no gráfico abaixo:

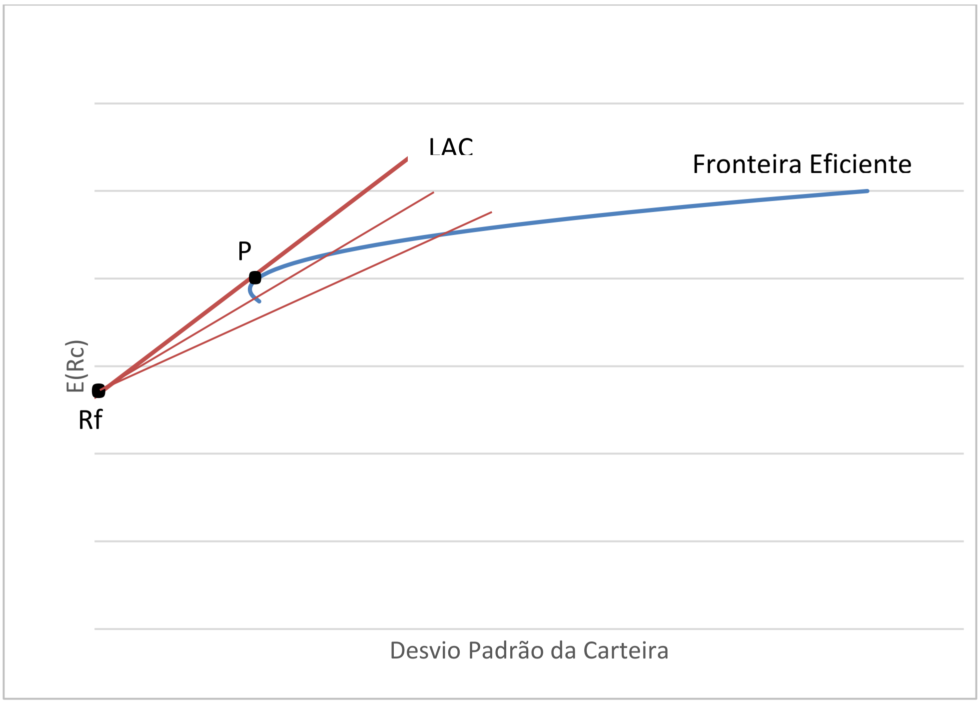


Gráfico 4 – Carteira Ótima de Risco

A LAC suportada pela carteira ótima, P, que é tangente à fronteira eficiente é superior a todas as outras linhas viáveis. Portanto, a carteira P é a carteira ótima de risco, esta reta corresponde ao portfólio de ativos de risco para o qual cada unidade de risco acrescida permite o maior aumento da rentabilidade. Logo, com a premissa de que os agentes são avessos ao risco, todos os indivíduos utilizam-se da reta tangente à fronteira eficiente (ponto P).

3.2.6 - CARTEIRA IGUALMENTE PONDERADA (NAIVE)

O portfólio igualmente ponderado ou portfólio ingênuo, 1/N, como é amplamente conhecido, envolve manter uma carteira igualmente ponderada $w_i = 1/N$ em cada um dos fundos de investimento multimercados disponíveis para investimento. Neste trabalho, a estratégia ingênua é usada como benchmark para monitoramento dos resultados, pois é de fácil implementação, não depende das estimativas dos momentos dos retornos dos ativos e de técnicas de otimização. Existem ainda fortes evidências empíricas de que portfólios ingênuos igualmente ponderados apresentam desempenho superior aos obtidos por meio de processos de otimização, como média-variância e mínima-variância como visto em DeMiguel, Garlappi, & Uppal (2009).

A carteira ingênua, 1/N, significa montar uma carteira ponderada onde o peso de cada ativo é 1/N. As ponderações para 5, 10 e 20 ativos são 20% , 10% e 5% respectivamente. Sabendo as ponderações da carteira ingênua, pode-se aplicar os dados (retornos dos ativos) fora da amostra para observar o retorno médio realizado fora da amostra para calcular o IS e então compararmos com o IS do procedimento de Markowitz.

3.3.1 - CRITÉRIO DE AVALIAÇÃO: ÍNDICE DE SHARPE

Criadas todas as carteiras já mencionadas, se faz necessária uma medida de avaliação de desempenho que, neste caso, será o Índice de Sharpe. Este índice criado por William Sharpe, em 1966, é um dos mais utilizados na avaliação de desempenho de carteiras, pois este índice mostra à relação Risco x Retorno de uma carteira de ativos. Em síntese, o índice mostra se determinado fundo oferece rentabilidade compatível com o risco a que expõe o investidor. Abaixo segue a fórmula:

$$S = \frac{E(R_P) - R_f}{\sigma_P}$$

Como este índice mede a relação Risco X Retorno de uma carteira de ativos, o investidor pode comparar o Índice Sharpe em suas possibilidades de investimentos e assim tomar a sua decisão de investir naquela aplicação que tenha a melhor relação Risco X Retorno.

O IS será calculado com um retorno fora da amostra. Ele não foi utilizado na amostra para calcular a carteira ótima de Markowitz já que se fosse assim a diversificação ingênua já sairia em desvantagem pois ela é uma das muitas possibilidades de alocação que o procedimento de Markowitz poderia escolher, prejudicando a comparação das duas carteiras se fosse somente dentro da amostra pois deste modo a carteira pelo procedimento de Markowitz seria melhor ou igual, sempre.

Portanto, para chegar em resultados não óbvios utilizou-se para a comparação de resultados dados fora da amostra. Assim, não temos vieses para a comparação dos resultados. Este mesmo procedimento de comparação fora da amostra foi utilizado por DeMiguel, Garlappi e Uppal (2009) mostrando que a comparação das carteiras com dados fora da amostra faz muito mais sentido.

3.3.2 – MODELO DE PRECIFICAÇÃO DE ATIVOS (CAPM)

O modelo de precificação de ativos, amplamente conhecido como CAPM, é a principal referência teórica para se mensurar e relacionar os elementos fundamentais de uma avaliação de ativos: risco e retorno.

O CAPM assume que a variância dos retornos de um ativo é a melhor estimativa do risco não-diversificável, que por sua vez é medido pela estimativa do beta do ativo. Além disso, fornece uma equação que relaciona o retorno de um ativo ao seu beta. O beta de um ativo é o coeficiente da reta que relaciona o prêmio de risco de um ativo com o prêmio da carteira de mercado, na seguinte equação:

$$R_J - R_M = \alpha + \beta(R_M - R_F) + \varepsilon_t \qquad (1)$$

onde R_J = retorno do ativo da empresa J;

R_F = taxa de retorno livre de risco;

R_M = retorno da carteira de mercado;

$R_J - R_F$; $R_M - R_F$ = prêmio de risco do ativo J e do mercado, respectivamente;

α = intercepto da equação;

β = coeficiente angular da equação;

ε_t = erro randômico da reta de regressão linear.

A equação (1), chamada de reta característica, procura descrever como os ativos se comportam perante alterações no mercado. O coeficiente α indica o retorno esperado em excesso de um ativo na hipótese de o retorno em excesso da carteira de mercado ser nulo. O beta é o grau de inclinação da reta característica, determinando como o prêmio pelo risco de um ativo responde a alterações no prêmio do mercado como um todo. A medida de risco mais relevante neste modelo é aquela que se apresenta altamente correlacionada com o mercado, o risco não diversificável, medido pelo beta da reta característica.

Nesse contexto, o modelo do CAPM considera somente o risco não sistemático, que é medido por meio do beta (β), medindo a variação do preço de mercado do ativo em relação à variação do mercado. Sendo assim, o investidor seria recompensado apenas pelo risco não diversificável associado ao título e o risco diversificável não importaria, pois seria eliminado pela diversificação.

Desta forma, no equilíbrio deve existir uma relação linear simples entre retornos esperados e o desvio padrão dos retornos para combinações eficientes de ativos. Para poder expressar a relação entre risco e retorno de ativos individuais, é necessário considerar-se não o seu risco total, mas sim, o seu risco sistemático, diversificável.

Pode-se inferir através da análise da fórmula do CAPM, que o retorno exigido sobre um ativo ou carteira é uma função do beta, que mede o risco não-diversificável. Portanto, se o beta for igual a zero, o retorno esperado do ativo será igual à taxa livre de risco. Se o beta for igual a um, o retorno esperado do ativo será igual ao retorno esperado da carteira de mercado. A representação do CAPM sob a forma gráfica é dada pela reta denominada linha do mercado de títulos (SML). A SML evidencia o retorno exigido para cada nível de risco sistemático, ou seja, para cada beta. O gráfico a seguir é um exemplo que demonstra, para um beta (bW) 1,5, um retorno exigido sobre um ativo W de 12%, com taxa livre de risco (RF) de 6%, e um retorno de mercado R(m) de 10%, o gráfico da linha do mercado de títulos representa qual deveria ser o retorno esperado de acordo com seu beta.

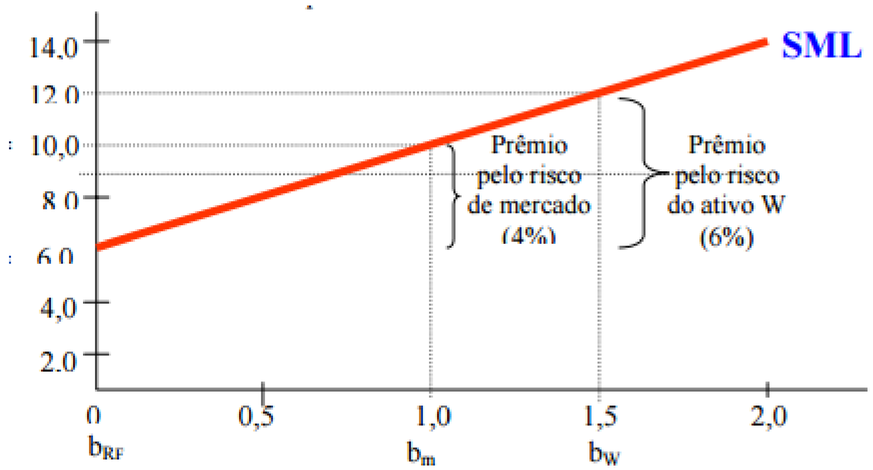


Gráfico 5

O retorno esperado de um título com beta igual a zero é dado pela taxa livre de risco, Rf. O beta médio de todos os títulos quando ponderado pela proporção do valor de mercado de cada título em relação ao da carteira de mercado é igual a um. Como a carteira de mercado é formada ponderando-se cada título pelo seu valor de mercado, o beta da carteira de mercado é unitário. Como o beta é a medida apropriada de risco, títulos com betas elevados devem ter um retorno esperado superior ao de títulos com betas reduzidos. Mais detalhes em Málaga (2005, p.43).

3.3.2 – ÍNDICE DE INFORMAÇÃO (IR)

Com a limitação descrita anteriormente com o IS, utilizou-se a Razão de Informação (IR) como medida de desempenho alternativa. Pode-se observar que a formula é a mesma utilizada que a do Sharpe, entretanto ela é uma medida do retorno ajustado ao risco de uma garantia financeira, ativo ou carteira. É definida como retorno ativo esperado dividido pelo erro, em que retorno ativo esperado é a diferença entre o retorno esperado da carteira e do retorno esperado de um índice de referência correspondente ao beta da carteira e o erro é o desvio padrão do retorno ativo (retorno da carteira – retorno do índice correspondente ao beta da carteira via SML).

A Razão de informação é usada para avaliar a habilidade dos gestores de fundos de hedge, fundos mútuos etc. Neste caso, tem por objetivo avaliar o retorno esperado das carteiras de diversificação ingênua e pelo procedimento de Markowitz dividido pela quantidade de risco que a carteira toma em relação ao índice de referência que no estudo adotou-se o Ibovespa.

Ibovespa foi escolhido porque é o resultado de uma carteira teórica de ativos, elaborada de acordo com os critérios estabelecidos em sua metodologia que tem por objetivo ser o indicador de desempenho médio das cotações dos ativos de maior negociabilidade e representatividade do mercado de ações brasileiro.

$$IR = \frac{E[R - R_b]}{\sigma} = \frac{\alpha}{\omega} = \frac{E[R - R_b]}{\sqrt{\mathrm{var}[R - R_b]}},$$

Assim, quanto maior a relação da informação, maior o retorno ativo da carteira dada a quantidade de risco assumido, e melhor o desempenho da carteira. A relação de informações é semelhante ao índice de Sharpe, mas, enquanto o índice de Sharpe é o "excesso" de retorno de um ativo durante o retorno de um ativo livre de risco dividido pela variabilidade ou desvio padrão dos retornos, a razão de informação é o retorno em excesso da carteira em relação ao índice de referência correspondente ao beta da carteira dividido pelo desvio padrão do retorno em excesso, ou seja, dividido pelo risco específico da carteira. Mais detalhes em Blatt, Sharon (2004).

4. - METODOLOGIA

Este trabalho busca evidenciar e entender se existe de fato uma superioridade empírica do modelo de Makowitz em comparação a uma diversificação igualmente ponderada no mercado brasileiro. Além disso, procura entender o comportamento da carteira conforme o número de ativos vai crescendo, como a ponderação da carteira ótima, P, vai se comportar, aproximando-se ou não da diversificação ingênua.

Para isto, serão construídas três carteiras pelo procedimento da fronteira eficiente de Markowitz e três carteiras com uma distribuição ingênua mudando entre elas apenas os números de ativos que são 5, 10 e 20. Assim, deve-se analisar com melhor acurácia o comportamento das ponderações da carteira P e compara-las com a diversificação ingênua.

Os ativos que serão utilizados são ações que possuem maior participação no índice Ibovespa por serem ações de empresas já consolidadas (estágio de maturidade). Além disso, foi estabelecido mais 2 critérios de seleção das ações: (1) a diversidade, pois como o objetivo da diversificação é diminuir o risco específico, serão selecionadas empresas de setores econômicos mais variados possíveis (comunicação, alimentos, serviços, energia e financeiros), e (2) se as ações eram negociadas desde o começo da data inicial da amostra. Assim chegou-se à seguinte lista de ações:

Ticker	Empresa
PETR4	Petrobras
ITUB4	Itau Unibanco
ABEV3	Ambev
BRKM5	Brasken
VALE5	Vale do Rio Doce
UGPA3	Ultrapar
EMR3	Embraer
VIVT4	Vivo Telefonia
FIBR3	Fibria
CCRO3	CCR Rodovias

Ticker	Empresa
LAME4	Lojas Americanas
SUZB5	Suzano Papel e Celulose
PCAR4	Pão de Açucar
TBLE3	Track Bell
SBSP3	Sabesp
CMIG4	CEMIG
GGBR4	Gerdau
CPLE6	Copel
CSNA3	Cia. Siderúrgica Nacional
USIM5	Usiminas

Tabela 1

Uma vez definidos quais serão os dados, a próxima etapa se dá com a Economatica como fonte fornecedora da base de dados. Assim, serão utilizados dados mensais das ações de 12 anos, pois segundo DeMiguel, Garlappi e Uppal (2009) o modelo de Markowitz tem maiores chances de ser melhor que a carteira igualmente ponderada quando se tem muitos dados, e o ano de 2003 foi escolhido como data base da amostra por considerar que a partir desta data a economia brasileira já estava estabilizada, sem hiperinflação, menor risco político e câmbio mais estabilizado.

Além disso, para concretização deste estudo, é de extrema importância uma proxy para o ativo livre de risco, as Letras do Tesouro Nacional (LTN) com vencimento em Janeiro como *proxy* para os ativos livres de risco. As LTN são as que chegam mais próximas em relação aos critérios necessários para ser considerado um ativo livre de risco. A 1ª exigência é a taxa previamente conhecida, têm uma taxa pré-fixada e, portanto, conhecida no momento do investimento, o que está de acordo com a exigência do ativo livre de risco; a 2ª exigência é o risco de crédito. Acredita-se que apesar da LTN não atender fielmente à exigência de não ter risco de crédito, trata-se de um dos ativos mais confiáveis da economia brasileira (uma vez que, por serem emitidos pelo governo, na sua eventual falência, este pode emitir moeda para quitar sua dívida com seus credores); a 3ª exigência é que a maturidade coincida com o horizonte de investimento do investidor.

Com a base histórica dos retornos das ações utilizadas e já escolhido a proxy para o ativo livre de risco, é possível a realização da análise quantitativa. Os retornos dos ativos foram escolhidos com periodicidade mensal. Além disso, como o objetivo deste estudo é comparar o desempenho das duas carteiras (Markowitz e a Naive) foi feito uma análise fora da amostra afim de comprovar na prática quem possui o melhor desempenho. Para isto, a carteira eficiente de Markowitz foi construída com dados de 01/2003 até 12/2012 para encontrar as ponderações das carteiras ótimas de 5, 10 e 20 ativos afim de comparar os resultados das carteiras (Markowitz vs Naive) com o parâmetro de desempenho dos anos que não foram utilizados na amostra 01/2013 até 07/2015. Desta forma, pode-se ter uma análise das duas carteiras de 01/2013 a 07/2015 e se faz possível comparar em bases mais sólidas quem obteve o melhor desempenho a carteira que revolucionou a teoria de finanças ou a diversificação mais simples possível.

4.2.1 - METODOLOGIA COMPUTACIONAL

Utilizou-se o Matlab como Software para o desenvolvimento deste estudo, o qual tem como objetivo calcular a carteira de média-variância eficiente de dados históricos (modelo de Markowitz).

Além disso, adotou-se que as rentabilidades e as covariâncias históricas são as melhores estimativas de valores futuros. Desta forma, o retorno do portfólio é a soma dos retornos esperados de cada ativo ponderado por seu peso, entretanto, o risco da carteira não é uma simples ponderação dos riscos, mas também função da covariância entre os pares de ativos.

Conforme mencionado anteriormente, no modelo de média-variância feito por Makowitiz (1952), o retorno esperado, E(Rp), de uma carteira de ativos, formada por n ativos, i = 1, 2, ..., n, é expresso por sua média, dada pela equação I:

$$R_P = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot R_i$$ (Equação I)

O risco de uma carteira, por sua vez, está definido no modelo original através da variância σp^2 dos retornos da carteira ou, analogamente, por meio de seu desvio padrão σp, que pode ser observado na equação II:

$$\sigma_P = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i \cdot w_j \cdot \sigma_{ij}}$$ (Equação II)

onde σij representa a covariância entre os retornos dos ativos i e j, sendo, portanto σii a própria variância do ativo ai.

4.2.2 - METODOLOGIA DIVERSIFICAÇÃO INGÊNUA

Efetuada no Excel, no qual a ponderação é 1/N para cada ativo. Onde o retorno da carteira será:

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot R_i$$

Sendo o risco calculado:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum w_i^2 \times \sigma_i^2 + \sum \sum w_i \times w_j \times cov_{i,j}}$$

Como os ativos estão distribuídos de forma igual (1/n para cada n ativos) a equação anterior pode ser expressa da seguinte forma:

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{1}{n^2}\sigma^2 + \frac{1}{n^2}\mathrm{cov}_{ij}}$$

5 – COMPARAÇÃO DAS CARTEIRAS

5.1 – ANÁLISE DESCRITIVA DOS DADOS

Realizou-se uma análise de ativo por ativo. Com o objetivo de observar o comportamento da amostra e tentar compreender melhor os resultados que iriam ser obtidos na construção da carteira. Primeiramente foi necessário construir os retornos e desvios padrões de todos os ativos a partir de seu preço de fechamento histórico. Desta forma, encontrou-se os retornos esperados histórico e os desvios padrões utilizados para a construção de todas as carteiras.

Além disso, foram calculadas assimetria e curtose dos ativos para fazer o teste Jarque-Bera (JB) de normalidade nos dados e, todos foram caracterizados como distribuições aproximadamente normais com 10% de significância (não rejeitando a hipótese nula do teste) - condição importante para a realização do procedimento.

Ação	Média Retorno	Desvio Padrão	Ret. Máx.	Ret. Mín.	Curtose	Assimetria	JB
PETR4	1,406%	0,09543319	0,255555556	-0,210127678	0,961981275	-0,187851511	3,5404
ITUB4	1,904%	0,087325634	0,229424108	-0,192441607	0,369329093	0,033377875	3,47488
ABEV3	2,294%	0,069734093	0,138939671	-0,152396852	1,437738429	-0,622119468	5,433
BRKM5	2,612%	0,157633213	0,365384615	-0,204081633	13,59780553	2,496321974	3,6774
VALE5	1,815%	0,096305811	0,172413793	-0,209746541	0,42859258	0,131572854	2,1886
UGPA3	2,151%	0,070066251	0,158142857	-0,152818792	0,385569507	0,128742352	15,3753
EMR3	0,850%	0,102867512	0,188372093	-0,302158273	1,31116954	-0,203005881	3,7802
VIVT4	0,625%	0,061801192	0,110399317	-0,145041239	0,194436834	-0,327257617	12,6926
FIBR3	0,863%	0,143314286	0,279320249	-0,271517947	7,608598642	1,539193498	1,66
CCRO3	3,725%	0,10270034	0,265231597	-0,188311688	1,239004686	0,729272633	0,7809
LAME4	3,467%	0,119882388	0,262884366	-0,206223874	0,606109467	0,429466132	0,2997
SUZB5	1,033%	0,114056635	0,216894977	-0,241666667	0,435278737	0,21732433	2,9014
PCAR4	1,465%	0,089897607	0,171297012	-0,170145164	-0,67330411	-0,02237683	2,408
TBLE3	2,642%	0,125565975	0,230559345	-0,252040816	12,8977398	2,508205982	1,0266
SBSP3	2,250%	0,094236304	0,185218394	-0,172794118	1,281389559	0,076719961	6,0538
CMIG4	1,698%	0,09025836	0,183807814	-0,147444165	2,299427185	0,120759382	2,6504
GGBR4	2,223%	0,113016158	0,244944504	-0,301153213	0,377965933	-0,007841652	1,623
CPLE6	1,499%	0,088609979	0,208728653	-0,16142132	0,108891611	0,398404521	4,28
CSNA3	2,035%	0,121379064	0,227444398	-0,283201407	-0,27233056	-0,06324839	6,2019
USIM5	2,509%	0,138558334	0,284263959	-0,282881926	0,070732647	0,025943814	5,749

Tabela 2

5.2 – CONSTRUÇÃO DA CARTEIRA DE MARKOWITZ

5.2.1 – CARTEIRA ÓTIMA DE MARKOWITZ COM 5 ATIVOS

Para a construção da carteira ótima de risco pelo procedimento de Markowitz o procedimento descrito a seguir foi utilizado para todos os casos analisados. Primeiramente foi selecionado as ações na tabela a seguir:

Ticker	Empresa
PETR4	Petrobras
ITUB4	Itau Unibanco
ABEV3	Ambev
BRKM5	Brasken
VALE5	Vale do Rio Doce

Tabela 3

Após selecionar as ações que seriam utilizadas, iniciou-se o processo de construção da carteira pelo processo matemático. Para isso, calculou-se a média histórica de cada ativo de 01/2003 até 12/2012 e sua variância e sua matriz de covariância como foi ilustrado na tabela 1. Após esta fase iniciou-se a resolução da metodologia de Markowitz tentando maximizar o retorno a uma dada variância.

Entretanto foi imposta uma restrição na alocação dos ativos, foi considerado que só poderia ficar vendido até 100% em um determinado ativo e ficar no máximo comprado 200% de forma que a soma dos pesos atribuídos nos ativos seja igual a 1. Esta premissa foi feita na tentativa de se obter maior semelhança com as ponderações que os investidores têm na prática ao alocarem seu capital. Assim chega-se na seguinte fronteira eficiente para 5 ativos:

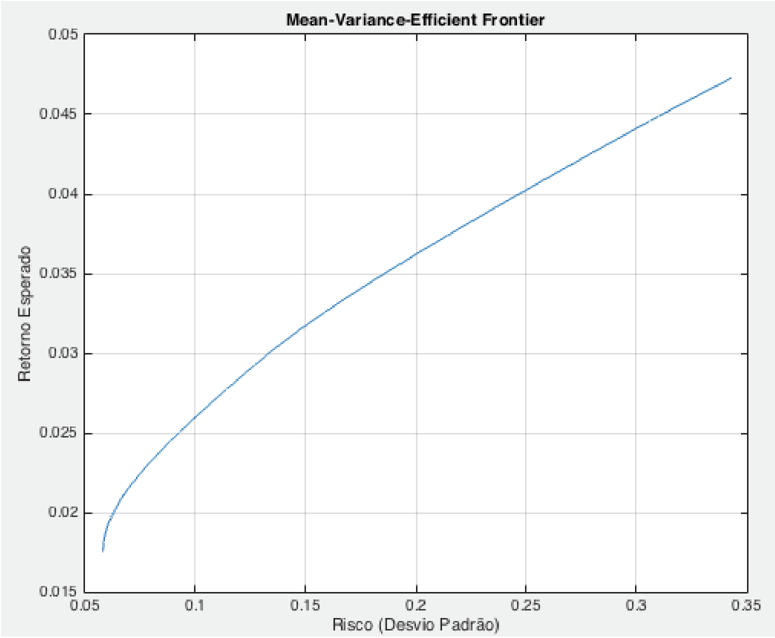


Gráfico 5

Neste momento observa-se todos os melhores retornos possíveis dentro da restrição imposta. Desta forma, para encontrar a melhor carteira com risco possível pelo procedimento de Markowitz, P, utilizou-se como rf uma Letra do Tesouro Nacional com vencimento em 12/2014 (horizonte de investimento de 12 meses após o fim da minha amostra) com um retorno mensal de 0,011 chegando a seguinte LAC:

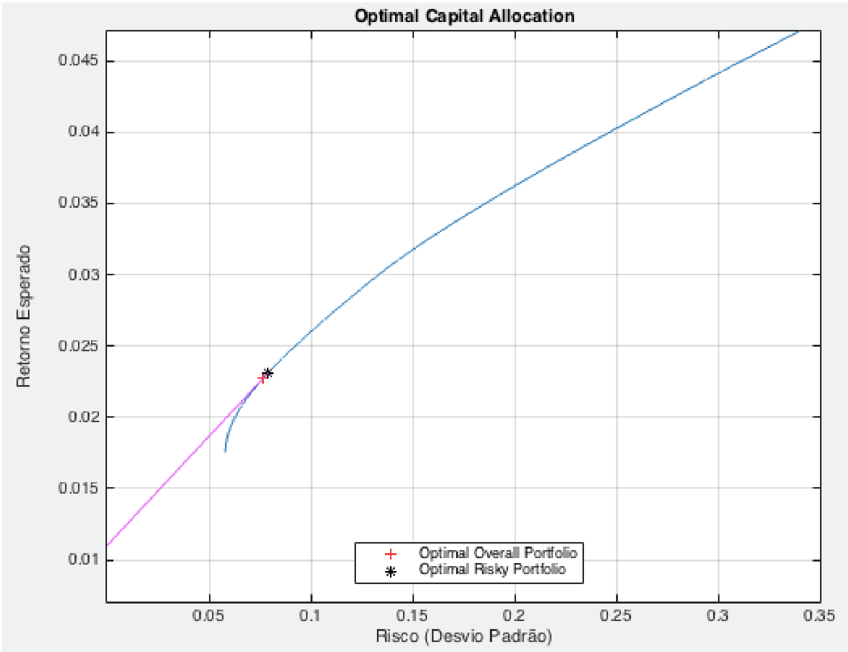


Gráfico 6

Encontrada a LAC e a Carteira Ótima com Risco (em inglês Optimal Risky Portfolio) temos as ponderações da carteira P que será utilizada para calcular o retorno da carteira fora da amostra. Estas ponderações estão representadas na tabela a seguir:

PETR4	ITUB4	ABEV3	BRKM5	VALE5
-0,397606341	0,169842617	0,802790837	0,258105586	0,166867301

Tabela 4

5.2.2 – CARTEIRA ÓTIMA DE MARKOWITZ COM 10 ATIVOS

Para a construção da carteira ótima de risco pelo procedimento de Markowitz utilizou-se o procedimento descrito anteriormente. Os 10 ativos foram selecionados das ações mencionadas anteriormente somada com mais 5 ações selecionadas na tabela a seguir:

Ticker	Empresa
PETR4	Petrobras
ITUB4	Itau Unibanco
ABEV3	Ambev
BRKM5	Brasken
VALE5	Vale do Rio Doce
UGPA3	Ultrapar
EMR3	Embraer
VIVT4	Vivo Telefonia
FIBR3	Fibria
CCRO3	CCR Rodovias

(Tabela 5)

Assim chega-se na seguinte fronteira eficiente para 10 ativos:

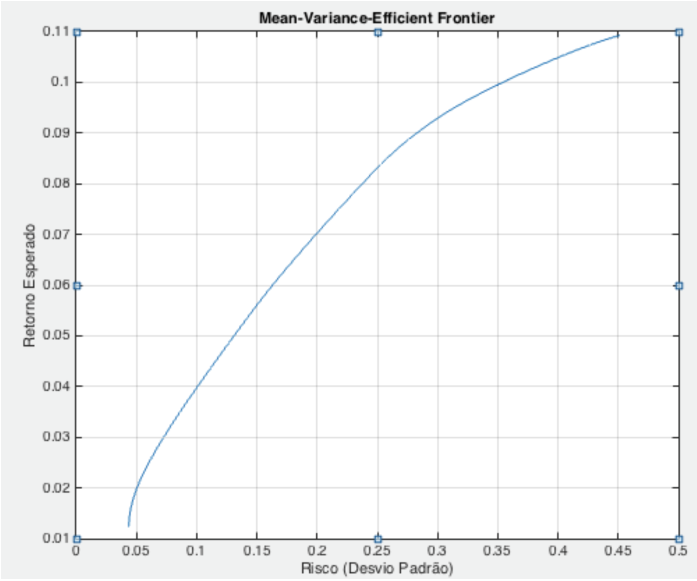


Gráfico 7

Neste momento novamente observa-se todos os melhores retornos possíveis dentro da restrição imposta. Desta forma, para encontrar a melhor carteira com risco possível pelo procedimento de Markowitz, P, utilizou-se como rf chegando a seguinte LAC:

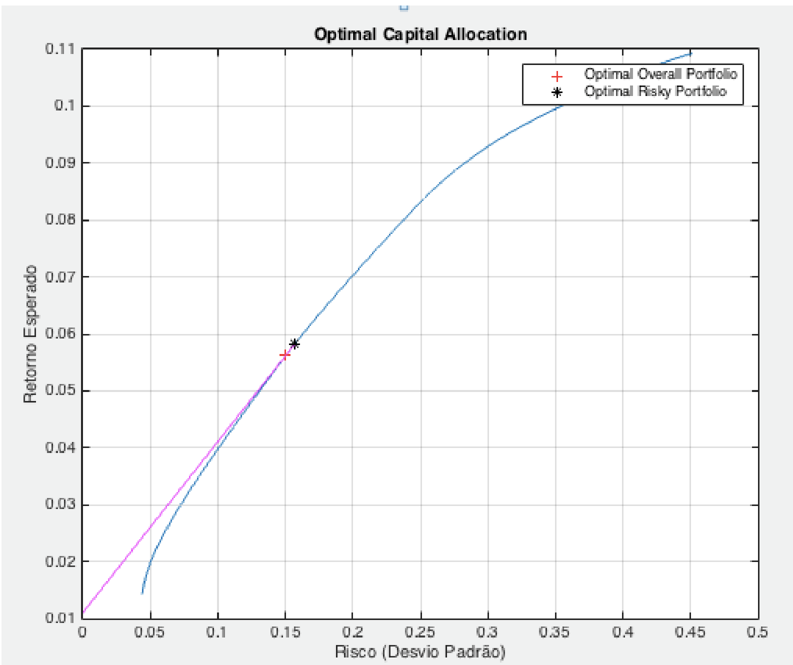


Gráfico8

Encontrada a LAC e a Carteira Ótima com Risco (em inglês Optimal Risky Portfolio) com 10 ativos temos as ponderações da carteira P que será utilizada para calcular o retorno da carteira fora da amostra. Estas ponderações estão representadas na tabela a seguir:

PETR4	ITUB4	ABEV3	BRKM5	VALE5	UGPA3	EMR3	VIVT4	FIBR3	CCRO3
-0,48669	0,1620	0,7747	0,1057	0,1562	0,7946	-0,2824	-1	-0,3173	1,0930

Tabela 6

5.2.3 – CARTEIRA ÓTIMA DE MARKOWITZ COM 20 ATIVOS

Para a construção da carteira ótima de risco pelo procedimento de Markowitz com 20 ativos foram selecionados, as ações mencionadas anteriormente somadas com mais 10 ações selecionadas na tabela a seguir:

Ticker	Empresa
PETR4	Petrobras
ITUB4	Itau Unibanco
ABEV3	Ambev
BRKM5	Brasken
VALE5	Vale do Rio Doce
UGPA3	Ultrapar
EMR3	Embraer
VIVT4	Vivo Telefonia
FIBR3	Fibria
CCRO3	CCR Rodovias

Ticker	Empresa
LAME4	Lojas Americanas
SUZB5	Suzano Papel e Celulose
PCAR4	Pão de Açucar
TBLE3	Track Bell
SBSP3	Sabesp
CMIG4	CEMIG
GGBR4	Gerdau
CPLE6	Copel
CSNA3	Cia. Siderúrgica Nacional
USIM5	Usiminas

Tabela 7

Assim utilizando-se do procedimento descrito anteriormente chega-se na seguinte fronteira eficiente para 20 ativos:

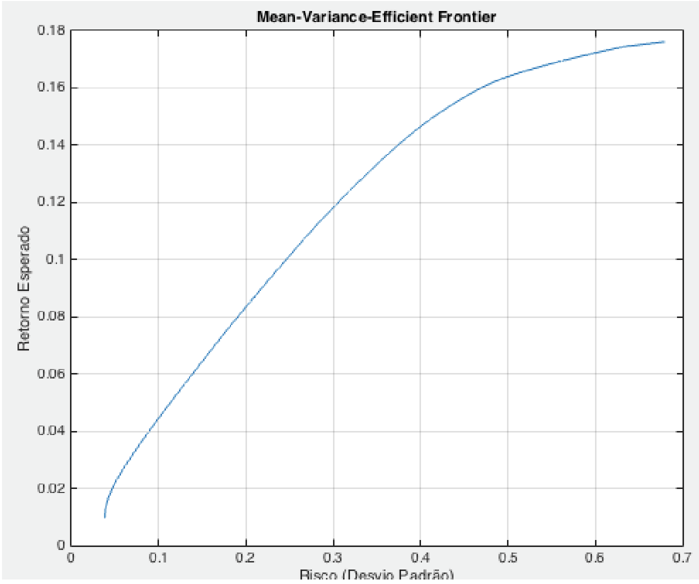


Gráfico 9

Para encontrar a melhor carteira com risco possível pelo procedimento de Markowitz, P, utilizou-se o mesmo procedimento descrito anteriormente chegando a seguinte LAC:

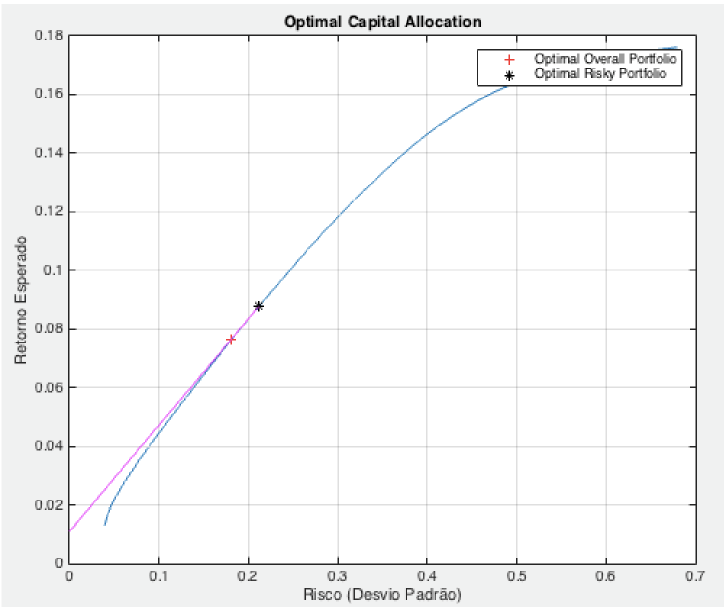


Gráfico 10

Encontrada a LAC e a Carteira Ótima com Risco (em inglês Optimal Risky Portfolio) com 20 ativos temos as ponderações da carteira P que será utilizada para calcular o retorno da carteira fora da amostra. Estas ponderações estão representadas na tabela a seguir:

PETR4	ITUB4	ABEV3	BRKM5	VALE5	UGPA3	EMR3	VIVT4	FIBR3	CCRO3
-0,7779	0,0207	0,9069	-0,1530	0,0427	0,8293	-0,4019	-1	-0,3327	1,5154
LAME4	SUZB5	PCAR4	TBLE3	SBSP3	CMIG4	GGBR4	CPLE6	CSNA3	USIM5
0,6870	-0,5334	-0,0307	0,5030	-0,1303	-0,4291	-0,1414	-0,4777	0,4708	0,4325

Tabela 8

5.3 – COMPARAÇÃO DE RESULTADOS

Já sabendo as ponderações das carteiras com diversificação ingênua para 5, 10 e 20 ativos e encontradas as ponderações da carteira ótima com risco, P, de Markowitz para 5, 10 e 20 ativos podemos analisar qual possui melhor resultado prático. Para isto utilizou-se o Índice de Sharpe dos retornos fora da amostra das ações mencionadas anteriormente de Janeiro de 2013 até Setembro de 2015.

Tais retornos aplicados as ponderações das carteiras (Carteira Ingênua e Carteira P) fornecem os retornos fora da amostra destas carteiras mês a mês (ou seja, 31 retornos fora da amostra para cada carteira), assim calculou-se o Índice de Sharpe e Razão de Informação para compara-los.

5.3.1 – DIVERSIFICAÇÃO INGÊNUA VS MARKOWITZ: 5 ATIVOS

Primeiramente analisou-se a diferença das ponderações atribuídas a cada carteira com o objetivo de se observar as principais discrepâncias e semelhanças nos dois portfólios como observado na tabela abaixo:

Ponderações para 5 ativos		
Ações	Divers. Ingênua	Proced. Markowitz
PETR4	0,2	-0,397606341
ITUB4	0,2	0,169842617
ABEV3	0,2	0,802790837
BRKM5	0,2	0,258105586
VALE5	0,2	0,166867301

Tabela 9

Como pode ser visto na tabela 9 existem algumas semelhanças nas ponderações dos ativos ITUB4, BRKM5 e VALE5 (diferença menor que 6%). Todavia existe uma grande diferença entre a carteira igualmente ponderada e a carteira P. A possibilidade de ficar vendido em ativos foi utilizada no processo de Markowitz no ativo PETR4 e alocado praticamente 80% do capital na ABEV3, isto se dá devido ao baixo retorno histórico na análise no ativo PETR4 e o alto rendimento da ABEV3, além disto, vale observar a matriz de covariância:

	PETR4	ITUB4	ABEV3	BRKM5	VALE5
PETR4	0,009193	0,00472	0,001481	0,004533	0,00443
ITUB4	0,00472	0,007352	0,00246	0,004747	0,003528
ABEV3	0,001481	0,00246	0,004641	0,00287	0,001321
BRKM5	0,004533	0,004747	0,00287	0,023376	0,002469
VALE5	0,00443	0,003528	0,001321	0,002469	0,008851

Matriz 1

A matriz de covariância ilustra melhor o porquê da ponderação tão grande em ABEV e negativa em PETR4, como não existe uma combinação de covariação negativa o ativo que menos variou com um impacto(choque) em outro ativo foi a Ambev e o ativo que teve maior impacto foi a Petrobras. Logo, não existe nenhuma surpresa nas ponderações atribuídas pelo procedimento de Markowitz.

A segunda análise buscou observar qual portfólio apresenta o maior IS fora da amostra. Para isso, como mencionado anteriormente foi aplicado aos retornos fora da amostra dos ativos selecionados multiplicado pelas ponderações das carteiras. Como pode ser visto na Tabela 10.

	Rertorno Realizado Diversificação Ingênua	Rertorno Realizado Markowitz	Rf	Rf > DI (sim=1)	Rf > Markowitz (sim=1)
30/01/2013	-0,015722988	-0,014485284	0,0113862	1	1
28/02/2013	0,067010452	-0,10050401	0,0097954		1
28/03/2013	-0,001090835	0,0045346	0,0097954	1	1
30/04/2013	-0,116071838	0,020738456	0,0097954	1	
28/05/2013	0,02641569	0,0120789	0,0137724		1
28/06/2013	0,036614521	0,000863574	0,0097954		1
30/07/2013	0,05759819	0,023406133	0,0097954		
30/08/2013	0,076936426	0,004597703	0,0113862		1
30/09/2013	0,005553622	0,003070028	0,0121816	1	1
30/10/2013	-0,040359988	0,059670077	0,0097954	1	
29/11/2013	-0,122790647	0,025326702	0,0121816	1	
30/12/2013	-0,025887657	-0,067545977	0,012977	1	1
30/01/2014	0,067114921	0,05436088	0,0097954		
28/02/2014	-0,01492771	-0,029992218	0,0121816	1	1
28/03/2014	-0,034751341	-0,079233063	0,0105908	1	1
30/04/2014	0,006857368	-0,048079884	0,0097954	1	1
30/05/2014	0,098890559	-0,023130036	0,0097954		1
30/06/2014	0,072391869	0,007512675	0,0121816		1
30/07/2014	-0,106013488	-0,045994921	0,0097954	1	1
29/08/2014	-0,060590916	0,051458614	0,009	1	
30/09/2014	0,033312198	0,071020448	0,009		
30/10/2014	-0,119971623	0,138250228	0,012977	1	
28/11/2014	-0,145607964	0,01504644	0,012977	1	
30/12/2014	0,118144663	0,029776849	0,0113862		
30/01/2015	-0,068436375	0,034397965	0,0082046	1	
26/02/2015	0,180184829	-0,076168099	0,0105908		1
30/03/2015	-0,059976018	-0,050715773	0,0097954	1	1
30/04/2015	0,011342085	-0,024664738	0,009		1
29/05/2015	-0,119643843	0,018929576	0,012977	1	
30/06/2015	0,000820518	-0,00128151	0,0113862	1	1

30/07/2015	-0,017568531	0,096016247	0,0102046	1	

Retorno Médio	Retorno Médio
-0,006781415	0,003524535
Desvio Padrão	Desvio Padrão
0,079066023	0,052497453

Soma	Soma
19	18

Índice de Sharpe	Índice de Sharpe
-0,224893247	-0,14239672

Tabela 10

A tabela 10 mostra que para 5 ativos com 31 observações fora da amostra tanto o procedimento de Markowitz como a diversificação ingênua apresentam na maioria das observações fora da amostra retornos inferiores ao rf além de apresentar IS médio menor que zero. Logo não é possível utilizar IS como parâmetro de desempenho.

5.3.2 – DIVERSIFICAÇÃO INGÊNUA VS MARKOWITZ: 10 ATIVOS

Analisando a diferença das ponderações atribuídas a cada carteira com o objetivo de se observar as principais discrepâncias e semelhanças nos dois portfólios como observado na tabela abaixo:

Ponderações para 10 ativos		
Ações	Divers. Ingênua	Proced. Markowitz
PETR4	0,1	-0,486694475
ITUB4	0,1	0,162002951
ABEV3	0,1	0,774764715
BRKM5	0,1	0,10578945
VALE5	0,1	0,156293052
UGPA3	0,1	0,794617407
EMR3	0,1	-0,28242933
VIVT4	0,1	-1
FIBR3	0,1	-0,317378949
CCRO3	0,1	1,093035178

Tabela 11

Como pode ser visto na tabela 11 existem algumas semelhanças nas ponderações dos ativos BRKM5 e VALE5 (diferença menor que 6%). Todavia existem grandes diferenças entre a carteira igualmente ponderada e a carteira P. A possibilidade de ficar vendido em ativos foi utilizada no processo de Markowitz no ativo PETR4 e EMBR3 e alocado praticamente 77% do capital na ABEV3, 79% em UGPA3 e mais de 100% do seu capital em CCRO3, isto se dá devido ao baixo retorno histórico na análise no ativo PETR4 e EMBR3 e ao alto rendimento (maior do que os outros ativos) de ABVE3 UGAP3 e CCRO3.Vale observar a matriz de covariância:

	PETR4	ITUB4	ABEV3	BRKM5	VALE5	UGPA3	EMR3	VIVT4	FIBR3	CCRO3
PETR4	0,009	0,0047	0,0014	0,0045	0,0044	0,0016	0,0022	0,0005	0,0042	0,0034
ITUB4	0,004	0,0073	0,0024	0,0047	0,0035	0,0015	0,0029	0,0009	0,0048	0,0038
ABEV3	0,001	0,0024	0,0046	0,0028	0,0013	0,0013	0,0015	0,0008	0,0021	0,0022
BRKM5	0,004	0,0047	0,0028	0,0233	0,0024	0,0035	0,0048	0,0018	0,0050	0,0063
VALE5	0,004	0,0035	0,0013	0,0024	0,0088	0,0023	0,0025	0,0006	0,0060	0,0029
UGPA3	0,001	0,0015	0,0013	0,0035	0,0023	0,0046	0,0013	0,0011	0,0020	0,0026
EMR3	0,002	0,0029	0,0015	0,0048	0,0025	0,0013	0,0099	0,0012	0,0051	0,0027
VIVT4	0,001	0,0009	0,0008	0,0018	0,0006	0,0011	0,0012	0,0036	0,0008	0,0012
FIBR3	0,004	0,0048	0,0021	0,0050	0,0060	0,0020	0,0051	0,0008	0,0192	0,0041
CCRO3	0,003	0,0038	0,0022	0,0063	0,0029	0,0026	0,0027	0,0012	0,0041	0,0101

(Matriz 2)

A matriz de covariância pode ajudar a ilustrar melhor o motivo da ponderação tão grande em ABEV3, UGAP3 e CCRO3 e negativa em PETR4 e VALE5, como não existe uma combinação de covariação negativa o ativo que teve menos variação com o impacto(choque) em outro ativo foi a Ambev, Ultra e CCR e o ativo que teve maior impacto foi a Petrobras e Vale do Rio Doce. Logo, não existe nenhuma surpresa nas ponderações atribuídas pelo procedimento de Markowitz.

A segunda análise focou-se em observar qual portfólio apresenta o maior IS. A tabela abaixo mostra que para 10 ativos com 31 observações fora da amostra as duas carteiras apresentaram novamente na maioria das vezes retornos inferiores ao ativo livre de risco e um IS médio menor que zero, não podendo ser utilizado como parâmetro de performance.

	Rertorno Realizado Diversificação Ingênua	Rertorno Realizado Markowitz	Rf	Rf > DI (sim=1)	Rf > Markowitz (sim=1)
30/01/2013	-0,015361623	-0,014099982	0,0113862	1	1

28/02/2013	0,016706817	-0,140827111	0,0097954		1
28/03/2013	0,010608734	-0,01662626	0,0097954		1
30/04/2013	0,022324835	-0,044305892	0,0097954		1
28/05/2013	-0,053002006	-0,054283358	0,0137724	1	1
28/06/2013	0,009432363	0,043704004	0,0097954	1	
30/07/2013	0,010496274	-0,023919228	0,0097954		1
30/08/2013	0,017505395	0,025858526	0,0113862		
30/09/2013	0,053138798	0,101534927	0,0121816		
30/10/2013	-0,003609144	0,08618767	0,0097954	1	
29/11/2013	-0,020221697	-0,046773674	0,0121816	1	1
30/12/2013	-0,071948967	-0,194011292	0,012977	1	1
30/01/2014	-0,00691676	0,154688879	0,0097954	1	
28/02/2014	0,046732601	-0,041089444	0,0121816		1
28/03/2014	-0,01953749	0,039845162	0,0105908	1	
30/04/2014	-0,020452254	-0,016762924	0,0097954	1	1
30/05/2014	0,003770701	-0,015525058	0,0097954	1	1
30/06/2014	0,053241909	-0,04731025	0,0121816		1
30/07/2014	0,060030617	0,056401366	0,0097954		
29/08/2014	-0,042603961	-0,301020139	0,009	1	1
30/09/2014	-0,022886713	0,173041961	0,009	1	
30/10/2014	0,045032076	-0,004061587	0,012977		1
28/11/2014	-0,069164944	-0,049836502	0,012977	1	1
30/12/2014	-0,053287581	0,082173561	0,0113862	1	
30/01/2015	0,098893858	0,045026815	0,0082046		
26/02/2015	-0,00914582	0,045453162	0,0105908	1	
30/03/2015	0,069659672	-0,029552517	0,0097954		1
30/04/2015	-0,037229335	-0,021787341	0,009	1	1
29/05/2015	-0,009911335	-0,027895059	0,012977	1	1
30/06/2015	-0,041641311	0,071651417	0,0113862	1	
30/07/2015	0,000882793	0,024832822	0,0102046	1	

Retorno Médio	Retorno Médio
0,000694726	-0,00449314
Desvio Padrão	Desvio Padrão
0,041736423	0,093136733

Soma	Soma
19	18

Índice de Sharpe	Índice de Sharpe
-0,246913208	-0,166348331

Tabela 12

5.3.3 – DIVERSIFICAÇÃO INGÊNUA VS MARKOWITZ: 20 ATIVOS

A primeira coisa a ser analisada foi a diferença das ponderações atribuídas a cada carteira com o objetivo de se observar as principais discrepâncias e semelhanças nos dois portfólios como observado na tabela abaixo:

Ponderações para 20 ativos		
Ações	Divers. Ingênua	Proced. Markowitz
PETR4	0,5	-0,777911647
ITUB4	0,5	0,02077256
ABEV3	0,5	0,906915509
BRKM5	0,5	-0,153046283
VALE5	0,5	0,042786249
UGPA3	0,5	0,82932496
EMR3	0,5	-0,401995252
VIVT4	0,5	-1
FIBR3	0,5	-0,332750314
CCRO3	0,5	1,515424109
LAME4	0,5	0,687039279
SUZB5	0,5	-0,533415682
PCAR4	0,5	-0,030797677
TBLE3	0,5	0,503009555
SBSP3	0,5	-0,130391988
CMIG4	0,5	-0,429181124
GGBR4	0,5	-0,141431847
CPLE6	0,5	-0,477706982
CSNA3	0,5	0,470834217
USIM5	0,5	0,432522358

Tabela 13

Como pode ser visto na tabela 13, não existe praticamente nenhuma semelhança nas ponderações dos ativos. A possibilidade de ficar vendido em ativos foi utilizada no processo de Markowitz em diversos ativos. Além disso, os ativos que tiveram maiores ponderações foram aqueles com maior média histórica dos seus retornos. E pela matriz de covariância com 20 ativos fica muito difícil enxergar algum comportamento característico.

Todavia, ao tentar comparar o IS aconteceu o mesmo problema relatado anteriormente como pode ser observado na Tabela 14.

	Rertorno Realizado Diversificação Ingênua	Rertorno Realizado Markowitz	Retorno Mensal Rf	Rf > DI (sim=1)	Rf > Markowitz (sim=1)
30/01/2013	-0,010394577	-0,000784842	0,0113862	1	1
28/02/2013	0,020364323	-0,299745169	0,0097954		1
28/03/2013	0,000690336	-0,227881131	0,0097954	1	1
30/04/2013	0,003112067	-0,106824665	0,0097954	1	1
28/05/2013	-0,085663369	-0,143482317	0,0137724	1	1
28/06/2013	0,035080694	0,180788273	0,0097954		
30/07/2013	0,023940994	0,004188152	0,0097954		1
30/08/2013	0,031982824	0,119724994	0,0113862		
30/09/2013	0,060884768	0,270670472	0,0121816		
30/10/2013	0,000566328	0,07996856	0,0097954	1	
29/11/2013	0,006971104	0,069118269	0,0121816	1	
30/12/2013	-0,081627848	-0,345797351	0,012977	1	1
30/01/2014	-0,034610062	0,159950035	0,0097954	1	
28/02/2014	0,04369033	-0,024725318	0,0121816		1
28/03/2014	-0,020751515	-0,122851853	0,0105908	1	1
30/04/2014	-0,014121141	-0,090575817	0,0097954	1	1
30/05/2014	0,016906352	-0,016407265	0,0097954		1
30/06/2014	0,056805585	-0,059571297	0,0121816		1
30/07/2014	0,040730074	0,002812637	0,0097954		1
29/08/2014	-0,072923727	-0,438974415	0,009	1	1
30/09/2014	-0,03904372	0,170948134	0,009	1	
30/10/2014	0,036995897	-0,031727282	0,012977		1
28/11/2014	-0,057368431	-0,030060732	0,012977	1	1
30/12/2014	-0,09618142	0,000249126	0,0113862	1	1
30/01/2015	0,117407851	0,087070187	0,0082046		
26/02/2015	0,027788431	0,152781183	0,0105908		
30/03/2015	0,076896562	0,05231731	0,0097954		
30/04/2015	-0,052579428	-0,256818206	0,009	1	1
29/05/2015	-0,043326579	-0,069045129	0,012977	1	1
30/06/2015	-0,053387557	0,188583755	0,0113862	1	
30/07/2015	-0,050646026	-0,077689147	0,0102046	1	1

Retorno Médio	Retorno Médio
-0,003606803	-0,025928737
Desvio Padrão	Desvio Padrão
0,051930025	0,166043587

Soma	Soma
18	20

Índice de Sharpe	Índice de Sharpe

-0,281278557	-0,222403874

Tabela 14

Ao se deparar com os IS menores do que zero em todas as carteiras, inviabilizou-se a comparação de resultados por este parâmetro. Desta forma, utilizou-se a Razão de Informacão como parâmetro de performance para comparar as Markowitz vs Diversificação Ingênua.

5.3.4 – CONSTRUINDO O ÍNDICE DE INFORMAÇÃO

Utilizou-se os dados de janeiro de 2013 até setembro de 2015 (dados fora da amostra) para realizar regressões entre os retornos de cada carteira com a carteira de mercado com o intuito de encontrar os betas de cada carteira, todas as regressões estão disponíveis no anexo, a seguir a tabela sintetizada os Betas das regressões:

Carteira	Beta
Carteira de Markowitz com 5 ativos	-0,1556
Carteira de Markowitz com 10 ativos	0,2313
Carteira de Markowitz com 20 ativos	0,1654
Carteira Diversificação Ingênua 5 ativos	0,6224
Carteira Diversificação Ingênua 10 ativos	1,1734
Carteira Diversificação Ingênua 20 ativos	0,9671

Tabela 15

É possível observar na tabela anterior que os Betas das carteiras mudam consideravelmente conforme o número de ativos disponíveis aumentam e isto é esperado uma vez que existe mais possibilidade de alocação de capital. Outro ponto interessante que pode ser observado é que o Beta da carteira ingênua para 20 ativos se aproxima muito de 1 que seria o Beta da carteira de mercado, portanto, baseado na amostra utilizada no estudo existe evidências que o aumento do número de ativos faz com que o Beta da diversificação ingênua se aproxime com o Beta da carteira de mercado entretanto ainda apresenta grande diferença em relação ao Beta da carteira do modelo de Markowitz.

Desta forma, iniciou-se o processo de construção do índice de informação com os dados da amostra. O primeiro caso foi analisar o caso da carteira de 5 ativos, com intuito de comparar qual carteira apresenta o melhor desempenho Markwitz vs Diversificação Ingênua. Para calcular o índice utilizou a tabela a seguir chegando nos seguintes resultados:

Retorno Div. Ing. (DI)	Retorno Markowitz	Ret. SML Beta Markowitz	Retorno SML Beta da DI	DI -SML Beta DI	Markowitz-SML Beta Markowitz
-0,015722988	-0,014485284	0,00280073	-0,01162117	-0,00410182	-0,017286
0,067010452	-0,10050401	0,00117579	-0,00487873	0,07188918	-0,10168
-0,001090835	0,0045346	0,00645039	-0,0267648	0,02567397	-0,001916
-0,116071838	0,020738456	0,01695775	-0,07036334	-0,0457085	0,003781
0,02641569	0,0120789	-0,002457	0,010195072	0,01622062	0,014536
0,036614521	0,000863574	-0,0055269	0,022933105	0,01368142	0,006391
0,05759819	0,023406133	-0,0069777	0,028952721	0,02864547	0,030384
0,076936426	0,004597703	-0,005497	0,022808764	0,05412766	0,010095
0,005553622	0,003070028	0,00490371	-0,02034711	0,02590074	-0,001834
-0,040359988	0,059670077	0,00278759	-0,01156663	-0,02879336	0,056882
-0,122790647	0,025326702	0,01126495	-0,04674203	-0,07604862	0,014062
-0,025887657	-0,067545977	0,00171474	-0,00711503	-0,01877263	-0,069261
0,067114921	0,05436088	-0,0105762	0,043884021	0,0232309	0,064937
-0,01492771	-0,029992218	-0,0036054	0,014959969	-0,02988768	-0,026387
-0,034751341	-0,079233063	0,00112544	-0,00466981	-0,03008153	-0,080358
0,006857368	-0,048079884	-0,0056467	0,023429945	-0,01657258	-0,042433
0,098890559	-0,023130036	-0,0075078	0,031152532	0,06773803	-0,015622
0,072391869	0,007512675	-0,0146663	0,060855377	0,01153649	0,022179
-0,106013488	-0,045994921	0,01755356	-0,07283559	-0,0331779	-0,063548
-0,060590916	0,051458614	-0,0014209	0,005895757	-0,06648667	0,05288
0,033312198	0,071020448	-0,000262	0,001086921	0,03222528	0,071282
-0,119971623	0,138250228	0,0129283	-0,05364384	-0,06632778	0,125322
-0,145607964	0,01504644	0,00929781	-0,03857972	-0,10702824	0,005749
0,118144663	0,029776849	-0,0149509	0,062036221	0,05610844	0,044728
-0,068436375	0,034397965	0,00125893	-0,00522372	-0,06321266	0,033139
0,180184829	-0,076168099	-0,014895	0,061804431	0,1183804	-0,061273
-0,059976018	-0,050715773	0,00925379	-0,03839707	-0,02157895	-0,05997
0,011342085	-0,024664738	-0,0009109	0,003779665	0,00756242	-0,023754
-0,119643843	0,018929576	0,00626245	-0,025985	-0,09365884	0,012667
0,000820518	-0,00128151	0,01250153	-0,05187302	0,05269354	-0,013783
-0,017568531	0,096016247	0,00503859	-0,0209068	0,00333827	0,090978
média	média	média	média	desvio	desvio
-0,006781415	0,003524535	0,00091533	-0,00379803	0,05243485	0,052012

IR Divers. Ingênua	-0,056897
IR Markowitz	0,05016513

Tabela 16

A notação Ret. SML Beta Markowitz foi utilizada para denotar os retornos esperados fora da amostra do índice de referência ajustado pelo Beta da carteira de Markowitz, analogamente Retorno SML Beta da DI foi utilizado para denotar os retornos esperados fora da amostra do índice de referência ajusta pelo beta da carteira de diversificação ingênua. Além disso, DI -SML Beta DI é justamente a variação do retorno acrescido ("ativo") em relação ao índice Ibovespa ajustado pelo Beta da DI, e Markowitz-SML Beta Markowitz é o mesmo procedimento só que ajustado pelo Beta da carteira de Markowitz.

Neste ponto, já é possível calcular o IR, pode-se observar que para 5 ativos a carteira que utiliza o procedimento de Markowitz apresenta um maior IR que a carteira de diversificação ingênua, logo a carteira ingênua apresenta um desempenho inferior ao modelo de otimização para 5 ativos. Vale notar ainda que a carteira de Markowitz obteve um desempenho acima do seu comparativo (Ibovespa ajustado pelo Beta da carteira) enquanto que a carteira de diversificação ingênua obteve um desempenho aquém do retorno esperado por seu índice de referência.

O mesmo procedimento de cálculo descrito acima foi utilizado para 10 ativos afim de comparar as duas carteiras, chegando aos seguintes resultados:

Retorno Div. Ing. (DI)	Retorno Markowitz	Ret. SML Beta Markowitz	Retorno SML Beta da DI	DI -SML Beta DI	Markowitz-SML Beta Markowitz
-0,015361623	-0,014099982	-0,045890263	-0,009045865	0,03052864	-0,005054117
0,016706817	-0,140827111	-0,021909187	-0,004318727	0,038616004	-0,136508383
0,010608734	-0,01662626	-0,009197782	-0,001813062	0,019806516	-0,014813198
0,022324835	-0,044305892	-0,050459224	-0,009946496	0,072784059	-0,034359396
-0,053002006	-0,054283358	-0,132654792	-0,026148844	0,079652786	-0,028134514
0,009432363	0,043704004	0,019220594	0,003788754	-0,009788231	0,039915251
0,010496274	-0,023919228	0,043235388	0,008522537	-0,032739114	-0,032441765
0,017505395	0,025858526	0,054584067	0,010759583	-0,037078672	0,015098943

0,053138798	0,101534927	0,04300097	0,008476329	0,010137828	0,093058598
-0,003609144	0,08618767	-0,038360064	-0,007561516	0,034750921	0,093749186
-0,020221697	-0,046773674	-0,021806363	-0,004298459	0,001584666	-0,042475215
-0,071948967	-0,194011292	-0,088121936	-0,01737055	0,016172969	-0,176640742
-0,00691676	0,154688879	-0,013413842	-0,00264413	0,006497083	0,157333009
0,046732601	-0,041089444	0,082733789	0,016308442	-0,036001189	-0,057397885
-0,01953749	0,039845162	0,028203772	0,005559513	-0,047741262	0,034285649
-0,020452254	-0,016762924	-0,008803905	-0,001735421	-0,011648349	-0,015027503
0,003770701	-0,015525058	0,044172072	0,008707176	-0,04040137	-0,024232233
0,053241909	-0,04731025	0,058731331	0,01157709	-0,005489422	-0,05888734
0,060030617	0,056401366	0,114729594	0,022615438	-0,054698976	0,033785928
-0,042603961	-0,301020139	-0,137315685	-0,027067597	0,094711724	-0,273952543
-0,022886713	0,173041961	0,01111517	0,002191017	-0,034001883	0,170850944
0,045032076	-0,004061587	0,002049153	0,000403928	0,042982923	-0,004465515
-0,069164944	-0,049836502	-0,101133812	-0,019935445	0,031968868	-0,029901058
-0,053287581	0,082173561	-0,072733685	-0,014337226	0,019446104	0,096510787
0,098893858	0,045026815	0,116955818	0,02305427	-0,01806196	0,021972545
-0,00914582	0,045453162	-0,00984819	-0,00194127	0,00070237	0,047394432
0,069659672	-0,029552517	0,116518829	0,022968131	-0,046859157	-0,052520648
-0,037229335	-0,021787341	-0,072389332	-0,014269348	0,035159997	-0,007517993
-0,009911335	-0,027895059	0,007125738	0,001404622	-0,017037073	-0,02929968
-0,041641311	0,071651417	-0,04898908	-0,009656702	0,007347769	0,081308119
0,000882793	0,024832822	-0,09779531	-0,019277361	0,098678103	0,044110183
-0,013200253	-0,004981889	-0,03941523	-0,00776951	0,026214977	0,002787621
média	média	média	média	desvio	desvio
0,000260508	-0,004508414	-0,008370669	-0,001650022	0,041152718	0,087620885

IR Divers. Ingênua	**0,209735272**
IR Markowitz	**0,044079161**

Tabela 17

Ao calcular o índice de informação para 10 ativos se observa que a carteira que utiliza o procedimento de Markowitz apresenta um menor IR que a carteira de diversificação ingênua, logo a carteira ingênua apresenta um desempenho superior ao modelo de otimização para 10 ativos. Vale notar ainda que a carteira de Markowitz e a ingênua obtiveram um desempenho acima do seu comparativo (Ibovespa ajustado pelo

Beta da carteira), mas como a carteira ingênua apresentou maior IR devido as suas propriedades ela apresenta melhor performance que o processo de otimização.

Além disso, a razão de informação é o retorno em excesso da carteira em relação ao índice de referência correspondente ao beta da carteira dividido pelo desvio padrão do retorno em excesso, logo, um IR positivo significa dizer que a carteira teve um desempenho superior que seu comparativo. Portanto as duas carteiras para 10 ativos obtiveram melhores resultados que a carteira correspondente na SML.

Repetindo o procedimento aplicado a carteira com 20 ativos disponíveis chegou-se aos seguintes resultados:

Retorno Div. Ing. (DI)	Retorno Markowitz	Ret. SML Beta Markowitz	Retorno SML Beta da DI	DI -SML Beta DI	Markowitz-SML Beta Markowitz
-0,010394577	-0,000784842	-0,037822118	-0,006468595	0,027427541	0,005683753
0,020364323	-0,299745169	-0,018057248	-0,003088273	0,03842157	-0,296656896
0,000690336	-0,227881131	-0,007580684	-0,0012965	0,008271021	-0,226584631
0,003112067	-0,106824665	-0,041587792	-0,007112626	0,044699859	-0,099712039
-0,085663369	-0,143482317	-0,109332239	-0,018698741	0,02366887	-0,124783576
0,035080694	0,180788273	0,015841347	0,002709295	0,019239347	0,178078979
0,023940994	0,004188152	0,035634007	0,006094369	-0,011693013	-0,001906217
0,031982824	0,119724994	0,04498743	0,007694055	-0,013004607	0,112030939
0,060884768	0,270670472	0,035440803	0,006061326	0,025443966	0,264609146
0,000566328	0,07996856	-0,031615833	-0,005407154	0,03218216	0,085375714
0,006971104	0,069118269	-0,017972502	-0,003073779	0,024943605	0,072192048
-0,081627848	-0,345797351	-0,072628877	-0,012421483	-0,00899897	-0,333375868
-0,034610062	0,159950035	-0,011055503	-0,001890787	-0,023554559	0,161840822
0,04369033	-0,024725318	0,068188041	0,011661981	-0,024497711	-0,0363873
-0,020751515	-0,122851853	0,023245158	0,003975545	-0,043996673	-0,126827397
-0,014121141	-0,090575817	-0,007256057	-0,00124098	-0,006865084	-0,089334837
0,016906352	-0,016407265	0,036406009	0,006226402	-0,019499657	-0,022633668
0,056805585	-0,059571297	0,048405548	0,008278645	0,008400037	-0,067849942
0,040730074	0,002812637	0,094558539	0,016172043	-0,053828465	-0,013359405
-0,072923727	-0,438974415	-0,113173682	-0,019355731	0,040249955	-0,419618685
-0,03904372	0,170948134	0,009160969	0,001566771	-0,048204688	0,169381363
0,036995897	-0,031727282	0,001688883	0,000288844	0,035307014	-0,032016126
-0,057368431	-0,030060732	-0,083353084	-0,01425561	0,025984654	-0,015805122
-0,09618142	0,000249126	-0,059946094	-0,010252387	-0,036235327	0,010501514
0,117407851	0,087070187	0,096393363	0,016485847	0,021014488	0,070584341
0,027788431	0,152781183	-0,008116741	-0,00138818	0,035905172	0,154169363
0,076896562	0,05231731	0,096033202	0,016424249	-0,01913664	0,035893061
-0,052579428	-0,256818206	-0,059662283	-0,010203848	0,007082855	-0,246614358

-0,043326579	-0,069045129	0,005872934	0,001004429	-0,049199514	-0,070049559
-0,053387557	0,188583755	-0,04037612	-0,006905398	-0,013011437	0,195489153
-0,050646026	-0,077689147	-0,080601538	-0,013785022	0,029955512	-0,063904125
média	média	média	média	devio	devio
-0,003606803	-0,025928737	-0,006073618	-0,001038751	0,030015451	0,161730991

IR Divers. Ingênua	0,082184854
IR Markowitz	-0,153897441

Tabela 18

Ao calcular o índice de informação para 20 ativos se observa que a carteira que utiliza o procedimento de Markowitz apresenta um menor IR que a carteira de diversificação ingênua, logo a carteira ingênua apresenta um desempenho superior ao modelo de otimização para 20 ativos. Vale notar ainda que a carteira de Markowitz obteve um desempenho pior que seu índice de referência enquanto que a ingênua obteve um desempenho acima do seu comparativo (Ibovespa ajustado pelo Beta da carteira).

6 – CONCLUSÃO

A primeira conclusão que se pode tirar pelo estudo em questão é que não existe uma convergência nas ponderações nas carteiras de Markowitz e da Diversificação Ingênua. A comparação dos pesos dos ativos das carteiras de 5 ativos já apresentou ponderações extremamente divergentes, nota-se, à medida que o número dos ativos foi aumentado estas diferenças só foram crescendo principalmente pela possibilidade de poder ficar com alocação negativa nos ativos.

A resolução matemática proposta por Markowitz utilizou largamente da possibilidade de ficar "vendido", e assim, maximizar o retorno esperado e diminuir o risco da carteira. Este mesmo processo foi repetido com 10 e 20 ativos e obteve evidências que a carteira ótima encontrada pelo procedimento de Markowitz não apresenta resultados semelhantes (próximos) nas ponderações com a carteira de diversificação ingênua conforme o número e ativos aumentam, ou seja, as ponderações atribuídas às carteiras não vão se aproximando conforme o número de ativos disponíveis aumenta.

A segunda conclusão que se pode observar é referente ao IS das duas carteiras com os dados fora da amostra. Todas as carteiras construídas neste trabalho ao serem abordadas com dados fora da amostra apresentaram um retorno médio inferior ao ativo livre de risco e por consequência obtiveram IS negativo que não pode ser utilizado para medir desempenho. Assim, conhecendo essa limitação utilizou-se a razão de informação como parâmetro de desempenho utilizando como índice de referência o Ibovespa ajustado ao Beta de cada carteira construída.

Utilizando o IR fora da amostra para 5 ativos a diversificação pelo procedimento de Markowitz apresenta melhor desempenho que a carteira igualmente ponderada. Entretanto ao aumentar o número de ativos disponíveis para 10 a diversificação ingênua obteve desempenho melhor e o resultado se repetiu com 20 ativos. Portanto, de acordo com este estudo há evidências de que a metodologia proposta por Markowitz funciona melhor que a diversificação igualmente ponderada para ações brasileiras quando o número de ativos é pequeno (menor igual a cinco), entretanto conforme o número de ativos cresce a Diversificação Ingênua apresenta melhores resultados. O resultado foi dentro do esperado, pois as conclusões dos dados se assemelham com o estudo de DeMiguel, Galarppi e Uppal (2009).

Frente aos argumentos apresentados, há evidências que com os dados fora da amostra a Diversificação Ingênua apresenta melhores resultados frente a carteira ótima de risco pelo método de Markowitz. Isto implica que em situações reais a carteira igualmente ponderada se sobressai da carteira que revolucionou a teoria moderna de finanças quando o número de ativos é superior a 5 ativos.

7 – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BEST, Michael J., &Grauer, Robert R. 1991. On the Sensitivity of Mean-Variance- Efficient Portfolios to Changes in Asset Means: Some Analytical and Computational Results. The Review of Financial Studies, 4, 315–42.

- BLATT, Sharon. An In-Depth Look at the Information Ratio. Worcester Polytechnic Institute, 2004.

- BODIE, Zvi; KANE, Alex; MARCUS, Alan J. - Investimentos – 10ª edição. São Paulo, editora AMGH – 1 de setembro de 2014

- DEMIGUEL, Victor; GALARPPI, Lorenzo; UPPAL, Austin Raman. Optimal Versus Naive Diversification: How Inefficient is the 1/N Portfolio Strategy? December 3, 2007.

- FARIA, Tácito Augusto; MOURA, Fábio Rodrigues, Carteiras eficientes e ingênuas: uma análise comparativa com o uso do modelo de Markowitz. Revista de Economia Mackenzie,2013

- FREITAS, E. T. Abordagem robusta aplicada ao problema de seleção de portfólio. Monografia. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2009.

- PFLUG, Alois; PICHLER, John; WOZABAL, David. The 1/N investment strategy is optimal under high model ambiguity. Journal of Banking & Finance, 2012, vol. 36, issue 2, pages 410-417

- HARLOW, W. V.; RAO, Ramesh K. S.; Asset Pricing in a Generalized Mean-Lower Partial Moment Framework: Theory and Evidence, The Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 24, No. 3 (Sep., 1989), pp. 285-311

- LEDOIT, Olivier; WOLF, Michael. Honey, I shrunk the sample covariance matrix. The Journal of Portfolio Management, v. 30, n. 4, p. 110-119, 2004.

- MÁLAGA, F. K. Retorno de ações no Brasil - Aplicação do modelo de Fama e French no mercado brasileiro. São Paulo: Saint Paul, 2005.

- MARKOWITZ, Harry M. Portfolio selection. Journal of Finance, vol. 7, no. 1, p. 77-91. Mar, 1952.

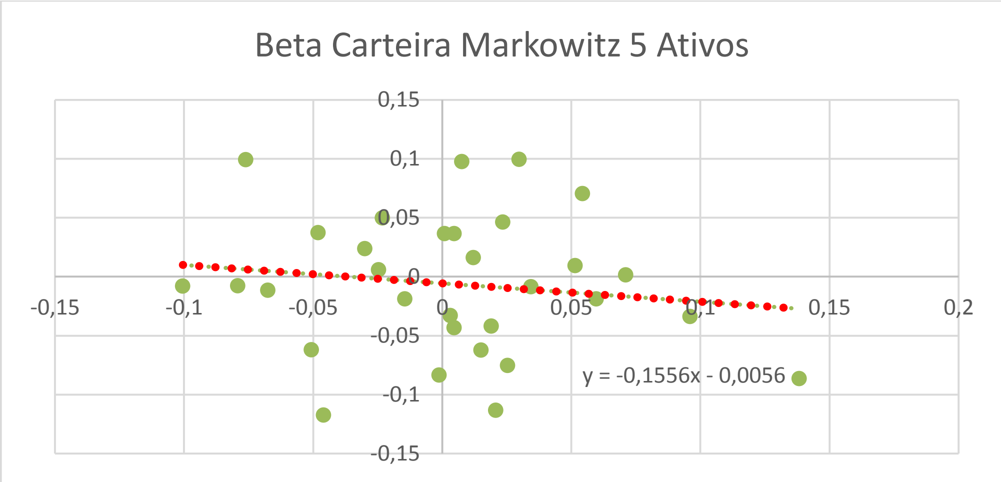
- ROCKAFELLAR, R. Tyrrell; URYASEV, Stanislav; Optimization of Conditional Value-at-Risk, 2006.

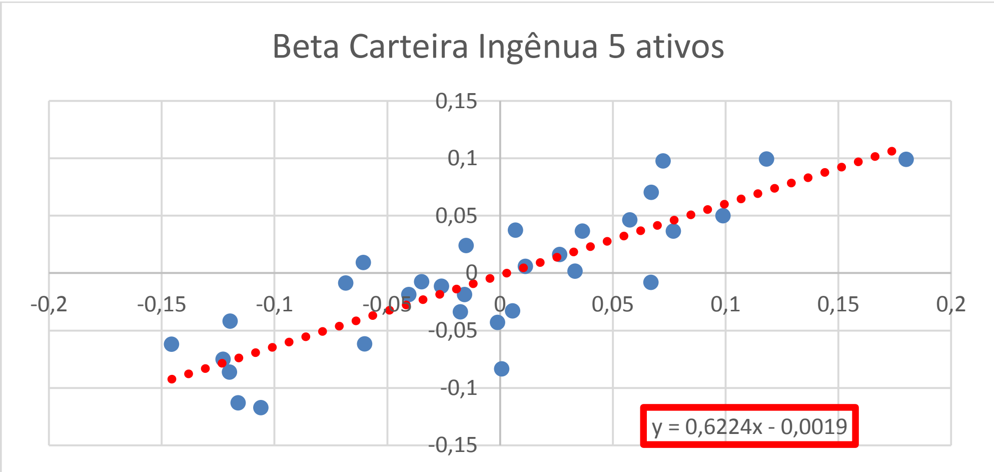
- ROSS, Stephen A., WESTERFIELD, Radolph W. e JAFFE, Jeffrey F. – *Administtração Financeira.* 3ª edição. São Paulo: Editora Atlas S.A., 1995.

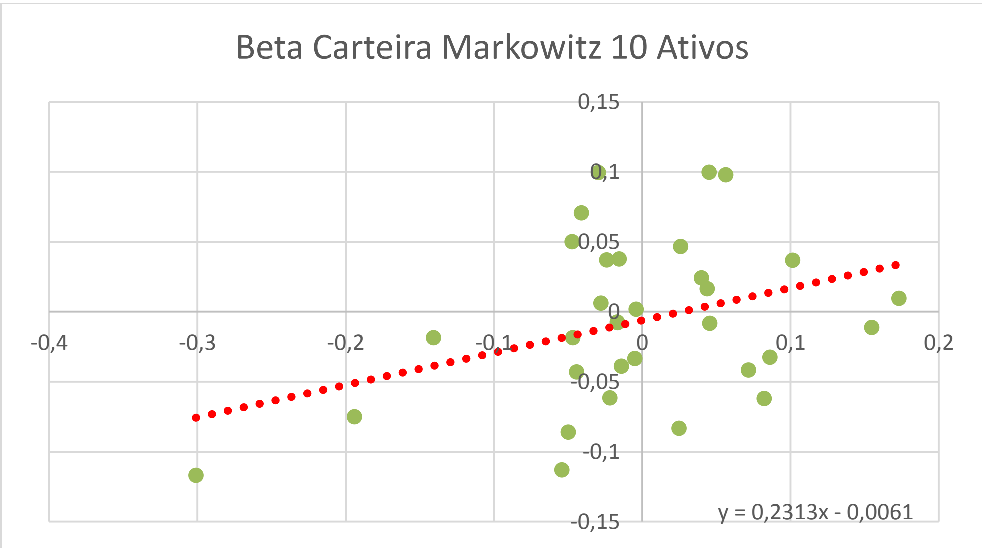
- SANTOS, André Alves Portela; TESSARI, Cristina. Técnicas Quantitativas de Otimização de Carteiras Aplicadas ao Mercado de Ações Brasileiro. Revista Brasileira de Finanças, v. 10, n. 3, 2012.

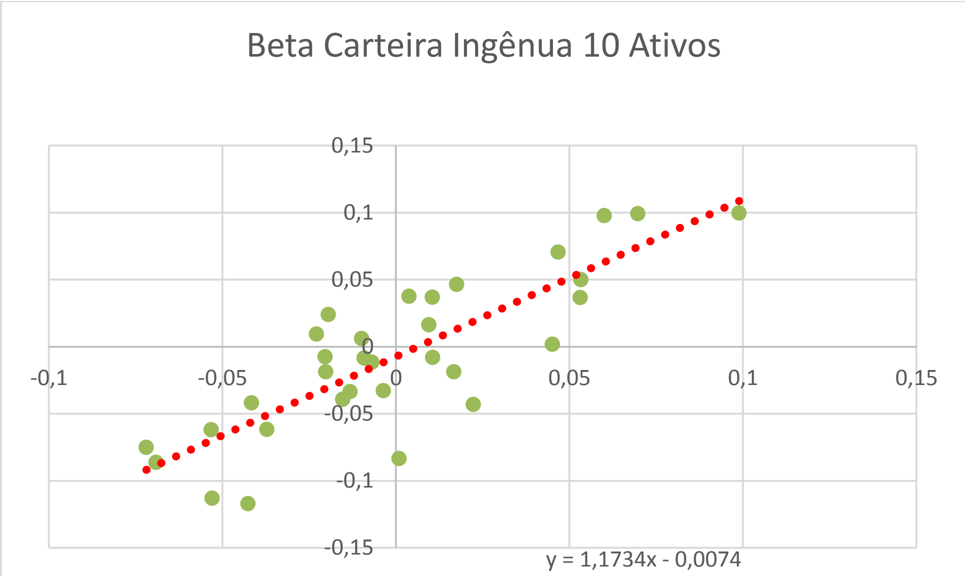
- TU, Jim; ZHOU, Guofu; Markowitz meets Talmud: A combination of sophisticated and naive diversification strategies. Journal of Financial Economics. Singapore Management University, 2011.

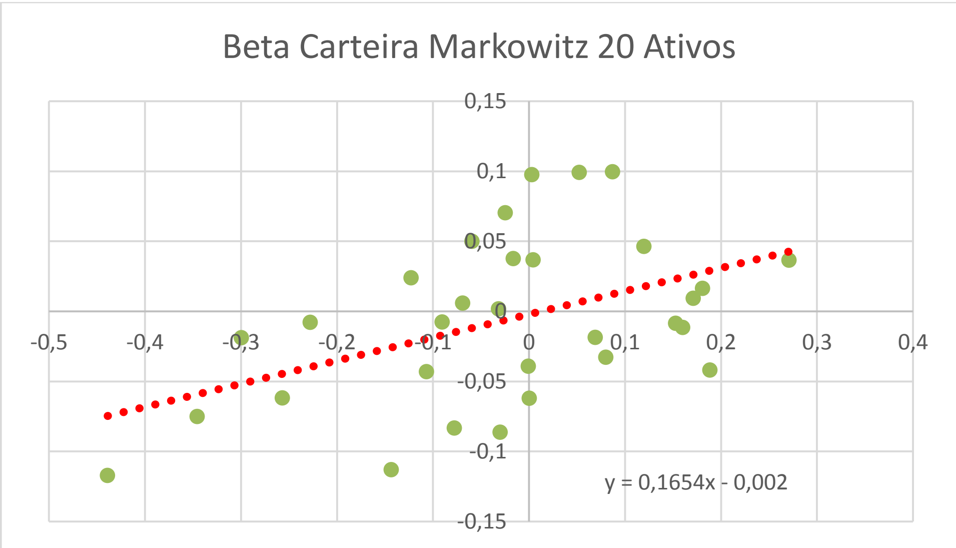
8 – ANEXO

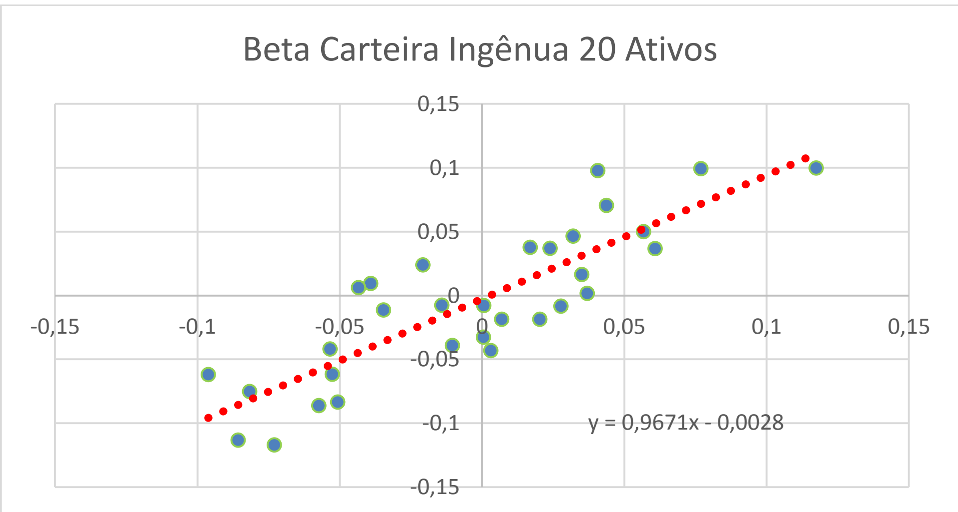

Beta Carteira Markowitz 5 Ativos
0,15
0,1
0,05
0
-0,05
-0,1
-0,15
-0,15
-0,1
-0,05
0
0,05
0,1
0,15
0,2
y = -0,1556x - 0,0056


Beta Carteira Ingênua 5 ativos
0,15
0,1
0,05
0
-0,05
-0,1
-0,15
-0,2
-0,15
-0,1
-0,05
0
0,05
0,1
0,15
0,2
y = 0,6224x - 0,0019


Beta Carteira Markowitz 10 Ativos
0,15
0,1
0,05
0
-0,05
-0,1
-0,15
-0,4
-0,3
-0,2
-0,1
0
0,1
0,2
y = 0,2313x - 0,0061


Beta Carteira Ingênua 10 Ativos
0,15
0,1
0,05
0
-0,05
-0,1
-0,15
-0,1
-0,05
0
0,05
0,1
0,15
y = 1,1734x - 0,0074


Beta Carteira Markowitz 20 Ativos
0,15
0,1
0,05
0
-0,05
-0,1
-0,15
-0,5
-0,4
-0,3
-0,2
-0,1
0
0,1
0,2
0,3
0,4
y = 0,1654x - 0,002


Beta Carteira Ingênua 20 Ativos
0,15
0,1
0,05
0
-0,05
-0,1
-0,15
-0,15
-0,1
-0,05
0
0,05
0,1
0,15
y = 0,9671x - 0,0028