Insper

Mestrado Profissional em Economia

Felipe Junqueira Cesar Pirola

Avaliação do risco de mercado com base nas técnicas de Value at Risk (VaR) e Expected Shortfall (ES)

São Paulo

2022

Felipe Junqueira Cesar Pirola

Avaliação do risco de mercado com base nas técnicas de Value at Risk (VaR) e Expected Shortfall (ES)

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado profissional em Economia do Insper, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre Profissional em Economia na área de Economia dos negócios

Orientador: Prof. Dr. Rinaldo Artes

São Paulo

2022

Pirola, Felipe Junqueira Cesar

Avaliação do risco de mercado com base nas técnicas de Value at Risk (VaR) e Expected Shortfall (ES)

Felipe Junqueira Cesar Pirola – São Paulo, 2022. 43 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Economia) – Insper, 2022.

Orientador(a): Prof. Dr. Rinaldo Artes

1. Risco de Mercado. 2. Value at Risk. 3. Expected Shortfall. I. Pirola, Felipe Junqueira Cesar. II. Título

Felipe Junqueira Cesar Pirola

Avaliação do risco de mercado com base nas técnicas de Value at Risk (VaR) e Expected Shortfall (ES)

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado profissional em Economia do Insper, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre Profissional em Economia na área de economia dos negócios, linha de pesquisa Finanças.

Orientador(a): Prof. Dr. Rinaldo Artes

Banca Examinadora

_____

Prof. Dr. Rinaldo Artes
Insper

_____

Prof. Dr. Adriana Bruscato
Insper

_____

Prof. Dr. Michael Viriato Araújo

Às mulheres da minha vida: Claudia, Marcela, Fernanda e Juliana. Ao meu pai, Eduardo, que um dia nos reencontremos.

Resumo

Value at Risk (VaR) e *Expected Shortfall* (ES) são métodos utilizados para a mensuração do risco de mercado em portfólios de ativos financeiros. Durante o estudo, será observada a propriedade de coerência, que avalia se os quatro axiomas básicos - monotonicidade, invariância sob translações, homogeneidade e subaditividade - são respeitados pelas diferentes metodologias. Conforme amplamente discutido em fóruns econômicos, o VaR calculado pelos métodos tradicionais apresenta algumas limitações principalmente ao não respeitar o axioma da subaditividade, falhando em capturar eventos extremos que se localizam nas caudas das distribuições. Visto isso, em 2012, o Comitê da Basiléia publicou uma revisão dos livros de regras de *trading*, recomendando a substituição do VaR pelo ES como medida de risco. Este trabalho propõe a aplicação e comparação dos resultados destes dois modelos no mercado norte americano e brasileiro. Representando o mercado norte americano, será utilizado o índice S&P 500 e, para o mercado brasileiro, o índice Ibovespa. O estudo utilizará um horizonte de tempo de 20 anos, capturando as principais grandes crises da atualidade e desafiando os modelos a capturarem resultados extremos.

Ao aplicar os modelos no período em questão e realizar testes para validar os resultados obtidos pelos mesmos, o presente estudo conclui que tanto o VaR quanto o ES apresentaram resultados satisfatórios para a amostra e sugere que ambos devem ser utilizados de forma complementar e não excludente.

Palavras-chave: Risco de Mercado. Value at Risk. Expected Shortfall

Abstract

Value at Risk (VaR) and Expected Shortfall (ES) are methods used to measure market risk in portfolios of financial assets. During the study, the coherence property will be observed, which evaluates whether the four basic axioms - monotonicity, invariance under translations, homogeneity and subadditivity - are respected by the different methodologies. As widely discussed in economic forums, the VaR calculated by traditional methods has some limitations, mainly because it does not respect the axiom of subadditivity, failing to capture extreme events that are located in the tails of the distributions. Given this, in 2012, the Basel Committee published a review of trading rulebooks, recommending the replacement of VaR by ES as a risk measure. This work proposes the application and comparison of the results of these two models in the North American and Brazilian markets. Representing the North American market, the S&P 500 index will be used and, for the Brazilian market, the Ibovespa index. The study will use a time horizon of 20 years, capturing the main major crises of today and challenging the models to capture extreme results.

After applying the models in the period in question and executing tests to validate the results obtained by them, the present study concludes that both VaR and ES presented satisfactory results for the sample and suggests that both should be used in a complementary way and not in a exclusionary way.

Keywords: Market Risk. Value at Risk. Expected Shortfall

Sumário Executivo

Os mercados de capitais ao redor do mundo vêm se desenvolvendo e evoluindo de maneira rápida, acompanhando o ritmo cada vez mais acelerado da globalização. De maneira inerente à essa rápida evolução do mercado, as empresas se encontram expostas à riscos cada vez mais complexos e diversificados.

Nos últimos anos, os mercados passaram por períodos de grande volatilidade, como a crise norte-americana de 2008 e a pandemia do novo coronavírus (Covid-19), em 2020. Durante esses períodos de grande incerteza, muitas empresas tiveram seus resultados comprometidos e muitas pessoas perderam tudo que tinham.

Tais acontecimentos trazem luz ao debate relacionado à gestão e mensuração de risco e sua importância para a sociedade e os mercados ao redor do mundo. As empresas precisaram se adaptar à períodos de grande incerteza para tentar, de alguma maneira, proteger seus resultados e, consequentemente, seus acionistas. Como parte de tal adaptação, mundialmente as companhias passaram a ter uma utilização mais intensa e a buscar o aperfeiçoamento de modelos de mensuração de risco.

Partindo desse contexto, esta dissertação abordou a questão da mensuração de risco através do estudo de dois modelos amplamente utilizados no mercado: *Value at Risk* (VaR) e *Expected Shortfall* (ES). Ambos os modelos foram aplicados, através de diferentes metodologias, aos mercados brasileiro e norte americano, representados através dos índices Ibovespa e S&P 500, respectivamente. Além disso, a base de dados é composta por um extenso período que engloba diversos momentos de alta volatilidade na economia de ambos os países, o que permitiu a avaliação dos modelos em fases de estresse.

Vale ressaltar que tanto o VaR quanto o ES são modelos amplamente difundidos e utilizados globalmente. Entretanto, também é de amplo conhecimento que o VaR não é uma medida de risco coerente por não respeitar a propriedade da subaditividade e falhar em capturar eventos extremos, nas caudas das distribuições dos retornos. Visando suprir essa falha do VaR, surgiu o ES: um modelo que respeita os axiomas e suas propriedades, ou seja, é uma medida de risco coerente e observa exclusivamente os eventos nas caudas das distribuições, capturando o que o VaR não consegue.

Após a aplicação dos modelos para o período analisado, foram utilizadas diferentes técnicas de *backtesting*: um processo que permite a validação dos resultados gerados pelos modelos de risco.

Ao analisar os resultados, concluiu-se que ambos os modelos apresentam resultados satisfatórios e análogos ao utilizar diferentes níveis de significância. Além disso, em contraponto à constante discussão de que um modelo possa ser superior ao outro, o presente artigo sugere que ambos devem ser utilizados como ferramentas complementares, visando se obter análises mais enriquecedoras.

Sumário

1 INTRODUÇÃO 10
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA 12
2.1 Definição de Risco 12
2.2 Medidas de Risco 13
2.2.1 Value at Risk (VaR) 14
2.2.2 Expected Shortfall (ES) 16
2.2.3 Value at Risk (VaR) vs Expected Shortfall (ES) 17
2.2.4 Modelos para cálculo do Value at Risk (VaR) e do Expected Shortfall (ES) ... 19
2.2.4.1 Modelo Histórico 19
2.2.4.2 Modelo Gaussiano 20
2.2.4.3 Modelo Cornish-Fisher 20
2.2.4.4 Modelo Johnson 22
3 DESENVOLVIMENTO DA METODOLOGIA 24
3.1 Detalhamento dos Dados 24
3.2 Detalhamento do Estudo 25
3.3 Backtesting 26
3.3.1 *Basel Traffic Light Test* 26
3.3.2 Teste de Kupiec 28
3.3.3 Teste de Christoffersen 29
3.3.4 Teste de McNeil e Frey 30
4 ANÁLISE DOS RESULTADOS 31
4.1 Descrição dos Dados 31
4.2 Resultados das estimações de VaR e ES 33
4.2.1 Amostra completa 33
4.2.2 Amostra parcial – excluindo períodos de crise 34
4.3 Backtesting 36
5 CONCLUSÃO 37
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 39

1 Introdução

Atualmente, apesar da sociedade moderna já ter passado por algumas surpresas e crises financeiras ao longo de sua história, os holofotes têm se voltado, novamente, à volatilidade da precificação de ativos, sejam estes financeiros, ou não (Sampath, 2022).

Nos últimos três anos, o mundo tem vivido situações, sob alguns aspectos, sem precedentes. A pandemia causada pelo vírus COVID-19 veio sem aviso prévio e matou quase seis milhões de pessoas ao redor do mundo. Devido à pandemia, o mercado de commodities, que é um grande movimentador do mercado como um todo, disparou devido às crises energéticas na China (Disis, 2021), fronteiras fechadas em boa parte do mundo (muitos imigrantes trabalham nos campos de extração ou manipulação de commodities) e consequente escassez de oferta. Por fim, além de tudo que já foi abordado, estamos vivendo um conflito entre Rússia e Ucrânia por motivos geopolíticos. Ambos os países são de extrema relevância para a economia global, dado que são grandes produtores e exportadores de insumos, principalmente, no que tange as commodities. No caso dos russos, as energéticas e, no caso dos ucranianos, as agrícolas (Malar e Elias, 2022).

Todas as situações descritas acima, além de muitas outras, causam um grande impacto no mercado global. Em março de 2020, logo após a *World Health Organization* declarar, oficialmente, que o COVID-19 se tratava de uma pandemia global, o mercado de ações dos EUA acionou o *circuit breaker* quatro vezes em 10 dias. Desde sua implementação, em 1987, este mecanismo de segurança só havia sido acionado anteriormente em 1997. Acompanhando o mercado norte americano, as bolsas da Europa e Ásia também despencaram, apresentando seus piores resultados em décadas. Apesar da imediata resposta dos bancos centrais e demais autoridades ao redor do mundo através de políticas monetárias, como reduções nas taxas de juro e injeções de capital nas economias através da compra de títulos públicos e privados, a incerteza era tamanha que o mercado demorou a reagir. Além disso, a implementação de políticas monetárias não convencionais acaba aumentando o grau de incerteza e a probabilidade de problemas no longo prazo (Zhang, Hu, Ji, 2020).

Fica evidente, portanto, a essencialidade da existência, eficácia e correta aplicação de ferramentas de gestão de risco com o objetivo de se mensurar e tomar atitudes para se mitigar possíveis perdas. Com isso, possivelmente, a sociedade enfrentaria as grandes crises de uma forma mais dimensionada.

Tendo isto em mente, este trabalho visa estudar a aplicação de duas metodologias de mensuração de risco, e compará-las, no principal índice do mercado norte americano e

brasileiro (S&P 500 e Ibovespa, respectivamente): *Value at Risk* (VaR) e *Expected Shortfall* (ES). O VaR tem sido o indicador de risco padrão do mercado financeiro desde meados dos anos 90 e, consequentemente, tem uma vasta literatura dedicada ao modelo. Jorion (2007) define o VaR como a pior perda em um horizonte de tempo definido que não será excedida dado um nível de confiança. Ainda segundo Jorion (2007), de maneira mais formal, o VaR apresenta o quantil da distribuição projetada de ganhos e perdas ao longo do horizonte temporal definido. Quanto ao ES, sua utilização foi proposta por Artzener, Delbaen, Eber e Heath, 1997. Os autores definem o ES como a medida do quanto se pode perder, em média, além do que foi estimado pelo VaR. Devido à algumas limitações do VaR, que serão abordadas ao decorrer deste estudo, em 2012, o *Basel Committee* reavaliou o uso do mesmo e publicou uma alteração no livro de regras de *trading* com o objetivo de substituir o VaR pelo ES. (BCBS, 2013).

Em suma, ambos os métodos são relevantes para as análises e amplamente utilizados pelo mercado. Ainda, no que tange ao período a ser estudado, devido às crises anteriores, como a de 2008, e aos recentes acontecimentos, a base de dados é composta pelos fechamentos diários do S&P 500 por vinte anos, ou seja, de 01/01/2002 a 31/01/2022, totalizando 5.055 observações. Vale ressaltar que o S&P 500 é utilizado por se tratar do principal índice do mercado norte americano, reunindo as quinhentas maiores empresas e representando, assim, 80% do valor total da bolsa dos EUA. Em relação ao mercado brasileiro, são utilizados os retornos diários do índice Ibovespa pelo mesmo horizonte de tempo, totalizando 4.972 observações.

Por fim, o presente estudo, além de aplicar e comparar a eficácia dos modelos VaR e ES através da utilização de diferentes metodologias, analisa o comportamento dos modelos durante períodos de crise e em períodos sem crise.

2 Revisão Bibliográfica

2.1 Definição de Risco

Gambiagi e Tavares (2018) definem risco de maneira conceitual como o nível de incerteza sobre o futuro. No ambiente financeiro, o termo risco é interpretado como a possibilidade de acontecerem eventos futuros que possam impactar as condições financeiras de determinada empresa. Ainda, neste mesmo ambiente de finanças, existem quatro tipos de risco que se destacam: risco de mercado, risco de liquidez, risco de crédito e risco operacional. Este estudo visa explorar e avaliar o risco de mercado.

Jorion (2007) define o risco de mercado como o risco decorrente de mudanças nos preços dos ativos e passivos de uma organização. Este risco está associado a flutuações nas taxas de juros, taxas de câmbio, commodities, preços de ações, opções, derivativos e outras variáveis que podem afetar os ativos e passivos de qualquer investidor. Existem também dois tipos de risco de mercado: risco absoluto e risco relativo. O risco de mercado absoluto é o valor da perda monetária potencial em moeda local; o risco de mercado relativo é o valor em risco em relação a um índice de referência. Existem muitas alternativas para se mensurar o risco de mercado. Como exemplos, podem ser citados o cálculo do beta de ações, *duration* para títulos de renda fixa, as regras delta e gama para opções, dentre outras técnicas (Danielsson, 2011). Todas são amplamente reconhecidas e utilizadas em relatórios de risco, tanto por investidores individuais, bem como por instituições financeiras e não financeiras. A medida do VaR continua sendo a de maior presença e aceitação entre a comparabilidade e mensuração de diferentes tipos de risco (Roccioletti, 2016).

Saunders (2000), apresenta 5 motivos, dentre outros, para explicitar a relevância da mensuração de risco:

i. Informação gerencial: a gestão de determinada instituição se torna consciente dos riscos tomados por seus agentes, assim como a dimensão dos mesmos. Isso possibilita com que os gestores façam uma comparação entre a posição exposta ao risco e o valor total da companhia;

ii. Fixação de limites: ao saber o risco de mercado existente nas carteiras dos agentes, pode-se estabelecer limites economicamente válidos de posição por agente;

iii. Alocação de recursos: identificação de áreas com maior potencial de retorno ao se comparar resultados com riscos de mercado, possibilitando uma melhor alocação de recursos dentro de determinada organização;

iv. Avaliação de desempenho: implementação de política de bonificação ao se comparar risco e retorno dos agentes;

v. Regulamentação: exigência de capital a partir da métrica do VaR para regulamentar o risco de mercado. Ação proposta pelo BIS (*Bank for International Settlements*).

Em suma, sob a perspectiva de um gestor de portfólio ou investidor autônomo, é de extrema relevância ter conhecimento dos diversos tipos de risco e do mercado no qual se está inserido, operando. Devido ao fato de, simplesmente, conhecer os tipos de risco e quais são inerentes à operação, diversas atitudes e ferramentas podem ser adotadas visando, em um primeiro momento, mensurar o risco e, posteriormente, mitigar o mesmo.

2.2 Medidas de Risco

Nos últimos anos, o mercado vem apresentando elevada volatilidade devido a diversos acontecimentos macroeconômicos e geopolíticos, experimentando turbulências internacionais que vieram junto com perdas sofridas por muitas instituições, o que têm mostrado a necessidade crescente das instituições conseguirem prever a dimensão do seu risco, visando mitigar ou evitar perdas financeiras e, até mesmo, conhecer o nível de probabilidade aceitável de perda de valores em certos períodos de tempo (Oliveira e Pinheiro, 2018). Ou seja, o conhecimento prévio e acurado do risco existente é algo fundamental na gestão de ativos.

Ao longo dos anos, a análise e mensuração de riscos vem evoluindo muito, tanto no campo teórico quanto metodológico, influenciadas pelas grandes crises financeiras na história mais recente (Lima, 2018). Dada essa situação, surgiu a necessidade da existência de metodologias que avaliassem o risco associado aos ativos financeiros, dentre as ferramentas já disponíveis e amplamente utilizadas pelo mercado, estão o *Value at Risk* (VaR) e o *Expected Shortfall* (ES).

Harmantzis, Miao e Chien (2005), realizaram um estudo para comparar o desempenho de diferentes modelos na estimativa de VaR e ES utilizando dados históricos dos retornos diários de alguns índices populares por mais de dez anos com três tamanhos de janela e dois níveis de confiança. Concluíram que para estimativas de VaR os modelos de caudas pesadas

podem prever o risco com maior precisão e para estimativas de ES o método histórico fornece estimativas mais coerentes.

Gameiro (2017) analisa a aplicação, em séries financeiras, das diferentes formas de implementação do VaR e do ES ao índice PSI20 (*Portuguese Stock Index*), recorrendo aos modelos paramétricos e não paramétricos. Para a série financeira estudada, a autora também concluiu que a melhor performance na previsão de risco foi apresentada pelo método ES.

Lazara, Pan e Wang (2022) aplicam ambos os modelos a índices futuros do petróleo em períodos de crise, utilizando níveis de significância extremos, o que é crucial para capturar as perdas em desacelerações de mercado, mas um desfio para os modelos existentes. Os resultados obtidos foram satisfatórios para ambos os modelos.

Hallin e Trucíos (2021) realizaram um estudo de estimação de risco em grandes portfolios através da aplicação do VaR e do ES utilizando dois métodos. Os autores utilizaram como base de dados o retorno de algumas ações que compõem os índices S&P 500, NASDAQ-100 (*National Association of Securities Dealers Automated Quotations 100)* e AMEX (*NYSE Amex Composite).* Concluem que tanto o VaR quanto o ES, através dos métodos utilizados, apresentaram resultados satisfatórios e tiveram uma performance melhor quando comparados a métodos mais clássicos.

2.2.1 Value at Risk (VaR)

Atualmente, um dos métodos mais utilizados para mensuração e controle de riscos é o *Value at Risk* (VaR) que é uma medida estatística que indica possíveis perdas de um determinado portfólio ou ativo financeiro. Em termos específicos, o VaR é uma medida de perdas por movimentos “normais” de mercado, ou seja, risco de mercado (Linsmeier e Pearson, 1996).

Holton (2002) destaca que, apesar de ter suas origens ao redor da década de vinte, o modelo VaR passou a ser amplamente utilizado nos anos noventa e fornece, como resultado, um valor monetário de perda em uma determinada carteira de ativos em um horizonte temporal pré-estabelecido e dado um nível de confiança. O conceito do VaR é fácil de entender, uma vez superada a barreira do uso de uma medida estatística, é, simplesmente, uma maneira de descrever a magnitude das perdas prováveis em uma determinada carteira de investimentos ou ativos em um determinado período.

Matematicamente, segundo Yamai e Yoshiba (2004), o VaR no nível de confiança de $100(1-\alpha)\%$ é definido como o percentil 100α superior da distribuição de perdas, ainda supondo que X seja uma variável aleatória que denota a perda de uma carteira, o VaR pode ser definido por:

$$VaR_{\alpha}(X) = sup\{x|P[X \geq x] > \alpha\} \tag{1}$$

onde $sup\{x|A\}$ é o limite superior de x dado o evento A e $sup\{x|P[X \geq x] > \alpha\}$ indica o percentil 100α superior da distribuição de perdas.

Globalmente, é de comum acordo entre os agentes do mercado financeiro que o VaR é o modelo mais utilizado para mensuração de risco (Brio, Valencia e Perote, 2020). Jorion (2007) apresenta alguns motivos para a popularização do modelo:

i. Cálculo simples;
ii. Mesmo analisando um portfólio composto por diversos ativos, fornece um único valor como medida de risco ao considerar a correlação entre os ativos, o grau de alavancagem do portfólio e as posições em cada ativo;
iii. Aceito pelos órgãos reguladores como modelo de risco de mercado;
iv. Favorece a globalização dos mercados financeiros dado que é de fácil aplicação à portfólios com fatores de risco variados.

O mesmo autor apresenta duas metodologias para se calcular o VaR:

i. Paramétrica Normal: assume-se que os retornos de determinado portfólio de ações seguem uma distribuição Normal e apresenta como resultado a pior perda esperada utilizando um horizonte temporal e um intervalo de confiança. Basicamente, chega-se ao resultado através da multiplicação do desvio padrão dos retornos pelo fator associado ao intervalo de confiança que foi estabelecido;
ii. Simulação Histórica: não se assume nenhuma hipótese sobre a distribuição da amostra. A mensuração do risco é realizada através da leitura direta do quantil da distribuição empírica.

Contudo, o VaR pode ter algumas falhas baseadas em suas premissas, principalmente a de que o retorno dos ativos segue uma distribuição normal no caso da metodologia VaR Paramétrico Normal. No caso da metodologia Simulação Histórica, a mesma poderia ser utilizada para qualquer classe de ativo, no entanto ela assume que os retornos dos ativos são independentes e distribuídos de maneira idêntica, o que não acontece na grande maioria das situações. Além disso, essa metodologia também utiliza o mesmo peso para todos os retornos

da amostra, o que acaba aumentando a possibilidade de não se ter uma previsibilidade correta de eventos não capturados no histórico utilizado (Jorion, 2007; Alexander, 2008 e Hull, 2005).

Taleb (2007, 2011) defende que, ao invés de adotar um modelo que utiliza hipóteses pré-definidas para mensurar o risco de um portfólio, como no caso do VaR, seria melhor fazê-lo através da observação de vários cenários de crise sem realizar a associação de probabilidades aos eventos até determinado momento em que fosse possível avaliar, com maior confiança, a probabilidade de ocorrência de eventos extremos. O autor chega a afirmar que o modelo do VaR proposto por Jorion é perigoso justamente por causa de suas hipóteses simplificadoras e que não deveria ser utilizado como uma ferramenta confiável para se mensurar risco.

2.2.2 Expected Shortfall (ES)

Expected Shortfall (ES) é um método para medição de risco financeiro que surgiu para lidar com as limitações apresentadas pelo VaR. O uso dessa metodologia foi proposto por Artzer *et al.* (1999). O ES representa o valor da perda esperada diante da violação do VaR, ou seja, quando as perdas superam o VaR, sendo uma medida mais sensível à cauda da distribuição de perdas.

O ES pode também ser referido como Conditional Value At Risk (CVaR), Tail Value at Risk (TVaR), Average Value At Risk (AVar) ou Expected Tail Loss (ETL), e é calculado pela média de todos os retornos na distribuição piores que o VaR da carteira a um determinado nível de confiança, ou seja, para um nível de confiança de 99%, o ES seria a perda média nos 1% dos casos em que os retornos excedem o VaR.

Segundo Hull (2018), O ES, assim como o VaR, é uma função de dois parâmetros, o horizonte de tempo (T) e o nível de confiança (α), e para calcular ES é necessário calcular o VaR previamente. O ES é a perda esperada no horizonte de tempo T condicionada a perda ser superior ao VaR.

Supondo que X seja uma variável aleatória que denota a perda de uma carteira e $VaR_\alpha(X)$ é o VaR no $100(1-\alpha)\%$ de nível de confiança, o Expected Shortfall pode ser definido, segundo Yamai e Yoshiba (2002) pela equação:

$$ES_\alpha(X) = E[X|X \geq VaR_\alpha(X)] \tag{2}$$

Apesar do ES ser uma metodologia que surgiu por conta das limitações do VaR, que serão abordadas na próxima seção, ainda é menos usada que o VaR.

Além disso, é mais difícil de testar as estimativas do ES do que para o VaR (Hull, 2018). Segundo Roccioletti (2016) o ES não é uma medida elegível, diferente do VaR, dado que esta característica se relaciona com um modelo de seleção e não com um modelo de teste, onde a ausência dessa característica pode trazer dificuldades no backtesting.

2.2.3 Value at Risk (VaR) vs Expected Shortfall (ES)

Artzer *et al.* (1999) apresenta quatro propriedades que as medidas de risco devem apresentar para serem consideradas coerentes e possam ser utilizadas.

Primeiramente a monotonicidade que é direta e diz que se uma carteira tende a gerar um resultado pior que outra carteira, sua medida de risco deve ser maior, exigindo mais capital por ser vista como mais arriscada. Em seguida, a propriedade de invariância por translação diz que se adicionarmos uma quantia em dinheiro (X) a uma carteira, sua medida de risco deve diminuir a exigência de capital em X. A terceira propriedade de homogeneidade diz que se dobrarmos o tamanho de uma carteira, mantendo as quantidades relativas dos ativos iguais, deveríamos exigir o dobro de capital. Por último, a propriedade de subaditividade mostra que a diversificação ajuda na redução de riscos, onde ao agregar duas carteiras, a medida de risco total deve diminuir ou permanecer da mesma forma.

Com base nessas propriedades necessárias para uma medida de risco ser considerada coerente, o uso do VaR foi criticado por atender apenas três propriedades, sendo elas a de monotonicidade, homogeneidade e invariância por translações. Diante disso, Artzer *et al.* (1999), Acerbi e Tasche (2002) e Yamai e Yoshiba (2002) abordaram em seus estudos a falta de coerência do VaR apresentando alternativas que atendam todas as propriedades, sendo a ES a medida de risco coerente com maior destaque.

A subaditividade é a propriedade que distingue as medidas de risco VaR e ES, dado que a ES satisfaz as quatro propriedades em qualquer situação, podendo ser aplicado a qualquer instrumento e a qualquer fonte de risco subjacente, produzindo uma avaliação global única para carteiras expostas a diferentes fontes de risco (Acerbi e Tasche, 2002).

De acordo com Acerbi e Tasche (2002), a propriedade de subaditividade expressa o fato de uma carteira composta por subcarteiras ter um valor exposto ao risco que é, no máximo, a soma dos montantes separados arriscados pelas subcarteiras. Essa propriedade captura como

uma medida de risco deve se comportar em relação às carteiras, verificando se uma medição de risco de uma carteira é consistente com as outras. Para uma medida subaditiva, a diversificação de portfólio sempre leva à redução de risco, enquanto para medidas que violam essa propriedade, a diversificação pode produzir um aumento em seu valor mesmo quando riscos parciais são desencadeados por eventos mutuamente exclusivos (Acerbi *et al.*, 2001).

Ainda, Acerbi e Tasche (2002), destacam que a propriedade de subaditividade além de ser essencial na solução de problemas de otimização de carteiras, é necessária aos requisitos de adequação de capital exigidos pelos reguladores, ou seja, a ausência dessa propriedade acaba tornando o VaR uma medida de risco ariscada.

Segundo Yamai e Yoshiba (2002), que realizaram seu estudo sobre o comportamento do VaR e do ES em momentos de crise, mais especificamente a crise financeira asiática de 1998, quando a distribuição da perda não segue uma normal, o VaR desconsidera a perda além do nível de VaR deixando de ser subaditivo, já, como dito anteriormente e ressaltado pelos autores, o ES considera a perda além do nível de VaR mostrando ser subaditivo.

Dowd (2005) afirma que o ES tem muito dos usos que o VaR possui, no entanto o ES é uma medida de risco melhor que o VaR por diversos motivos, dominando facilmente o VaR como medida de risco. Como já apresentado por outros autores, O ES é considerada uma medida coerente, possuindo vários atrativos da subaditividade que o VaR não possui, a subaditividade de ES implica na convexidade da superfície de risco do portfólio, garantindo que os problemas de otimização de portfólio usando medidas de ES sempre terão um ótimo comportamento e serão tratados de forma eficiente usando técnicas de programação linear, diferente daquelas que usam medidas de VaR. Além disso, segundo Dowd (2005), o ES nos diz o que esperar em estados ruis, ou seja, traz uma ideia do quão ruim pode ser, enquanto o VaR não nos diz nada além de esperar uma perda maior do que o próprio VaR.

Mesmo diante de tantas vantagens, a substituição da metodologia de VaR por ES em 2012, foi uma das principias alterações promovidas pelo Comitê de Supervisão Bancária da Basileia após a crise de 2008 que identificaram várias fraquezas no uso do VaR para determinar os requisitos de capital regulatório, incluindo a incapacidade de capturar o risco da cauda, sendo que o ES contabiliza o risco de cauda de forma mais abrangente, considerando tanto o tamanho quanto a probabilidade de perdas acima de um certo limite (BCBS, 2013).

Seguindo a preocupação do Comitê de Basileia com os resultados da cauda, Chang *et al.* (2016) propuseram uma comparação robusta entre ES e VaR para funções de perda específicas, sugerindo que os reguladores devessem ponderar as vantagens de passar do VaR

para o ES em termos de fornecer uma medida de risco mais estável, mostrando que o ES não induziria os investidores em erro.

A vantagem do ES que todos esses autores mostraram é por ser coerente independentemente da distribuição implícita, podendo ser estimado mesmo quando os estimadores de VaR falharem.

2.2.4 Modelos para cálculo do Value at Risk (VaR) e do Expected Shortfall (ES)

Além das metodologias apresentadas anteriormente, existem outras que não consideram que os retornos seguem uma distribuição normal, o que pode se aproximar mais da realidade de alguns investimentos. Nestes casos, conforme apresentado por Johnson (1949), os modelos precisam ser ajustados de acordo com a distribuição a ser estudada. Alguns desses modelos serão abordados a seguir:

2.2.4.1 Modelo Histórico

Para o modelo em questão, é utilizada a distribuição dos retornos para se calcular os percentis. Além disso, os retornos são colocados em ordem crescente e o percentil desejado é calculado de maneira aproximada. Harmantzis, Miao e Chien (2005) definem, matematicamente, o VaR histórico por:

$$VaR_{\alpha,t} = F_t^{-1}(\alpha) \tag{3}$$

$$F_t^{-1}(\alpha) = X_{t(i)}, \qquad \alpha \in \left(\frac{i-1}{t}, \frac{i}{t}\right) \tag{4}$$

onde $X_{t(1)} \leq X_{t(2)} \leq \cdots \leq X_{t(t)}$ representam os retornos ordenados, F_t^{-1} representa a função inversa da distribuição cumulativa empírica no tempo t e nível de confiança α.

Uma vez calculado o VaR e, consequentemente, com um resultado absoluto em mãos, define-se o ES como:

$$ES = E(X|X > VaR) = \left(\frac{\sum_{i=[t\alpha]}^{t} X_{t(i)}}{t - [t\alpha]}\right) \tag{5}$$

2.2.4.2 Modelo Gaussiano

Segundo Harmantzis, Miao e Chien (2005), dada uma amostra X_i, $i = 1, \dots, t$, i.i.d., com $N(\mu, \sigma^2)$ sendo μ e σ desconhecidos, o Value at Risk no modelo Gaussiano a um nível de confiança α, e assumindo $\mu = 0$ é dado por $\mu + z_\alpha \sigma$, onde z_α é tal que $P(Z > z_\alpha) = \alpha$, com $Z \sim N(0,1)$. Resta, então, estimar o parâmetro σ:

$$\hat{\sigma}_t^2 = \frac{1}{t-1} \sum_{i=1}^{t} (X_i - M)^2 \tag{6}$$

sendo $M := \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{t} X_i$ a média dos retornos observados.

Já o ES, no modelo Gaussiano, é dado por:

$$ES = E(X|X > VaR) = E(X|X > Z_\alpha \sigma_t) \tag{7}$$

onde $Z_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$ representa o α quantil da distribuição Normal Padrão e Φ é a função de distribuição acumulada da Normal Padrão.

2.2.4.3 Modelo Cornish-Fisher

O Modelo Cornish-Fisher (Cornish e Fisher, 1937), também chamado de VaR Modificado, é uma abordagem alternativa para calcular o VaR. Se o retorno de uma carteira não for distribuído de forma Gaussiana, então o método clássico de VaR, o Gaussiano, não será uma medida eficiente de risco. Nesse caso, pode-se utilizar o método Cornish-Fisher para adequar a distribuição dos retornos pelo fato de a medida de risco ser mais precisa quando os retornos estão próximos da distribuição Gaussiana (Aktas e Sjöstrand, 2011)

De acordo com Alexander (2008), o Modelo Cornish-Fisher é uma técnica semi-paramétrica que estima quantis de distribuições não normais em função de quantis normais padrão, assimetria e excesso de curtose da amostra.

A aproximação Cornish-Fisher $\tilde{x}_\alpha$ para o quantil α de uma distribuição empírica com média 0 e variância 1, segundo Alexander (2008), é dada por:

$$\tilde{x}_\alpha \approx z_\alpha + \frac{\hat{\tau}}{6}(z_\alpha^2 - 1) + \frac{\hat{\varkappa}}{24} z_\alpha (z_\alpha^2 - 3) - \frac{\hat{\tau}^2}{36} z_\alpha (2z_\alpha^2 - 5) + \cdots \tag{8}$$

sendo $z_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$ o quantil α de uma distribuição normal padrão, $\hat{\tau}$ o coeficiente de assimetria e $\hat{\varkappa}$ o coeficiente de excesso de curtose. Ainda, segundo Dowd (2005), se tratarmos os termos de ordem superior como insignificantes, teríamos a aproximação Cornish-Fisher de quarta ordem dada por:

$$\tilde{x}_\alpha \approx z_\alpha + \frac{\hat{\tau}}{6}(z_\alpha^2 - 1) + \frac{\hat{\varkappa}}{24} z_\alpha (z_\alpha^2 - 3) - \frac{\hat{\tau}^2}{36} z_\alpha (2z_\alpha^2 - 5) \tag{9}$$

Pressupondo que os log-retornos da carteira são normalmente distribuídos, o VaR pode ser calculado através do modelo paramétrico, conforme descrito na Seção 2.2.4.2.

Já, para calcular o VaR através da metodologia de Cornish-Fisher, utiliza-se a seguinte equação:

$$VaR_{CF} = \tilde{x}_\alpha \hat{\sigma} + \hat{\mu} \tag{10}$$

Em relação ao ES, dado que não existe uma fórmula definida para essa metodologia, Dowd (2005) propôs uma metodologia simples e fácil de ser aplicada, calculando primeiramente o valor de $1 - VaR$ e dividir o intervalo $[p, 1.0]$ em m partes iguais onde, p representa o nível de confiança para se calcular o VaR, obtendo-se m valores discretos. Então, utilizando a equação (10), calcula-se o VaR para cada valor de $p + m$ e, o ES é obtido através da média dos valores calculados do VaR.

Quando os retornos possuem assimetria positiva ou são leptocúrticos, a estimativa da perda será menor que o VaR tradicional. Por outro lado, quando os retornos possuem assimetria negativa ou são leptocúrticos, o VaR pelo método de Cornish-Fisher dará uma estimativa de perda maior do que o VaR tradicional. (Aktas e Sjöstrand, 2011).

Enquanto as medidas históricas não desviam dos retornos observados dado que se baseia em retornos históricos, o modelo Cornish-Fisher tenta estimar a forma da cauda para os retornos, mesmo que os retornos não tenham sido observados ainda. No entanto, segundo Aktas e Sjöstrand (2011), quando se trata de produtos com estruturas complexas, o modelo Cornish-Fisher pode apresentar limitações, não sendo uma boa estimativa de risco.

2.2.4.4 Modelo Johnson

Especificamente, para se usar o modelo de Johnson para calcular o VaR e o ES, é necessário, em um primeiro momento, compreender a transformação das variáveis inerentes ao mesmo, conforme proposto, inicialmente, por Johnson (1949). O objetivo do tratamento das variáveis é transformá-las, partindo de uma distribuição aproximadamente normal, em uma Normal Padrão.

De acordo com Simonato (2011), o método de Johnson segue a seguinte equação:

$$y = a + b \times g\left(\frac{z - c}{d}\right) \tag{11}$$

onde a e b são parâmetros de forma, c é o parâmetro de localização e d é o de escala; y é a variável transformada e z a original; $g(.)$ é a função definida para uma das quatro famílias de distribuição:

$$g(u) = \left\{ \begin{array}{ll} \ln(u), & \text{para log} - \text{normal} \\ \ln\left(u + \sqrt{u^2 + 1}\right), & \text{para } unbounded \\ \ln\left(\frac{u}{1 - u}\right), & \text{para } bounded \\ u, & \text{para } normal \end{array} \right\} \tag{12}$$

sendo que, distribuições *unbounded* são as que, teoricamente, se estendem de menos infinito a mais infinito, como a Logística ou de Valores Extremos. Distribuições *bounded* são as que apresentam algum limite em ambas as extremidades.

Hill, Hill e Holder (1976) propuseram um algoritmo que utiliza os quatro primeiros momentos da distribuição objetivo para se calcular os parâmetros.

De acordo com Simonato (2011), em um primeiro momento, deve-se calcular a função do quantil para que seja possível, posteriormente, calcular o VaR. A função é definida como:

$$\Phi_J^{-1}(p; a, b, c, d) = c + d \times g^{-1}\left(\frac{\Phi_N^{-1} - a}{b}\right) \tag{13}$$

Então, o VaR pode ser calculado através da equação:

$$VaR_J = \alpha_h + \sigma_h \times \Phi_J^{-1}(p; a, b, c, d) \tag{14}$$

Quanto ao ES, se faz necessário o cálculo da equação da esperança parcial condicional:

$$EP_J[z|z < k_J] = \int_{-\infty}^{K} \left(c + d \times g^{-1}\left(\frac{y - a}{b}\right)\right) f_N(y)dy \tag{15}$$

em que $K = a + b \times g\left(\frac{k_J}{d}\right)$ e $k_J = (VaR_J - \alpha_h)/\sigma_h$

Simonato (2011) propõe as seguintes soluções para os casos de distribuições dos retornos log-normal, *unbounded* e normal:

- Log-Normal:

$$c \times \phi_N(K) + d \times e^{\frac{1}{2b^2} - \frac{a}{b}} \times \phi_N\left(K - \frac{1}{b}\right) \tag{16}$$

- Normal:

$$\phi_N(K) \times \left[c - \frac{d \times a}{b}\right] - \frac{d}{b} \times f_N(K) \tag{17}$$

- *Unbounded:*

$$c \times \phi_N(K) + \frac{d}{2} e^{-\frac{a}{b} + \frac{1}{2b^2}} \times \phi_N\left(K - \frac{1}{b}\right) - \frac{d}{2} e^{\frac{a}{b} + \frac{1}{2b^2}} \times \phi_N\left(K - \frac{1}{b}\right) \tag{18}$$

sendo *a*, *b* e *c* parâmetros previamente descritos na equação 11.

Em relação aos casos do tipo *bounded*, como não existe uma fórmula analítica fechada para esse caso, se faz necessário a realização de uma integração numérica da equação 15.

O ES para o método de Johnson é dado por:

$$ES_J = \alpha_h + \sigma_h \times \frac{EP_J[z|z < k_J]}{p} \tag{19}$$

3 Desenvolvimento da Metodologia

Nesta seção serão apresentados os dados, assim como os modelos de backtesting utilizados para avaliar os resultados.

3.1 Detalhamento dos Dados

Os dados utilizados no trabalho corroboram com o objetivo de avaliar os modelos de VaR e ES tanto em períodos com baixa volatilidade e que não possuem *outliers*, quanto em períodos atípicos onde nota-se um aumento da volatilidade no mercado.

Com a ajuda do sistema Economática, foi possível a coleta do índice financeiro Standard & Poor's 500 (S&P 500) considerado o principal indicador do mercado de ações norte-americano criado em 1957. Esse índice é composto por quinhentas empresas líderes negociadas na bolsa de valores de Nova Iorque (NYSE – The New York Stock Exchange) ou NASDAQ (National Association of Securities Dealers Automated Quotations), representando aproximadamente 80% da capitalização de mercado disponível (S&P Global).

Além disso, visando enriquecer o estudo e aplicar os modelos de mensuração de risco em mercados distintos, o Índice da Bolsa de Valores de São Paulo (Ibovespa) também foi utilizado, sendo o principal indicador de desempenho das ações negociadas na B3, reunindo as empresas mais importantes do mercado de capitais brasileiro (B3).

Ainda, os retornos dos ativos foram obtidos a partir do logaritmo natural dos retornos diários através da fórmula:

$$r_t = \ln\left(\frac{X_t}{X_{t-1}}\right) \tag{20}$$

onde X_t representa o valor do ativo analisado no dia t.

Dado que a gestão de risco visa proteger o investidor de grandes perdas em momentos de instabilidade, é importante selecionar um período histórico que considere períodos de alta volatilidade. Por isso, o período analisado foi de 20 anos, 2 de janeiro de 2002 a 31 de janeiro de 2022, totalizando 5055 observações, contemplando tanto períodos normais sem grandes variações quanto períodos de crise, como a grande crise norte americana em 2008 desencadeada pela quebra das instituições de crédito dos Estados Unidos que concediam empréstimos hipotecários de alto risco, a crise do alto endividamento dos países europeus que se intensificou ao final de 2011 e a crise de 2020 desencadeada pela pandemia do novo coronavírus (Covid-19).

Em relação ao Ibovespa, foi utilizado o mesmo período para a análise, totalizando 4972 observações, também capturando momentos estáveis e voláteis. Interessante observar o impacto de crises externas no mercado brasileiro, além de crises locais, como o impeachment da presidente Dilma Roussef (Bicudo, Junior e Paschoal, 2015) e a divulgação dos áudios que enquadravam Michel Temer, então presidente, em casos de suspeita de corrupção (Carta Capital, 2017).

3.2 Detalhamento do Estudo

Utilizando as bases de dados apresentadas, propõe-se realizar o cálculo das duas métricas de risco estabelecidas (VaR e ES) através das diferentes metodologias especificadas anteriormente para todo o horizonte temporal. Feito isso, serão utilizadas metodologias de *backtesting* para averiguar qual método apresenta maior precisão na previsão do VaR e do ES. Vale ressaltar que alguns critérios serão estabelecidos para a realização dos cálculos e posteriores análises:

- Horizonte Temporal: segundo Danielsson (2011), a regulação estabelecida pelo Comitê da Basileia define que o período ideal para se calcular métricas de risco deve ser diário, portanto, tal regulação será adotada no estudo.
- Nível de confiança: o nível de confiança adotado para se calcular o VaR e o ES será de 99%. Vale ressaltar que esse nível de confiança está de acordo com os limites

estabelecidos nos acordos da Basileia. Além disso, é comumente utilizado por instituições financeiras.

- Backtesting: será averiguado se ambos os modelos, VaR e ES, têm capacidade de previsão esperada através do nível de confiança estabelecido, utilizando uma janela móvel de 252 dias.

3.3 Backtesting

Como escolher o melhor modelo de mensuração de risco? Infelizmente, não existe uma única resposta adequada para esta pergunta. Modelos individuais podem ser diagnosticados usando abordagens como testar a significância dos parâmetros ou avaliar os resíduos, mas esses procedimentos frequentemente não abordam a qualidade da previsão de risco dos modelos em questão.

Segundo Danielsson (2011), *backtestig* é uma técnica que pode ser usada para comparar diferentes modelos de risco. Seu objetivo é comparar as estimativas de VaR *ex ante* de um modelo específico para retornos realizados *ex post*, ou seja, observações históricas. Denomina-se violação do VaR quando as perdas ultrapassam o *value at risk.*

Vale ressaltar que as metodologias de *backtesting* utilizadas para o VaR não se aplicam ao *Expected Shortfall*. Isso ocorre, pois o ES é observado apenas na cauda da distribuição, ou seja, somente nos casos em que ocorrem as falhas já discutidas do VaR.

Tendo isso em mente, três metodologias de *backtesing - Basel Traffic Light Test*, Teste de Kupiec e Teste de Christoffersen - foram utilizadas para verificar a precisão das medidas analisadas para os modelos de VaR sob a abordagem paramétrica normal e simulação histórica.

Em relação ao ES, a metodologia utilizada foi proposta por McNeil e Frey (1999). Tal método se baseia nos resíduos da diferença entre o retorno observado e o valor do ES que fora calculado.

3.3.1 *Basel Traffic Light Test*

De acordo com as regulamentações estabelecidas pelo Comitê da Basiléia, o modelo sugerido para se fazer *backtesting* é o *Traffic Light* (BCBS, 1996). Esta metodologia contabiliza a quantidade de falhas – perdas superiores ao VaR – observadas no modelo, separando-o em

três zonas distintas. Ainda, seguindo as recomendações do Comitê da Basiléia (BCBS, 1996), deve-se utilizar uma janela de 250 dias úteis para o *backtesting*. A classificação do modelo ocorre conforme a tabela 1:

Tabela 1 – Abordagem *Traffic Light*.

Zone	Número de violações	Incremento fator de escala	Probabilidade cumulativa
Green Zone	0	0,00	8,11%
	1	0,00	28,58%
	2	0,00	54,32%
	3	0,00	75,81%
	4	0,00	89,22%
Yellow Zone	5	0,40	95,88%
	6	0,50	98,63%
	7	0,65	99,60%
	8	0,75	99,89%
	9	0,85	99,97%
Red Zone	10 or more	1,00	99,99%

Fonte: Elaboração própria

Analisando a tabela 1, nota-se que se ocorrerem de zero a quatro falhas no período observado, o modelo é classificado como adequado, pois se enquadraria na zona verde ou *green zone*.

Se ocorrerem de cinco a nove falhas, o modelo pode ser classificado como adequado ou não adequado, pois se enquadraria na zona amarela ou *yellow zone*. Entretanto, apesar de cair na zona amarela, se a instituição financeira que deseja utilizar o modelo conseguir comprovar a robustez do mesmo, ela poderá utilizá-lo.

De acordo com o *Basel Committee (1996)*, os modelos acabam se enquadrando na zona amarela, majoritariamente, por alguns motivos:

- Não capturar do risco das posições ou não calcular as volatilidades e correlações corretamente – referindo-se à integridade básica do modelo;
- A mensuração do risco de alguns instrumentos não é realizada de forma suficientemente precisa – referindo-se à possíveis melhorias no modelo;
- Alterações repentinas no mercado que não foram capturadas no modelo;
- Acontecimento de mudanças nas posições nos ativos após as estimativas calculadas – referindo-se a posições *intra-day*.

No caso da ocorrência de dez ou mais falhas no período observado, o modelo é classificado como não adequado, pois se enquadra na zona vermelha ou *red zone*, o que indica que, evidentemente, existe algum problema com o mesmo.

3.3.2 Teste de Kupiec

Este teste, proposto por Kupiec (1995), que também é conhecido como teste proporção de falhas (POF), se trata de um teste de razão de verossimilhanças para estabelecer se a frequência de falhas é consistente com a esperada, dado o nível de confiança adotado do VaR.

A estatística do teste é dada por:

$$L = -2log\left(\frac{(1-p)^{N-x}p^{x}}{\left(1-\frac{x}{N}\right)^{N-x}\left(\frac{x}{N}\right)^{x}}\right) = -2\left[(N-x)log\left(\frac{N(1-p)}{N-x}\right) + xlog\left(\frac{N_p}{x}\right)\right] \quad (21)$$

Assim como anteriormente estabelecido, N representa o número de observações, x o número de falhas observadas e p = 1 – VaR.

A estatística do teste em questão tem uma distribuição Chi-quadrado com 1 grau de liberdade. Dadas as propriedades do logaritmo, tem-se que:

$$L = -2Nlog(1-p), \text{ se x = 0} \quad (22)$$

$$L = -2Nlog(p), \text{ se x = N} \quad (23)$$

O p-valor do teste em questão representa a probabilidade de que a distribuição exceda a L:

$$P - valor = 1 - F(L) \quad (24)$$

onde F é a distribuição Chi-quadrado com 1 grau de liberdade. Caso p-valor < F, o resultado é aceito e rejeitado caso contrário.

3.3.3 Teste de Christoffersen

O teste de Kupiec se concentra apenas na frequência de falhas e ignora a dinâmica temporal dos mesmos. Os modelos de mensuração de risco VaR e ES pressupõem que as falhas serão distribuídas aleatoriamente ao longo do tempo. Se os erros forem consecutivos, o modelo pode não ser adequado para se mensurar o risco em determinadas circunstâncias.

De acordo com Christoffersen (1998), o teste estende o teste de Kupiec incluindo uma estatística para testar a independência das falhas observadas, determinando se a probabilidade de uma falha ocorrer em um determinado dia depende do resultado do dia anterior.

Dito isso, define-se uma variável l_t, onde:

$$l_t = \begin{cases} 1, se\ ocorrer\ falha\ no\ modelo\ na\ data\ t \\ 0, se\ não\ ocorrer\ falha\ no\ modelo\ na\ data\ t \end{cases} \tag{25}$$

Além disso, n_{ij} representa a quantidade de dias da amostra quando acontece a condição *j*, assumindo que a condição *i* ocorreu no dia anterior.

Define-se a probabilidade de uma falha condicionada ao estado *i* do dia anterior como π_i:

$$\pi_0 = \frac{n_{00}}{n_{00} + n_{01}}, \pi_1 = \frac{n_{11}}{n_{10} + n_{11}}\ e\ \pi = \frac{n_{00} + n_{11}}{n_{00} + n_{01} + n_{10} + n_{11}} \tag{26}$$

Se o modelo de mensuração de risco for preciso, uma falha descoberta hoje não precisa depender da ocorrência ou não de uma falha no dia anterior, ou seja, sob a hipótese nula $\pi_0 = \pi_1$.

Para realizar a validação da independência entre as falhas, tem-se a seguinte estatística:

$$PR_{ind} = -2ln\left(\frac{(1-\pi)^{(n_{00}+n_{10})} \times \pi^{(n_{01}+n_{11})}}{(1-\pi_0)^{n_{00}} \times {\pi_0}^{n_{01}} \times (1-\pi_1)^{n_{10}} \times {\pi_1}^{n_{11}}}\right) \tag{27}$$

Ao combinar essa estatística com a do teste de Kupiec (Equação 21), obtém-se o teste de Christoffersen, que avalia a quantidade de falhas do modelo e a independência entre elas:

$$PR_{cc} = PR_{ind} + L \tag{28}$$

sendo que PR_{cc} também segue uma distribuição qui-quadrado com dois graus de liberdade. Se PR_{cc} exceder o valor crítico da distribuição, a hipótese nula é rejeitada e considera-se o modelo inadequado.

Em suma, o teste em questão avalia se a frequência de falhas, dependência entre elas ou ambas causam a falta de precisão de um modelo.

3.3.4 Teste de McNeil e Frey

McNeil e Frey (1999) surgiram com uma proposta de método para a validação do modelo ES baseada na série de resíduos entre a perda ou o ganho observado e o valor do ES calculado, dados como:

$$\varepsilon_t = \begin{cases} \dfrac{-PNL_t - ES_{h,\alpha,t-1}}{\hat{\sigma}_t} \times W_t \times \sqrt{\Delta t}, se\ PNL_t < -VaR_{h,\alpha,t-1} \\ 0, caso\ contrário \end{cases} \tag{29}$$

onde:

ε_t é o resíduo no instante t;

$\hat{\sigma}_t$ é o desvio padrão do PNL estimado do instante t-j ao instante t+1, onde j é o tamanho da janela utilizada no teste;

PNL_t é o PNL observado do instante t ao instante t+1 – perda ou ganho;

$ES_{h,\alpha,t-1}$ o valor do ES calculado para o prazo h ao nível de confiança α no instante t-1;

$VaR_{h,\alpha,t-1}$ o valor do VaR para o prazo h ao nível de confiança α no instante t-1;

W_t o valor de mercado do ativo da carteira no instante t;

Δt o horizonte de tempo observado.

O teste baseia-se na observação de que se o processo dinâmico que calcula o ES estiver correto e se for um estimador não viesado da perda esperada quando a mesma exceder o VaR, então os resíduos devem se comportar como variáveis independentes e identicamente distribuídas (iid) com mediana zero. A hipótese nula do teste é que tem mediana igual a zero,

ao contrário da hipótese alternativa de que tem mediana positiva, pois uma mediana positiva implica que o valor calculado pelo ES foi subestimado. A estatística do teste em questão é dada por:

$$t = \frac{\bar{\varepsilon}}{est.s.e(\bar{\varepsilon})} \tag{30}$$

onde $\bar{\varepsilon}$ denota a média amostral dos resíduos e $est.s.e(\bar{\varepsilon})$ é o erro padrão estimado.

Como a estatística fornecida pela equação (30) não segue uma distribuição bem conhecida, os valores críticos devem ser estimados via bootstrap. De acordo com McNeil e Frey (1999), os valores críticos para essa estatística, assumindo a distribuição normal dos retornos para o cálculo do ES, são significativamente menores que os valores críticos convencionais (como T-student) e em todos os casos menores que 0,01.

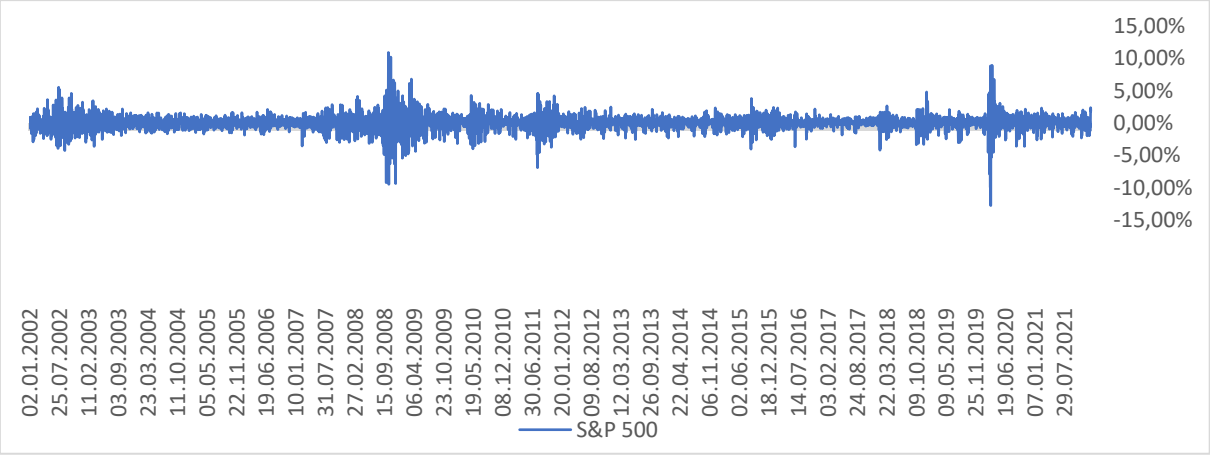
4 Análise dos Resultados

Nesta sessão, os resultados das estimativas obtidas através dos modelos estudados serão apresentados e analisados.

4.1 Descrição dos Dados

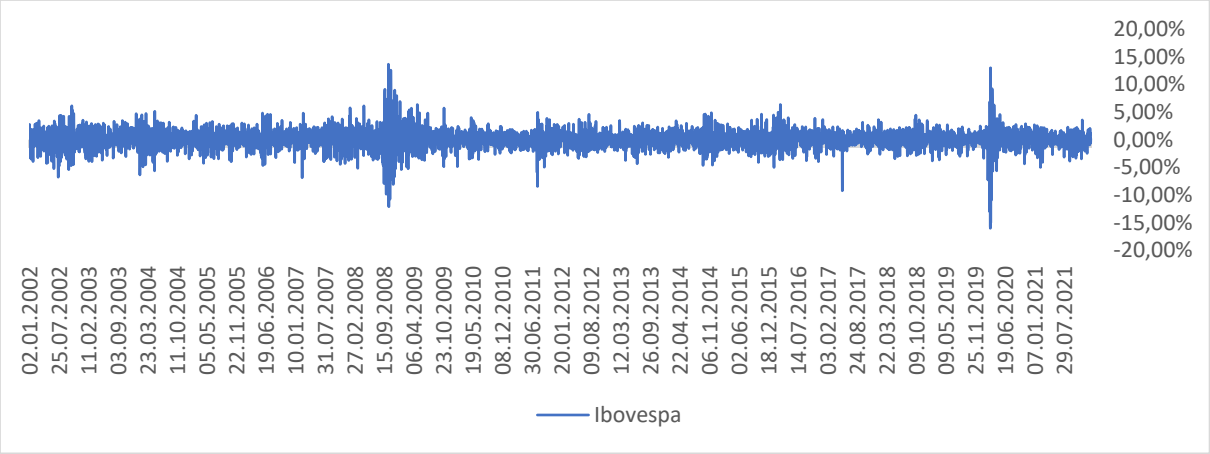
As figuras 1 e 2 apresentam o retorno diário do S&P 500 e do Ibovespa, respectivamente, ao longo dos 20 anos que compõem a base de dados e se faz evidente a alta volatilidade nos períodos destacados anteriormente:

Figura 1 – Retorno Diário do S&P 500 de Janeiro de 2002 a Janeiro de 2022



Fonte: Economatica (2022)

Figura 2 – Retorno Diário do Ibovespa de Janeiro de 2002 a Janeiro de 2022



Fonte: Economatica (2022)

A Tabela 2 traz algumas estatísticas da distribuição dos retornos do S&P 500 e Ibovespa, respectivamente

Tabela 2 – Estatísticas das Variáveis Analisadas (Retornos S&P 500 e Ibovespa)

Estatísticas	S&P 500	Ibovespa
Média	0.03%	0.04%
Mediana	0.07%	0.09%
Desvio Padrão	1.22%	1.76%
Variância da Amostra	0.00015	0.00031
Excesso de Curtose	12.49	7.52
Assimetria	-0.45	-0.40
Máximo	10.96%	13.68%
Mínimo	-12.77%	-15.99%
Intervalo	23.72%	29.67%
Soma	136.37%	208.99%
Tamanho	5055	4972

Fonte: Elaboração própria

Na Tabela 2, nota-se que a curva da distribuição dos retornos do S&P apresenta uma assimetria negativa. Quanto ao excesso de curtose, nota-se que a distribuição pode ser classificada como leptocúrtica, ou seja, apresenta caudas mais pesadas do que a distribuição normal. Vale a pena ressaltar o retorno máximo e mínimo diário apresentado pelo mercado norte americano: 10,96% e -12,77%, respectivamente.

Olhando para o mercado brasileiro, nota-se que a distribuição dos retornos do Ibovespa apresenta assimetria negativa. O valor do excesso de curtose sugere uma distribuição com caudas mais pesadas do que a normal. Vale a pena ressaltar o retorno máximo e mínimo diário apresentado pelo mercado brasileiro: 13,68% e -15,99%, respectivamente.

A partir das estatísticas descritivas, fica evidente a maior volatilidade do Ibovespa perante o S&P 500, uma vez que seu desvio padrão é maior, assim como retornos máximos e mínimos. Essa volatilidade maior será refletida nas estimativas realizadas através dos modelos mais adiante.

4.2 Resultados das estimações de VaR e ES

4.2.1 Amostra completa

Todos os cálculos a serem apresentados foram realizados através do software estatístico R.

A tabela 3 apresenta os resultados dos cálculos do VaR e ES, respectivamente, para ambos os índices (S&P 500 e Ibovespa) a níveis de significância de 1% e 5% e com o horizonte temporal de 1 dia. Todos os métodos abordados nesse artigo foram utilizados.

Tabela 3 – Resultados VaR e ES

	99% Confiança		95% Confiança	
Modelo	**S&P 500**	**Ibovespa**	**S&P 500**	**Ibovespa**
VaR HS	3.49%	4.61%	1.85%	2.75%
VaR Gaussiano	4.98%	4.17%	2.34%	2.71%
VaR CF	2.37%	2.93%	1.11%	1.18%
VaR Johnson	5.08%	3.51%	2.39%	1.42%
ES HS	5.23%	6.84%	3.14%	4.45%
ES Gaussiano	7.79%	5.46%	4.67%	3.55%
ES CF	1.91%	3.52%	1.15%	2.29%
ES Johnson	7.29%	4.05%	4.37%	2.63%

Fonte: Elaboração própria

A partir dos resultados apresentados na tabela 3, nota-se que para ambos os modelos (VaR e ES), o mercado norte americano, representado pelo índice S&P 500, apresenta, em média, uma perda maior, o que corrobora com a história de cada um dos mercados no que tange a períodos de alta volatilidade, sendo a maior diferença a crise de 2008 que afetou gravemente a economia norte americana.

4.2.2 Amostra parcial – excluindo períodos de crise

Nesta sessão, a base de dados foi tratada para excluir os períodos de crise em ambos os mercados com o objetivo de comparar o desempenho dos modelos nos diferentes cenários. No caso do mercado norte-americano, foram excluídos os seguintes períodos:

- 15/09/2008 – 15/09/2009: crise de crédito de 2008 – Lehman Brothers, importante banco de investimentos dos EUA declarou falência no dia 14 de setembro, sendo considerado o estopim da crise (Hemmelgarn e Nicodeme, 2010);
- 04/01/2011 – 30/12/2011: crise de endividamento dos países europeus (Lane, 2012);

- 02/01/2020 – 31/12/2020: crise oriunda da pandemia do Covid-19 (Shehzad, Xiaoxing, Bilgili e Koçak, 2021).

Em relação ao mercado brasileiro, os seguintes períodos de crise foram removidos da base de dados:

- 15/09/2008 – 15/09/2009: crise de crédito de 2008 norte americana que acabou impactando não somente o Ibovespa, como demais mercados ao redor do mundo (Hemmelgarn e Nicodeme, 2010);
- 04/01/2016 – 29/12/2016: impeachment da então presidente do Brasil, Dilma Rousseff (Agência Senado, 2016);
- 02/01/2020 – 30/12/2020: crise oriunda da pandemia do Covid-19 (Shehzad, Xiaoxing, Bilgili e Koçak, 2021).

A tabela 4 apresenta os resultados dos cálculos do VaR e ES para ambos os índices (S&P 500 e Ibovespa) a um nível de significância de 1% e com o horizonte temporal de 1 dia. Todos os métodos abordados nesse artigo foram utilizados.

Tabela 4 – Resultados VaR

	99% Confiança		95% Confiança	
Modelo	**S&P 500**	**Ibovespa**	**S&P 500**	**Ibovespa**
VaR HS	2.73%	3.95%	1.64%	2.57%
VaR Gaussiano	3.98%	3.81%	2.39%	2.48%
VaR CF	2.13%	2.78%	1.28%	1.81%
VaR Johnson	4.06%	3.32%	2.44%	2.16%
ES HS	3.25%	4.97%	1.95%	3.23%
ES Gaussiano	5.71%	4.76%	3.43%	3.09%
ES CF	1.82%	3.12%	1.09%	2.03%
ES Johnson	5.56%	3.83%	3.34%	2.49%

Fonte: Elaboração própria

A partir dos resultados apresentados na tabela 4 e a comparação entre os resultados obtidos para a amostra completa, fica evidente que os valores estimados foram menores, o que faz total sentido dado o fato da exclusão dos maiores períodos de crise para cada mercado. Ou seja, eliminando períodos de alta volatilidade da base, intuitivamente, a perda esperada se torna menor. Além disso, novamente percebe-se que, em média, a perda esperada para o mercado

norte americano é menor do que a do mercado brasileiro por se tratar de um mercado mais estável, principalmente ao se excluir períodos de crise da base.

4.3 Backtesting

A tabela 5 apresenta um resumo dos resultados obtidos através dos modelos de backtesting apresentados ao longo desse artigo para os diferentes métodos de cálculo do VaR, também apresentados anteriormente. Todos os testes foram realizados utilizando uma janela móvel de 252 dias a um nível de significância de 1% e 5%, respectivamente.

Tabela 5 – Resultados Backtesting VaR e ES – 99% e 95% confiança

		99% de Confiança						95% de Confiança					
		Amostra Completa		Amostra parcial (sem crise)		Somente Crises		Amostra Completa		Amostra parcial (sem crise)		Somente Crises	
		S&P 500	Ibovespa	S&P 500	Ibovespa	S&P 500	Ibovespa	S&P 500	Ibovespa	S&P 500	Ibovespa	S&P 500	Ibovespa
Basel Traffic Light	VaR HS	80.0%	94.5%	72.5%	90.2%	98.7%	99.98%	76.0%	89.8%	71.1%	88.4%	98.6%	99.9%
	VaR Gaussiano	96.3%	98.4%	80.3%	91.8%	98.8%	99.9%	95.9%	97.9%	78.7%	90.0%	98.7%	99.8%
	VaR CF	81.7%	90.2%	82.7%	96.0%	98.4%	99.5%	80.1%	88.4%	81.0%	94.1%	98.3%	99.4%
	VaR Johnson	97.3%	98.5%	81.9%	95.4%	98.2%	99.0%	95.8%	96.5%	80.3%	93.5%	98.1%	98.9%
Kupiec	VaR HS	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Reprovado	Reprovado	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Reprovado	Reprovado
	VaR Gaussiano	Aprovado	Reprovado	Aprovado	Aprovado	Reprovado	Reprovado	Aprovado	Reprovado	Aprovado	Aprovado	Reprovado	Reprovado
	VaR CF	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Reprovado	Reprovado	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Reprovado	Reprovado
	VaR Johnson	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Reprovado	Reprovado	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Reprovado	Reprovado
Christoffersen	VaR HS	Reprovado	Reprovado	Reprovado	Reprovado	Reprovado	Reprovado	Reprovado	Reprovado	Reprovado	Reprovado	Reprovado	Reprovado
	VaR Gaussiano	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Reprovado	Reprovado	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Reprovado	Reprovado
	VaR CF	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Reprovado	Reprovado	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Reprovado	Reprovado
	VaR Johnson	Aprovado	Reprovado	Aprovado	Aprovado	Reprovado	Reprovado	Aprovado	Reprovado	Aprovado	Aprovado	Reprovado	Reprovado
McNeil & Frey	ES HS	Aprovado	Aprovado			Reprovado	Reprovado	Aprovado	Aprovado			Reprovado	Reprovado
	ES Gaussiano	Aprovado	Reprovado			Reprovado	Reprovado	Aprovado	Reprovado			Reprovado	Reprovado
	ES CF	Aprovado	Aprovado			Reprovado	Reprovado	Aprovado	Aprovado			Reprovado	Reprovado
	ES Johnson	Aprovado	Aprovado			Reprovado	Reprovado	Aprovado	Aprovado			Reprovado	Reprovado

Fonte: Elaboração própria

Em relação ao modelo de Simulação Histórica (HS), salta aos olhos os resultados do backtesting de Christoffersen, dado que o mesmo foi reprovado para ambos os mercados e em ambas as amostras. Isso indica que as falhas têm dependência forte e acontecem de maneira consecutiva, algo já esperado dadas as premissas do modelo.

Além disso, o teste *Basel Traffic Light* e Kupiec apresentaram resultados positivos para ambos os mercados e em ambas as amostras: aprovaram o modelo, demonstrando estabilidade e confiança nos resultados.

Observando-se os resultados do *Basel Traffic Light* para o modelo Gaussiano, a amostra completa do Ibovespa foi classificada na zona vermelha, ou seja, apresentou alto número de falhas. Neste caso, a não aprovação do mesmo se deve a alta volatilidade do Ibovespa no período completo, o que não foi bem capturado pelo modelo Gaussiano, dado que os ativos apresentaram uma distribuição distante da Normal e a hipótese de normalidade do modelo

acabou por comprometer os resultados. Não distante disso, o resultado observado para o S&P 500 é praticamente análogo, sendo classificado na zona amarela.

Por outro lado, o teste de Kupiec e Christoffersen apresentaram maior índice de aprovação em relação à amostra parcial. Porém, analisando a amostra completa, o teste de Kupiec para o índice Ibovespa reprovou o modelo, o que pode ser explicado pela alta volatilidade do mercado brasileiro e consequente rápida mudança de comportamento do índice em períodos de crise, como a do COVID-19, por exemplo.

Já em relação ao modelo Cornish Fisher, os resultados foram positivos e o modelo aprovado em ambos os mercados e na amostra completa. Já na amostra parcial do índice Ibovespa, o modelo acabou caindo no limite entre a zona amarela e verde.

Uma observação importante a ser feita é que, ao comparar os resultados entre as amostras completa e parcial, percebe-se que os modelos tiveram um nível de aprovação maior na amostra parcial, o que, intuitivamente, faz sentido, dado que períodos com grandes volatilidades foram retirados da base, trazendo maior acuracidade às estimativas.

A validação do modelo ES foi feita utilizando a amostra completa, pois como a amostra se reduz ao número de falhas observados, o resultado do teste pode perder precisão para amostras menores. Através do backtesting proposto por McNeil e Frey, pôde-se observar que o ES apresentou menos violações do que o VaR.

Com esperado, ao realizar a validação dos resultados à um nível de confiança de 95%, percebe-se que os resultados foram análogos aos de 99%. Houve uma leve melhora nos resultados já que o nível de confiança foi reduzido, porém não suficiente para alterar as classificações dos modelos e seus diferentes métodos de aplicação.

5 Conclusão

As grandes crises financeiras enfrentadas na história, como um todo, trouxeram à tona a necessidade da discussão e mensuração dos riscos de mercado aos quais as grandes empresas e instituições financeiras estão expostas. No Acordo de Basiléia II (1997), o VaR foi indicado como modelo para se fazer a mensuração diária do risco. Esse modelo estima o valor da perda máxima esperada dada um horizonte de tempo e um intervalo de confiança.

Os órgãos reguladores acabaram por indicar o VaR como medida de risco devido a sua simplicidade de cálculo e fácil aplicação em carteiras de ativos. Entretanto, o VaR apresenta algumas premissas que podem levar a falhas, como a suposição de que os retornos seguem uma

distribuição Normal, o que não coincide em grande parte com a realidade, causando distorções nas estimativas. Além disso, sob o modelo de Simulação Histórica, apesar de não haver suposição sobre a distribuição dos retornos, é assumido que os mesmos são independentes e identicamente distribuídos (iid), o que não se observa empiricamente. Outro ponto negativo do VaR e que é amplamente discutido é a questão de ele não ser uma medida coerente de risco, conforme apresentado anteriormente neste trabalho. Para suprir essa carência do VaR, surge o modelo ES que respeita as quatro propriedades de coerência e é utilizado como um complemento ao VaR – qual é o valor esperado da perda para casos onde a perda superou a estimada pelo VaR.

Neste trabalho foi observado, através de diferentes técnicas de backtesting, o desempenho dos modelos VaR e ES calculados através de diferentes métodos para o mercado brasileiro, representado pelo Ibovespa, e o mercado norte americano, representado pelo S&P 500, utilizando duas amostras distintas: uma completa e outra excluindo as grandes crises financeiras que impactaram cada um dos mercados.

Tanto o VaR quanto o ES tiveram um bom desempenho nas situações abordadas neste trabalho, o que freia a discussão de que um modelo pode vir a ser melhor do que o outro. Pelo contrário. De acordo com os resultados aqui obtidos, devem ser usados de maneira complementar, em conjunto, cada qual com suas fraquezas e fortalezas.

Visando explorar mais a fundo o tema discutido neste trabalho e melhorar a qualidade das análises, pesquisas futuras podem trabalhar com mais janelas móveis e analisar os modelos, por exemplo, exclusivamente durante as crises para comparar seus comportamentos em diferentes períodos e sob diferentes circunstâncias.

Referências Bibliográficas

ACERBI, Carlo; TASCHE, Dirk. **Expected Shortfall: A Natural Coherent Alternative to Value At Risk.** Economic Notes, Volume 31, No. 2, 2002, p. 379-388.

ACERBI, Carlo. *et al*. **Expected Shortfall as a Tool for Financial Risk Management.** Abaxbank, 2001.

AKTAS, Özlem; SJÖSTRAND, Maria. **Cornish-Fisher Expansion and Value-at-Risk method in application to risk management of large portfolios.** Halmstad University, 2011.

ALEXANDER, Carol. **Value-at-risk Models**: Market Risk Analysis. Volume IV. Chichester: John Wiley & Sons, 2008.

ARTZNER, Philippe. *et al*. **Coherent Measures of Risk.** Mathematical Finance, Volume 9, No. 3, 1999, p. 203-228.

BIS. Basel Committee on Banking Supervision (BCBS). **Supervisory Framework for the use of Backtesting in conjunction with Internal Models Approach to Market Risk Capital Requirement.** Bank of International Settlements, 1996.

BIS. Basel Committee on Banking Supervision (BCBS). **Fundamental review of the trading book:** A revised market risk framework. Bank for international Settlements, 2013. Disponível em: <https://www.bis.org/publ/bcbs265.pdf>.

BRIO, Esther B. Del; MORA-VALENCIA, Andrés; PEROTE, Javier. **Risk Quantification for Commodity ETFs: Backtesting Value-at-Risk and Expected Shortfall.** International Review of Financial Analysis, Volume 70, 2020.

CARTA CAPITAL. **O áudio entre Michel Temer e Joesley Batista em quatro pontos**. 18 mai. 2017. Política. Disponível em: <https://www.cartacapital.com.br/politica/o-audio-entre-michel-temer-e-joesley-batista-em-quatro-pontos/>

CHANG, Chia-Lin. *et al*. **Choosing Expected Shortfall over VaR in Basel III Using Stochastic Dominance.** Tinbergen Institute, 2016.

CHRISTOFFERSEN, P. **Evaluating interval forecasts.** International Economic Review 39, 841–862, 1998

CORNISH, E. A.; FISHER, R. A. **Moments and cumulants in the specification of distributions.** Revue de I'Institut International de Statistique, 5: 307-320, 1937.

DANIELSSON, Jon. **Financial Risk Forecasting:** The Theory and Practice of Forecasting Market Risk, with Implementation in R and Matlab. Chichester: John Wiley & Sons, 2011.

DISIS, Jill. China's growing power crunch threatens more global supply chain chaos. **CNN Business**, São Paulo, 29 de setembro de 2021. Disponível em: < https://edition.cnn.com/2021/09/28/economy/china-power-shortage-gdp-supply-chain-intl-hnk/index.html>

DOWD, Kevin. **Measuring Market Risk.** 2 ed. Chichester: John Wiley & Sons, 2005

ECONOMÁTICA. **Economática:** tools for investment analysis. Acesso em: 19 fev. 2022. (Módulo Cotações).

GIAMBIAGI, Fabio; TAVARES, Felipe Noronha. **Derivativos e Risco de Mercado.** Elsevier Brasil, 2018.

HALLIN, Marc; TRUCÍOS, Carlos. **Forecasting Value-at-Risk and Expected Shortfall in Large Portfolios: a General Dynamic Factor Model Approach.** Université libre de Bruxelles, Belgium, 2021.

HARMANTZIS, Fotios C.; MIAO, Linyan; CHIEN, Yifan. **Empirical Study of Value-at-Risk and Expected Shortfall Models with Heavy Tails.** Journal of Risk Finance, 2005.

HEMMELGARN, Thomas; NICODEME, Gaetan. **The 2008 Financial Crisis and Taxation Policy.** CESifo Working Paper Series, 2010.

HILL, I. D.; HILL, R.; HOLDER, R. L. **Algorithm as 99:** Fitting johnson curves by moments. *Journal of the Royal Statistical Society,* Volume 25, No. 2, 1976, p. 180-189.

HULL, John C. **Options, Futures and Other Derivatives.** 6. ed. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 2005.

HULL, John C. **Risk Management and Financial Institutions.** 5. ed. New Jersey: Wiley Finance Series, 2018.

Índice Bovespa (Ibovespa B3). **B3**. Disponível em: https://www.b3.com.br/pt_br/market-data-e-indices/indices/indices-amplos/ibovespa.htm

JOHNSON, N. L. **Systems of Frequency Curves Generated by Methods of Translation.** Biometrika Trust: Oxford University Press, Volume 36, No. 1/2, 1949, p. 149-176.

JORION, Philippe. **Value at Risk:** The New Benchmark for Managing Financial Risk. 3ª edição. United States of America: The McGraw-Hill, 2007.

KUPIEC, Paul H. **Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models.** The Journal of Derivatives, 1995.

LANE, Philip R. **The European Sovereign Debt Crisis.** Journal of Economic Perspectives, 2012.

LAZARA, Emese; PANA, Jingqi; WANGB, Shixuan. **On the estimation of Value-at-Risk and Expected Shortfall at extreme levels.** University of Reading, 2022.

LIMA, Fabiano Guasti. **Análise de Riscos.** 2ª edição. São Paulo: Atlas, 2018.

LINSMEIER, Thomas J.; PEARSON, Neil D. **Risk Measurement: An Introduction to Value at Risk.** University of Illinois at Urbana-Champaign, 1996.

LIU, Yuhan. et al. **Tail value-at-risk in uncertain random environment.** Soft Computing, 2020

MALAR, João Pedro; ELIAS, Juliana. Petróleo, milho, trigo, gás: saiba mais sobre as economias de Rússia e Ucrânia. **CNN Brasil Business**, São Paulo, 25 de fevereiro de 2022. Disponível em: <https://www.cnnbrasil.com.br/business/petroleo-milho-trigo-gas-saiba-mais-sobre-as-economias-de-russia-e-ucrania/#:~:text=R%C3%BAssia-,Petr%C3%B3leo%2C%20milho%2C%20trigo%2C%20g%C3%A1s%3A%20saiba%20mais%20sobre%20as,economias%20de%20R%C3%BAssia%20e%20Ucr%C3%A2nia&text=Protagonistas%20de%20um%20novo%20conflito,no%20dos%20ucranianos%2C%20as%20agr%C3%ADcolas.>.

MATOS, Getúlio Alves de Souza; IQUIAPAZA, Robert Aldo; FERREIRA, Bruno Pérez. **Análise da exposição a perdas dos ETFs brasileiros conforme as técnicas de avaliação de risco de mercado Value at Risk (VaR) e Expected Shortfall (ES).** BBR - Brazilian Business Review, Volume 11, No. 4, 2014, p. 91-115.

MCNEIL, Alexander J.; FREY, Rüdiger. **Estimation of Tail-Related Risk Measures for Heteroscedastic Financial Time Series:** An Extreme Value Approach**.** Journal of Empirical Finance, Volume 7, 1999, p. 271-300

OLIVEIRA, Virgínia Izabel D.; PINHEIRO, Juliano Lima. **Gestão de Riscos no Mercado Financeiro:** Uma Abordagem Prática e Contemporânea para as Empresas. São Paulo: Saraiva Educação, 2018.

ROCCIOLETTI, Simona. **Backtesting Value at Risk and Expected Shortfall**. Wiesbaden: Springer Gable, 2016.

S&P Dow Jones Indices. A Division of S&P Global. **S&P 500**. Disponível em: <https://www.spglobal.com/spdji/pt/indices/equity/sp-500/#overview>.

SAMPATH, Krishna. Rising rates support a long-term approach to cash management. **The Business Times**, 19 de março de 2022. Disponível em: <

https://www.businesstimes.com.sg/wealth-investing/rising-rates-support-a-long-term-approach-to-cash-management>.

SAUNDERS, Anthony. **Administração de Instituições Financeiras.** 1ª Edição. Editora Atlas, 2000.

SHEHZAD, K.; XIAOXING, L.; BILGILI, F.; KOÇAK, E. **COVID-19 and Spillover Effect of Global Economic Crisis on the United States Financial Stability.** Front. Psychol., 2021.

SIMONATO, Jean-Guy. **The Performance of Johnson Distributions for Computing Value at Risk and Expected Shortfall.** The Journal of Derivatives

SOUZA, Iram Alves De. **Gestão de Risco de Mercado – Mensuração do Value-at-Risk (VaR) comparando a exigência de capital em diferentes abordagens.** Brasília, 2017

TALEB, N.; GOLDSTEIN, D. **The problem is beyond psychology: The real world is more random than regression analisys.** *International Journal of Forecasting.* Fourthcoming, October 2011.

TALEB, N.; GOLDSTEIN, D. **We don´t quite know what we are talking about when we talk about volatility.** *Journal of Portfolio Management*, v. 33, n. 4, March 2007.

YAMAI, Yasuhiro; YOSHIBA, Toshinao. **Comparative Analyses of Expected Shortfall and Value-at-Risk: Their Estimation Error, Decomposition, and Optimization.** Institute for Monetary and Economic Studies, 2002.

YAMAI, Yasuhiro; YOSHIBA, Toshinao. **Value-at-risk versus expected shortfall: A practical perspective.** Institute for Monetary and Economic Studies, 2004.

ZHANG, Dayong; HU, Min; JI, Qiang. **Financial markets under the global pandemic of COVID-19**. Finance Research Letters, Volume 36, 2020.