Insper Instituto de Ensino e Pesquisa

Pedro Ivo Duarte Pinto

Análise dos principais componentes do *bid-ask spread* de opções sobre ações no mercado brasileiro

São Paulo
2018

Pedro Ivo Duarte Pinto

Análise dos principais componentes do *bid-ask spread* de opções sobre ações no mercado brasileiro

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Economia do Insper, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Economia. Área de concentração: Finanças.

Orientador: Prof. Dr. Gustavo Soares

São Paulo

2018

APROVAÇÃO

PINTO, Pedro Ivo Duarte. **Análise dos principais componentes do *bid-ask spread* de opções sobre ações no mercado brasileiro.** Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Economia do Insper, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Economia; Área de concentração: Finanças. São Paulo: Instituto de Ensino e Pesquisa, 2018.

Aprovado em: 31/Jan/2018

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Gustavo Soares _____

Orientador, Insper

Prof. Dr. Gustavo Athayde _____

Insper

Prof. Dr. Marcelo Moura _____

Mitsui Alimentos

AGRADECIMENTOS

Este projeto contou com a ajuda de vários amigos, colegas de trabalho, colegas de profissão, professores e familiares. Alguns deles merecem destaque especial.

Primeiramente, agradeço ao Professor Dr. Gustavo Soares, meu orientador, que acompanhou esse trabalho desde o princípio com paciência e entusiasmo. Ele foi um grande incentivador desse projeto e por muitas vezes foi o apoio que precisei para não desistir.

Agradeço também aos amigos Ulysses Maia, Diogo Lima, Diogo Fagliari e Alexandre Ferraz, grandes estudiosos dos derivativos de ações. Com experiência de mercado ímpar, por muitas vezes esses grandes profissionais me sanaram dúvidas, me ajudaram a encontrar falhas nos modelos e me deram o suporte necessário às minhas análises.

Por fim agradeço aos meus pais, aos meus filhos e, em especial, à minha esposa Isabela pelo incentivo e apoio prestados nessa fase da minha carreira na qual me dediquei de maneira mais intensa aos estudos.

Janeiro de 2018.

RESUMO

Este trabalho analisa os principais componentes do *bid-ask spread* praticado nas opções de compra (*calls*) sobre diferentes ações no mercado brasileiro. A análise baseou-se numa posição comprada em uma *call* carregada até o vencimento e fazendo-se diariamente o respectivo *delta hedge* seguindo (i) o modelo clássico de Black & Scholes (cuja a ausência de custos transacionais é uma das premissas); e (ii) a metodologia proposta por Leland em 1985, que leva em consideração os custos transacionais. Comparando-se o percentil onde a posição gerou lucro para o *market maker* usando-se o *bid-ask spread* observado no mercado com percentil da mesma posição usando o *bid-ask* sugerido pelo modelo de Leland, conseguiu-se estimar a componente do *bid-ask spread* da opção que está relacionada aos custos transacionais. Em seguida, comparando-se o percentil onde se observou resultado positivo usando a metodologia do *Block Bootstrap* com o percentil da mesma posição usando a metodologia clássica de Monte Carlo, conseguiu-se estimar a componente do *bid-ask spread* da opção que está relacionada à diferença entre a distribuição de retornos do ativo objeto observada no mercado e a distribuição de retornos assumida por Black & Scholes. Concluiu-se que, na média, durante o período estudado, as componentes relacionadas (i) aos custos transacionais e (ii) à diferença na distribuição de retornos do ativo objeto representaram 51% e 31% respectivamente do *bid-ask spread* das opções analisadas, de modo que o restante do *spread* parece não ser suficientemente grande para cobrir outros custos relacionados à posição e gerar lucro para o *market maker* condizente com o risco incorrido. Os resultados analisados sugerem uma condição de mercado bastante agressiva, que provavelmente não deve se sustentar no longo prazo.

Palavras-chave: Custos transacionais, *bid-ask spread*, Leland, *Block Bootstrap*, Black & Scholes.

ABSTRACT

This paper analyzes the main components of the bid-ask spread of call options on different stocks in the Brazilian market. The analysis was based on a long call position, held to maturity, with the respective delta hedge activity following (i) the classic Black & Scholes model (whose absence of transaction costs is one of the assumptions); and (ii) the methodology proposed by Leland in 1985, which takes transaction costs into account. Comparing the percentile where the position generated profit for the market maker using the bid-ask spread observed in the market with the percentile of the same position using the bid-ask suggested by Leland's model, it was possible to estimate the component of the bid-ask spread of the option that is related to the transaction costs. Then, comparing the percentile where a positive result was observed using the Block Bootstrap methodology with the percentile of the same position using the classical Monte Carlo methodology, it was possible to estimate the component of the bid-ask spread of the option that is related to the difference between the distribution of returns of the underlying asset observed in the market and the distribution of returns assumed by Black & Scholes. The conclusion was that, on average, the components related to (i) transaction costs and (ii) the difference in the distribution of returns of the underlying asset represented 51% and 31%, respectively, of the bid-ask spread of the options. The remainder of the spread does not seem to be large enough to cover other costs related to the position and to generate profit for the market maker compatible with the risk incurred. These results suggest a very aggressive market condition, which probably should not be sustained in the long term.

Key words: Transaction costs, Bid-ask spread, Leland, Block Bootstrap, Black & Scholes.

SUMÁRIO EXECUTIVO

A precificação e o *hedge* de instrumentos derivativos têm sido tema recorrente no mundo das finanças, principalmente após Black & Scholes terem apresentado o clássico modelo de precificação de opções em 1973. No Brasil, o mercado de opções sobre ações é uma classe de ativos financeiros que tem experimentado rápido crescimento, fruto do esforço de diversos participantes do mercado, incluindo a própria bolsa de valores. No entanto, o tamanho do *bid-ask spread* praticado pelos *market maker*s nas opções sobre ações no mercado brasileiro é usualmente considerado muito largo pelos usuários finais de tais instrumentos financeiros. Em contrapartida, os *market maker*s afirmam que os custos de *hedge* e os riscos envolvidos na manutenção da posição são elevados, justificando um *bid-ask spread* maior.

Este estudo tem como objetivo a análise do *bid-ask spread* de diferentes opções sobre ações, decompondo-o em três principais componentes: (i) componente relacionado aos custos transacionais envolvidos no processo de *delta hedge* no ativo objeto; (ii) componente relacionado à diferença entre a distribuição real dos retornos do ativo objeto e a distribuição assumida por Black & Scholes; e (iii) componente residual, que inclui o lucro do *market maker*, além de todos os outros componentes relacionados à transação em si.

A análise do componente relacionando aos custos transacionais baseou-se na simulação da evolução de preços do ativo (usando a metodologia de Monte Carlo) e na comparação dos resultados financeiros de uma posição comprada em uma call (com seu respectivo hedge no ativo objeto) usando (i) o clássico modelo de Black & Scholes, cuja a ausência de custos transacionais é uma das premissas; e (ii) a metodologia proposta por Leland em 1985, que leva em consideração os custos transacionais, que dependem no *bid-ask spread* do ativo objeto e na frequência de rebalanceamento do portfolio.

A análise do componente relacionando à diferença entre a distribuição de retornos do ativo objeto observada no mercado e a distribuição de retornos assumida por Black & Scholes baseou-se na comparação dos resultados financeiros de uma posição comprada em uma call (com seu respectivo hedge no ativo objeto) simulando-se os preços do ativo objeto usando-se (i) a metodologia clássica de Monte Carlo; e (ii) a metodologia de *Block Bootstrap*.

Concluiu-se que, na média, durante o período estudado, as componentes relacionadas (i) aos custos transacionais e (ii) à diferença na distribuição de retornos do ativo objeto representaram

51% e 31% respectivamente do *bid-ask spread* das opções analisadas, de modo que o restante do *spread* parece não ser suficientemente grande para cobrir outros custos relacionados à posição e gerar lucro para o *market maker* condizente com o risco incorrido. Os resultados analisados sugerem uma condição de mercado bastante agressiva, que provavelmente não deve se sustentar no longo prazo.

ILUSTRAÇÕES

Tabelas

Tabela 1 – *Bid-ask spread* de mercado das opções estudadas – VALE3. 33

Tabela 2 – *Bid-ask spread* de mercado das opções estudadas – ITUB4. 34

Tabela 3 – *Bid-ask spread* de mercado das opções estudadas – ABEV3. 34

Tabela 4 – *Bid-ask spread* de mercado das opções estudadas – GGBR4. 35

Tabela 5 – *Bid-ask spread* de mercado das opções estudadas – PCAR4. 35

Tabela 6 – *Bid-ask spread* de mercado vs. *bid-ask spread* proposto por Leland – VALE3. 36

Tabela 7 – *Bid-ask spread* de mercado vs. *bid-ask spread* proposto por Leland – ITUB4. 36

Tabela 8 – *Bid-ask spread* de mercado vs. *bid-ask spread* proposto por Leland – ABEV3. 37

Tabela 9 – *Bid-ask spread* de mercado vs. *bid-ask spread* proposto por Leland – GGBR4. 37

Tabela 10 – *Bid-ask spread* de mercado vs. *bid-ask spread* proposto por Leland – PCAR4. 37

Tabela 11 – Percentil de resultados positivos no ambiente Black & Scholes **sem** custos transacionais. 42

Tabela 12 – Custo médio da posição em bps (vs. o preço de referência do ativo objeto). 42

Tabela 13 – Percentil de resultados positivos no ambiente Black & Scholes **com** custos transacionais. 43

Tabela 14 – Diferença entre o percentil de resultados positivos com e sem custos transacionais (em pontos percentuais). 43

Tabela 15 – Percentil de resultados positivos no ambiente Black & Scholes com custos transacionais, comprando-se a *call* no *bid market* de volatilidade observado 44

Tabela 16 – *Bid-ask spread* das opções observado no mercado 45

Tabela 17 – *Bid-ask spread* das opções sugerido pelo modelo de Leland 45

Tabela 18 – Percentil de resultados positivos no ambiente Black & Scholes com custos transacionais, comprando-se a *call* no *bid market* de volatilidade sugerido por Leland 46

Tabela 19 – Estimativa do componente do *bid-ask spread* das opções relacionado aos custos transacionais 46

Tabela 20 – Percentil de resultados positivos simulando preços do ativo objeto pela metodologia do *Block Bootstrap* com custos transacionais, comprando-se a opção no *mid market* de volatilidade 47

Tabela 21 – Diferença entre o percentil de resultados positivos usando metodologia de *Block Bootstrap* vs. metodologia de Monte Carlo com custos transacionais, comprando-se a opção no *mid market* de volatilidade 47

Tabela 22 – Componente do *bid-ask spread* das opções relacionado à diferença da distribuição dos retornos do ativo objeto 49

Tabela 23 – Soma das duas componentes relacionadas 49

Gráficos

Gráfico 1 – Distribuição dos retornos diários vs. normal equivalente – VALE3..... 39
Gráfico 2 – Distribuição dos retornos diários vs. normal equivalente – ITUB4..... 40
Gráfico 3 – Distribuição dos retornos diários vs. normal equivalente – ABEV3. 40
Gráfico 4 – Distribuição dos retornos diários vs. normal equivalente – GGBR4. 41
Gráfico 5 – Distribuição dos retornos diários vs. normal equivalente – PCAR4..... 41

SUMÁRIO

APROVAÇÃO **3**
AGRADECIMENTOS **4**
RESUMO **5**
ABSTRACT **6**
SUMÁRIO EXECUTIVO **7**
ILUSTRAÇÕES **9**
1 INTRODUÇÃO **13**
2 REVISÃO DE LITERATURA **17**
2.1 O modelo de Black & Scholes 20
2.2 O modelo de Leland 24
3 OBJETIVOS, METODOLOGIA E LEVANTAMENTO DE DADOS **29**
3.1 Objetivos 29
3.2 Metodologia e levantamento de dados 29
3.2.1 **Parte 1** - Análise do componente do *bid-ask spread* da opção que está relacionado aos custos transacionais do ativo objeto 31
3.2.2 **Parte 2** – Análise do componente do *bid-ask spread* da opção que está relacionado à diferença entre a distribuição real dos retornos do ativo objeto e a distribuição assumida por Black & Scholes (normal) 38
4 ANÁLISE DE RESULTADOS **42**
5 CONCLUSÕES **50**
REFERÊNCIAS **54**
ANEXOS **57**

1 INTRODUÇÃO

A motivação para esse estudo tem origem nas repetitivas críticas em relação ao tamanho do *bid-ask spread* das opções sobre ações no mercado brasileiro praticado pelos *market maker*s, usualmente considerado muito largo pelos usuários finais de tais instrumentos financeiros. Os *market maker*s, por sua vez, advogam que os custos de manutenção de uma posição em opções sobre ações no mercado brasileiro, em conjunto com os custos de *hedge* e os riscos associados à posição são bastante elevados, o que justifica, segundo eles, um *bid-ask spread* maior. O estudo aqui proposto analisa as principais componentes do *bid-ask spread* das opções sobre ações no mercado brasileiro.

A precificação e o *hedge* de instrumentos derivativos têm sido tema recorrente no mundo das finanças, principalmente após Black & Scholes terem apresentado o clássico modelo de precificação de opções em 1973. Um dos pilares fundamentais desse modelo é o conceito da redundância, que afirma que em um mercado completo, qualquer ativo pode ser replicado por meio de um portfólio de outros ativos disponíveis nesse mercado. A premissa básica da modelagem de Black & Scholes baseia-se no fato de que uma opção europeia, isto é, aquela que só pode ser exercida no dia de seu vencimento, pode ser replicada por um portfólio composto por determinada quantidade do ativo objeto e determinada quantidade de um *zero coupon risk-free bond*. Debaixo dessa premissa fundamental, além de uma série de outras, o risco de se vender (ou comprar) um derivativo sobre um ativo objeto num mercado completo pode ser totalmente neutralizado ao se fazer o *hedge* dinâmico no ativo objeto de forma contínua. Esse pilar, juntamente com as premissas de que:

i. o preço do ativo objeto (S) segue um movimento Browniano geométrico com *drift* (μ) e volatilidade (σ) constantes no tempo satisfazendo a clássica equação diferencial estocástica (SDE) $dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$;
ii. a taxa de juros livre de risco (r) existe e é constante durante a vida do derivativo;
iii. o ativo objeto não paga dividendos durante a vida do derivativo;
iv. o mercado é *frictionless*, isto é, não existem custos transacionais no ativo objeto nem existe *spread* para se comprar ou vender um *zero coupon risk-free bond*, ou seja, não há *spread* para se tomar ou dar dinheiro à taxa livre de risco;
v. o ativo objeto pode ser negociado em qualquer fração;
vi. o ativo objeto pode ser negociado a qualquer tempo;
vii. a negociação individual do ativo objeto não influencia no seu preço;

viii. não há oportunidades de arbitragem no mercado;

garantem que a equação diferencial de Black & Scholes possa ser resolvida analiticamente resultando no preço do derivativo.

Algumas premissas assumidas por Black & Scholes são inválidas no mundo real e geram impactos, em diferentes graus de relevância, na modelagem do derivativo. A análise desenvolvida nesse trabalho explora os impactos que (i) a premissa de que o mercado é *frictionless*; (ii) a premissa de que os retornos do ativo objeto seguem uma distribuição normal; e (iii) a premissa de que o ativo objeto pode ser negociado continuamente trazem à precificação da opção. Essas hipóteses estão, de certa forma, ligadas entre si na medida em que, no mundo real, o *delta hedge* é feito discretamente (e não continuamente) e a escolha de quando o mesmo ocorre (ou seja, a frequência de rebalanceamento da posição) está relacionada não só aos custos transacionais do ativo objeto mas também ao *hedging error* tolerado pelo participante que, por sua vez, está relacionado à distribuição de retornos do ativo objeto. Na prática, o fato de haver custos transacionais invalida a premissa do *delta hedge* contínuo, pois torna esse processo proibitivamente caro. Ainda que se considere um custo transacional significativamente baixo, a premissa do *delta hedge* contínuo implica em um infinito número de transações que, no limite, fazem o custo final do processo de *delta hedge* tender para o infinito. Finalmente, o fato de o mercado não estar disponível para a negociação do ativo objeto 24 horas por dia, sete dias por semana, por si, já invalida a premissa do *delta hedge* contínuo, possibilitando *gaps* de preço sem que haja tempo hábil para se efetuar o *hedge* e, consequentemente, neutralizar o impacto do *jump* de preço do ativo objeto na posição. Pode-se afirmar que este é um dos principais riscos para o *market maker* de opções.

Com essas premissas violadas, o princípio da redundância, pilar fundamental da precificação de Black & Scholes, fica em xeque. O que de fato observa-se na prática é uma tentativa dos *market makers* de incorporar os custos e riscos envolvidos na falha das premissas mencionadas acima aos preços nos quais eles estão dispostos a negociar determinada opção. Os *market makers*, pois, praticam dois preços distintos para uma mesma opção: *bid*, preço em que estão dispostos a compra-la e *ask*, preço em que estão dispostos a vendê-la. Existe, portanto, um *bid-ask spread* nas opções.

Este estudo tem como objetivo a análise do *bid-ask spread* de opções de compra sobre diferentes ações, prazos e níveis de *moneyness*, decompondo-o em três principais componentes, a saber:

(i) componente relacionado aos custos transacionais envolvidos no processo de *delta hedge* no ativo objeto, incluindo:

a. custos de *bid-ask* do próprio ativo objeto,
b. custos de emolumentos e outras taxas cobradas pela bolsa ao se transacionar o ativo objeto,
c. os custos de corretagens cobrados pelas corretoras ao se transacionar o ativo objeto,
d. o impacto do aluguel do ativo objeto.

(ii) Componente relacionado à diferença entre a distribuição real dos retornos do ativo objeto e a distribuição assumida por Black & Scholes.

(iii) Resíduo, que inclui o lucro do *market maker*, além de todos os outros componentes relacionados à transação em si.

Enquanto o primeiro item está relacionado à premissa assumida por Black & Scholes de custos transacionais nulos, o segundo item está, de certa forma, relacionado à premissa de *delta hedge* contínuo.

O restante da dissertação é composto das seguintes seções: na sequência desta introdução, o próximo capítulo comenta sucintamente alguns estudos sobre as principais premissas do clássico modelo de Black & Scholes, com destaque para os artigos relacionados à premissa de custos transacionais nulos e à premissa de *delta hedge* contínuo. Em linhas gerais, esses artigos propõem adaptações ao modelo de Black & Scholes de modo a contornar o aspecto prático de que algumas premissas assumidas por eles não são válidas no mundo real. Ainda nessa seção, descreve-se brevemente o modelo de Black & Scholes e apresenta-se o modelo de Leland, que ajusta o modelo de Black & Scholes de modo a levar em consideração os custos transacionais relacionados ao processo de *delta hedge* no ativo objeto. O modelo de Leland, por sua simplicidade matemática e praticidade na sua aplicação foi o modelo escolhido nesse projeto para a avaliação dos custos transacionais das opções estudadas e consequentemente para estimar o componente do *bid-ask spread* relacionado aos custos transacionais. A terceira parte descreve de forma sucinta os objetivos desse estudo, bem como a maneira pela qual os dados foram coletados. Descreve-se também as metodologias usadas para as análises propostas. Na quarta parte mostram-se os resultados obtidos e as avaliações dos mesmos. Por fim, o quinto capítulo apresenta as conclusões tiradas das análises feitas.

Os resultados desse trabalho mostram que, durante o período analisado, usando-se os dados coletados e usando-se as metodologias propostas, o *bid-ask spread* das opções de compra estudadas é formado, na média, de (i) um componente relacionado aos custos transacionais (na média, 51%

do *spread*); (ii) um componente relacionado à diferença de distribuição de retornos do ativo objeto (31% do *spread*); e (iii) um resíduo, que engloba todos os outros componentes do *bid-ask spread*, incluindo o lucro do *market maker*. O estudo mostra que, na média, os dois primeiros componentes representam em conjunto 82% do *bid-ask spread* das opções estudadas, de modo que o resíduo é uma pequena fração do *bid-ask spread*. Esse fato sugere que o lucro do *market maker* parece ser, na média, bastante pequeno, chegando a ser negativo em alguns casos estudados. Algumas explicações possíveis para a prática de *bid-ask spreads* estreitos assim são propostas ao final desta dissertação.

2 REVISÃO DE LITERATURA

As opções são, certamente, um dos instrumentos financeiros derivativos mais comuns no mercado financeiro. Uma opção de compra europeia (*call*) é um instrumento derivativo que dá ao seu titular o direito, mas não a obrigação, de comprar um determinado ativo financeiro em uma data futura (data de vencimento da opção) por um preço pré-determinado (preço de exercício ou *strike*). De maneira análoga, a opção de venda (*put*) é um instrumento derivativo que dá ao seu titular o direito, mas não a obrigação, de vender determinado ativo financeiro em uma data futura (data de vencimento da opção) por um preço pré-determinado (preço de exercício ou *strike*) na data hoje.

Black e Scholes (1973) propuseram um modelo para precificação de opções europeias de ativos que não pagam dividendos. Apesar de muitas melhorias e adaptações terem sido propostas ao modelo original tais como a possibilidade de precificar ativos que pagam dividendos, adaptação do modelo para opções de moedas, etc., o modelo original ainda é atualmente a base de precificação de opções sobre diversos ativos financeiros devido à sua relativa simplicidade, alta acurácia e baixo custo computacional. A contribuição do modelo de Black & Scholes para o desenvolvimento de melhores técnicas em outras áreas ligadas às finanças como controle e mensuração de riscos, análise de *valuation* de empresas, entre outras, é de importância ímpar.

O conceito de *delta hedging*, um dos pilares do modelo de Black & Scholes, foi descrito primeiramente por Thorp & Kassouf (1967). Apesar de grande avanço conceitual e matemático, a modelagem foi interrompida sem que a premissa da não-arbitragem fosse explorada de forma conclusiva, etapa que Black & Scholes desenvolveram com maestria.

Conforme mencionado anteriormente, algumas das premissas assumidas por Black & Scholes são inválidas no mundo real e diversos estudos já foram propostos de modo a contorná-las, e tornar o modelo original mais adaptado à realidade de mercado.

A premissa de que o ativo objeto não paga dividendos na modelagem original de Black & Scholes foi uma das primeiras premissas a ser contornada, já que, na prática, boa parte das ações de empresas listadas pagam dividendos frequentemente. A adaptação do modelo original para contemplar o pagamento de um dividendo contínuo é simples. Uma extensão direta desse ajuste resulta no modelo de precificação de opções da taxa de câmbio entre duas moedas, amplamente usado na comunidade financeira. Nessa adaptação, a taxa de juros associada a uma das moedas funciona de forma análoga a um dividendo de uma ação, pago de forma contínua. No entanto, no mundo real,

observa-se que as ações pagam dividendos de forma discreta, e não contínua. A adaptação do modelo original para que o mesmo considere a possibilidade de pagamentos de dividendos de forma discreta é mais complexa. No entanto, converter o pagamento de dividendos discreto para uma taxa contínua de pagamento de dividendos é uma aproximação simples que tem sido usada frequentemente em modelos por apresentar boa acurácia. Korn & Rogers (2005) adaptaram o modelo original de Black & Scholes de modo a contemplar dividendos pagos discretamente. O modelo proposto é versátil a ponto de considerar o pagamento do dividendo em data diferente da data de anúncio.

Outra premissa do modelo original de Black & Scholes que foi amplamente abordada por diversos estudiosos é a premissa de que a volatilidade do ativo objeto é constante durante a vida do derivativo. Na prática, a volatilidade do ativo objeto não é constante. Há trabalhos que desenvolvem a equação de Black & Scholes em ambiente de volatilidade estocástica com resultados bastante satisfatórios. Wiggins (1987), resolveu a equação de Black & Scholes com volatilidade estocástica numericamente, chegando a resultados bastante próximos dos resultados encontrados em ambiente de volatilidade constante para maioria dos casos testados. Wiggins (1987) destaca, no entanto, que para opções de prazo mais longo, o modelo de Black & Scholes com volatilidade fixa tende a superestimar *out-of-the-money calls* em relação às *in-the-money calls*. Heston (1993) propôs um modelo onde assumiu que a volatilidade do ativo objeto não é constante, nem mesmo determinística, mas segue um processo aleatório. Por ser de fácil calibragem e boa acurácia, o modelo de Heston é amplamente utilizado no mercado financeiro.

A premissa usada por Black & Scholes de que a taxa de juros livre de risco é constante também foi amplamente estudada e contornada não só por modelos alternativos, mas também por adaptações ao modelo original. Scott (1997) estudou como o modelo de Black & Scholes se comportava em ambientes de taxas de juros estocásticas, volatilidade estocástica e também, em ambientes onde se permitem *jumps* no ativo objeto.

Conforme observado nas citações mencionadas acima, algumas premissas do modelo original de Black & Scholes foram relaxadas através de adaptações no modelo original com resultados bastante satisfatórios. No entanto, há outras premissas, conhecidamente inválidas, cujos impactos são mais difíceis de se mensurar. A premissa da continuidade da negociação do ativo objeto e da ausência de custos transacionais são exemplos dessa natureza.

A premissa de que o *delta hedge* é feito de forma contínua não é real na prática. De fato, o *delta hedge* é feito de forma discreta. Em particular, no caso do mercado brasileiro de ações, essa

premissa é ainda mais frágil, dado que o mercado de ações fecha ao final do dia e reabre na manhã do dia seguinte. Por mais que se queira fazer o *delta hedge*, não há ambiente de negociação ativa no qual o participante possa atuar. Isso abre espaço para um risco relevante: o risco de *gaps* no preço do ativo objeto. O fato de o ativo objeto poder terminar o dia negociado a um certo preço e retomar a negociação no início do dia seguinte num preço significativamente diferente invalida a premissa de Black & Scholes de *delta hedge* contínuo, na medida em que a posição na ação e no *bond* (portfólio de replicação) não consegue, de fato, replicar a opção. Houve um *jump* no preço do ativo objeto sem que houvesse a possibilidade de se ajustar a posição (*delta hedge*) no mesmo.

Diversos artigos já abordaram esse assunto propondo alternativas ao modelo original de Black & Scholes de modo a comtemplar a possibilidade de *jumps* no preço do ativo objeto. Merton (1976), foi um dos primeiros estudiosos a discorrer sobre o tema do *delta hedging* discreto e da possibilidade de descontinuidade nos preços do ativo objeto. Merton propõe um modelo alternativo baseado no fato de que os retornos do ativo objeto se dão em ambiente misto de continuidade (*diffusion process* baseado no familiar movimento Browniano geométrico) e descontinuidade (baseado *jumps* governados por um processo de Poisson). O modelo proposto endereça o evento dos *fat tails*, que é atualmente um dos maiores riscos que os *market makers* correm na gestão de um *book* de opções. Esse risco certamente é precificado nos *bid-ask spreads* praticados pelos *market makers* no mercado. O trabalho citado, no entanto, não discorre sobre o efeito que a diferença entre a distribuição dos retornos empiricamente observada no mercado e a distribuição normal dos retornos (premissa assumida por Black &Scholes) tem nos *bid-ask spreads* das opções, efeito que o estudo apresentado nessa dissertação se propõe a analisar.

A premissa de Black & Scholes de que não existem custos transacionais é irremediavelmente inválida na prática. A dinâmica do processo de *delta hedge* é, na realidade, bastante cara, especialmente em ativos de liquidez mais pobre onde o *bid-ask spread* do ativo objeto é largo e em ambientes de negociação onde se cobram taxas de negociação altas.

Leland (1985) reconhece que os custos transacionais invalidam o modelo de Black & Scholes, pois ferem o argumento da não arbitragem, uma vez que o rebalanceamento contínuo implica em frequência de ajuste infinita, cujo custo é extremamente alto para ser implementado. O modelo de Leland propõe um ajuste na volatilidade usada no modelo de Black & Scholes de modo a compensar os custos transacionais envolvidos no processo de *delta hedging*. Conforme esse estudo mostrará mais adiante, esse ajuste na volatilidade depende do tamanho do *bid-ask spread* no ativo

objeto, das taxas de negociação e corretagem cobradas pelas bolsas e corretoras, e do intervalo de tempo discreto entre os rebalanceamentos.

Soner, Shreve e Cvitanic (1995) provam que o portfólio de replicação mais barato para fazer o *hedge* de uma posição comprada em uma *call* é vender uma unidade do ativo objeto e carregar essa posição até o vencimento da opção. Apesar dessa estratégia ser a mais barata em termos de custos transacionais, ela não é, nem de longe, a mais eficiente do ponto de vista de risco, pois há exposição líquida ao ativo objeto (risco de *delta*), raramente desejada pelos *market makers* de opções.

Bensaid, Lesne, Pagés e Scheinkman (1992) tentaram achar o portfólio ótimo para se replicar uma *call* num ambiente com custos transacionais. Similar ao estudo de Soner, Shreve e Cvitanic (1995), esse estudo propõe que se negocie uma certa quantidade de ativo objeto cercada por dois valores: um mínimo e um máximo de ações que seriam suficientes para garantir o *payoff* da *call* no vencimento. Dessa forma, não haveria nenhum rebalanceamento durante a vida da *call* e, em princípio, haveria economia de custos transacionais *vs.* um possível exagero (ou falta) do ativo objeto para *hedge*.

2.1 O modelo de Black & Scholes

Nos próximos parágrafos, descreve-se breve e sucintamente o modelo clássico de Black & Scholes.

Por simplicidade, porém sem perda de generalidade, nesse projeto, trabalhou-se com a opção de compra europeia (*call*). O valor de uma *call* europeia é função de dois parâmetros do contrato: (i) o preço de exercício (*strike*) K; e (ii) o tempo até o vencimento do contrato (T – t), onde T é o ponto no tempo quando se observa o vencimento da opção e t é o momento no tempo atual. Segundo Black & Scholes, o valor da *call* também depende das propriedades do ativo objeto como: (i) seu preço *spot* S_t, isto é, o preço do ativo objeto no momento t; (ii) sua taxa de crescimento (ou *drift*) μ; (iii) sua volatilidade (constante) σ; e (iv) da taxa de juros livre de risco (constante) r praticada para o período da vida do derivativo. O preço da *call* V no momento t é, portanto, uma função:

$$V_t = V(S_t, t; \sigma, \mu; K, T; r)$$

Considera-se S e t variáveis, σ e μ parâmetros associados ao preço do ativo objeto, K e T parâmetros associados aos detalhes do contrato em questão e r parâmetro associado à moeda na

qual o ativo objeto é cotado. Para simplificar a leitura, nesse trabalho usa-se V (S_t, t) para denotar o valor de uma *call* europeia, optando por suprimir da notação, os parâmetros descritos acima.

É simples perceber que, quanto maior for o preço do ativo objeto, maior será o valor da *call*, dado que o *payoff* da mesma é maior quanto maior for o valor do ativo objeto. Essa correlação positiva entre o preço da *call* e o preço do ativo objeto foi explorada por Black & Scholes na formulação do famoso modelo de precificação (conceito de *delta hedge*).

Seja π o valor de uma posição comprada em uma *call* e vendida em Δ ações do ativo objeto. Devido à correlação positiva entre o preço da *call* e o preço do ativo objeto, essa posição tem a propriedade de sofrer variações de valor bem pequenas, especialmente se o valor de Δ for um número apropriado. O valor dessa posição especial num momento t é:

$$\pi = V(S_t, t) - \Delta_t S_t \tag{2.1}$$

O primeiro termo do lado direito da equação representa o valor da posição comprada em uma *call* e o segundo termo representa o valor da posição vendida em Δ_t ações. O valor de Δ_t nesse momento é uma constante arbitrária e posteriormente será conveniente defini-lo. Para uma leitura mais limpa e fácil, durante o restante desta seção, suprimir-se-á o susbcrito t nas equações apresentadas.

O modelo de Black & Scholes assume que o ativo objeto segue um movimento Browniano geométrico de *drift* μ e volatilidade σ regido pela seguinte equação diferencial estocástica (SDE):

$$dS = \mu S dt + \sigma S dX$$

É natural querer entender a dinâmica de mudança de valor da posição π do momento t para o momento t + dt. A mudança de valor nesse portfolio é oriunda (i) da mudança de preço do ativo objeto (mudança essa regida pela equação diferencial estocástica acima) e (ii) da mudança de preço da *call*, que por sua vez também depende da variação de preço do ativo objeto. Assim,

$$d\pi = dV - \Delta dS$$

Do lema de Itô temos:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt$$

Portanto a mudança de valor da posição fica:

$$d\pi = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt - \Delta dS \tag{2.2}$$

O lado direito da equação (2.2) contém dois tipos de termos: um determinístico e outro randômico. Os termos do tipo determinísticos são aqueles relacionados com dt e os termos do tipo randômicos são aqueles relacionados com dS.

Os termos randômicos da equação (2.2) podem ser agrupados, resultando em:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta\right) dS$$

Dado que dS é randômico, esses termos combinados representam o risco da posição π. Se escolhermos Δ de tal maneira que

$$\left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta\right) = 0$$

pode-se então eliminar o risco desse portfólio! Dessa forma,

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S} \tag{2.3}$$

O processo de redução ou eliminação dos termos randômicos de um portfólio é geralmente chamado de *hedging*. A eliminação do risco pela exploração da correlação entre dois instrumentos financeiros (nesse caso a *call* e o ativo objeto) é chamado de *delta hedging*.

Após escolher o *delta* de acordo com a equação (2.3) e eliminar o termo randômico do portfólio π, a mudança de valor no portfólio após o intervalo de tempo dt é dada pela equação:

$$d\pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt \tag{2.4}$$

A mudança no valor desse portfólio não tem risco e pelo conceito de não arbitragem, essa mudança deverá ser exatamente igual à mudança no valor de um título livre de risco após passado o intervalo de tempo dt. Assim,

$$d\pi = r\pi\, dt \tag{2.5}$$

Substituindo (2.1), (2.3) e (2.4) na equação (2.5) temos:

$$\frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt - \frac{\partial V}{\partial S} dS = r\left(V - \frac{\partial V}{\partial S} S\right) dt$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt = r\left(V - \frac{\partial V}{\partial S} S\right) dt$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \tag{2.6}$$

A equação diferencial de Black & Scholes é a equação (2.6). Ela foi primeiramente escrita em 1969, mas só foi oficialmente publicada em 1973. A equação (2.6) é do tipo diferencial linear

parabólica, similar à equação de difusão de calor usada em mecânica. Esse tipo de equação é relativamente fácil de resolvida usando-se métodos numéricos. Dependendo de alguns parâmetros, a equação pode ser resolvida analiticamente.

A equação diferencial de Black & Scholes contém todas as variáveis e parâmetros comentados anteriormente. No entanto, não há referência ao *drift* μ do ativo objeto. Qualquer referência ao *drift* foi suprimida quando, com a escolha adequada de Δ, eliminou-se da equação os termos randômicos ligados a dS. O argumento econômico para isso está baseado no fato de que, de forma contínua, pode-se fazer um perfeito *hedge* da *call* com Δ ações do ativo objeto e certa quantidade de caixa aplicado à taxa de juros livre de risco. Dessa forma, o participante não deve ser recompensado por tomar riscos desnecessários no ativo objeto. Somente aparece na equação de Black & Scholes a taxa de juros livre de risco. Isso significa que, quando se determina a volatilidade do ativo objeto, determina-se também o valor de seus derivativos, mesmo que se tenham expectativas distintas sobre o *drift* do ativo objeto.

Dentre as diversas premissas que regem a equação de Black & Scholes destacam-se:

- **O ativo objeto segue a SDE $\boldsymbol{dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dX_t}$** – Para que se encontrem soluções explícitas, o termo randômico na equação diferencial estocástica que rege o movimento de S precisa ser proporcional a S. O fator σ não precisa ser constante; precisa depender somente do tempo. Conforme mencionado anteriormente, há trabalhos que desenvolvem a equação de Black & Scholes em ambiente de volatilidade estocástica com resultados bastante satisfatórios. A equação original de Black & Scholes também não é invalidada, se a volatilidade depender do preço do ativo. No entanto, soluções analíticas podem não existir.
- ***Delta hedge* é feito de forma contínua** – Essa premissa é impossível de ser observada na prática, onde o processo de *delta hedging* é, de fato, feito de forma discreta. No limite, pode-se diminuir o intervalo de tempo entre cada rebalanceamento de modo a tentar se aproximar ao máximo do *delta hedging* contínuo proposto por Black & Scholes. No entanto, o custo transacional incorrido seria extremamente proibitivo. Na prática, a frequência do *delta hedging* está intimamente ligada aos custos transacionais existente no processo de *delta hedging*. Um outro aspecto importante é o fato de a grande maioria de ativos financeiros não negociar de forma contínua. O mercado brasileiro de ações e moedas, por exemplo, tem horários de negociação definidos pelas

bolsas. Dessa forma, mesmo que se deseje fazer *delta hedge* continuamente, o horário de negociação dos ativos impossibilita o procedimento, dado que priva o participante de atuar no momento desejado.

- **Não há custos transacionais no ativo objeto** – Essa é uma premissa falha A dinâmica do processo de *delta hedging* é, na realidade, bastante cara já que para negociar o ativo objeto há custos diretos cobrados pelas bolsas, corretoras, etc.. Há também custos indiretos relacionados ao *bid-ask spread* do ativo objeto bem como a sua própria liquidez.

Em particular, a premissa do *delta hedging* contínuo juntamente à premissa de ausência de custos transacionais são difíceis de serem relaxadas. Existem alguns trabalhos publicados sobre esses dois temas e sobre como o modelo original pode ser adaptado para a realidade prática das premissas acima.

2.2 O modelo de Leland

Um pilar importante da teoria de precificação de opções desenvolvida por Black & Scholes em 1973 é o conceito da não arbitragem. Ao ajustar-se continuamente uma posição composta por uma ação e um título de renda fixa sem risco, consegue-se replicar exatamente o *payoff* de uma *call* sobre essa ação. O valor da *call*, portanto, deve ser igual ao valor do portfólio replicado.

No entanto, a premissa de ajuste contínuo do portfólio é falha. Quando se tem custos transacionais, o processo de *delta hedging* contínuo torna-se proibitivamente caro, independentemente do custo transacional envolvido.

Uma alternativa à premissa do *delta hedging* contínuo é assumir que o rebalanceamento da posição acontece em intervalos de tempo discretos. Dessa forma, limitam-se os custos transacionais da estratégia de replicação. Boyle e Emanuel (1980) discorreram sobre o processo de *delta hedging* discreto e concluíram que, se a frequência do ajuste discreto for razoavelmente alta, o processo de *delta hedging* discreto se aproxima de forma satisfatória do processo contínuo assumido por Black & Scholes. No entanto, quanto mais frequente for o rebalanceamento do portfólio de replicação, mais altos serão os custos transacionais associados. Ou seja, no mundo real, existe um trade-off entre o custo transacional do rebalanceamento e o risco de descasamento entre o derivativo e o portfólio de replicação.

Um dos mais relevantes trabalhos sobre o processo de *delta-hedging* considerando os custos transacionais foi publicado por Leland (1985). Nesse trabalho, Leland propôs um modelo alternativo de replicação que depende dos custos transacionais para se negociar o ativo objeto e do intervalo de tempo entre os rebalanceamentos discretos. Esse modelo resulta em (i) custos transacionais finitos, mesmo quando o intervalo de tempo entre os rebalanceamentos for pequeno; e (ii) uma estratégia de replicação que inclui os custos transacionais com erros descorrelacionados com o preço do ativo objeto e que tende a zero quando o intervalo de tempo entre os rebalanceamentos tende a zero.

No mundo sem custos transacionais, ou seja, no modelo original de Black & Scholes, o valor de uma *call* europeia V (S; K; T; r, σ) quando o preço do ativo objeto é S, o *strike* da *call* é K, o tempo até o vencimento é T, a taxa de jutos livre de risco para o período T é r e o desvio padrão dos retornos logarítmicos do ativo objeto (volatilidade) é σ, o modelo de Black & Scholes mostra que o valor da *call* é

$$V = SN(d_1) - Ke^{-rT}N\left(d_1 - \sigma\sqrt{T}\right)$$

Onde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{Ke^{-r}}\right)}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}$$

O modelo de Leland propõe uma alteração na volatilidade tradicionalmente usada no modelo de Black & Scholes, de modo a compensar os custos transacionais associados ao processo de *delta hedging*. Leland assume que os custos transacionais são proporcionais ao volume financeiro transacionado em cada rebalanceamento. Essa premissa está em linha com a maioria das bolsas de valores espalhadas pelo mundo, cujos custos cobrados dos participantes de mercado são calculados como sendo uma fração do volume financeiro negociado. A premissa está em linha também com a maiorias das corretoras de valores que cobram corretagens como uma fração do volume financeiro transacionado. Finalmente, a premissa está em linha com os custos de *bid-ask* do ativo objeto na medida em que se pode definir esse custo como uma fração do preço do ativo objeto.

Seja uma ação cujo preço corrente é S e, em dado momento, esse ativo é negociado no mercado com um preço de compra (*bid)* S_{bid} e um preço de venda (*ask)* S_{ask}. Ao se negociar essa ação no mercado, o preço final no qual essa ação é transacionada pelo participante é, na prática, o

preço original ajustado pelos custos da bolsa e pelos custos de corretagem. Seja S_{bidnet} o preço final de compra da ação e S_{asknet} o preço final de venda da ação. Assim,

$$S_{bidnet} = S_{bid} - custos\ de\ bolsa\ e\ corretagem$$

e

$$S_{asknet} = S_{ask} + custos\ de\ bolsa\ e\ corretagem$$

Seja c o custo final de *bid-ask* dessa ação medido como uma fração do preço do próprio ativo.

$$c = \frac{S_{asknet} - S_{bidnet}}{S}$$

Leland define a variância ajustada dos retornos logarítmicos do ativo objeto como sendo:

$$\sigma^2_{adj}(\sigma^2, c\ , \Delta t) = \sigma^2 \left[1 \pm \frac{cE\left|\frac{\Delta S}{S}\right|}{\sigma^2\sqrt{\Delta t}}\right]$$

Onde, σ^2 é a variância dos retornos logarítmicos do ativo objeto, Δt é o intervalo de tempo entre os rebalanceamentos e o sinal + ou – está relacionado ao lado da transação da *call* (compra ou venda).

A equação acima pode ser simplificada se considerarmos que $\frac{\Delta S}{S}$ é normalmente distribuído com média zero. Desta forma,

$$E\left|\frac{\Delta S}{S}\right| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \sigma\ \Delta t.$$

Definindo *Leland number*, Le, como sendo:

$$Le = \frac{c}{\sigma\sqrt{\Delta t}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Temos:

$$\sigma^2_{adjbid}(\sigma^2, c\ , \Delta t) = \sigma^2[1 - Le]$$

$$\sigma^2_{adjask}(\sigma^2, c\ , \Delta t) = \sigma^2[1 + Le]$$

Leland mostra que, na presença de custos transacionais, existe uma estratégia de replicação alternativa baseada no clássico modelo de Black & Scholes, mas que usa uma volatilidade ajustada, baseada na variância ajustada σ^2_{adj}. Esse ajuste na volatilidade leva em consideração os custos transacionais (incluindo custo de *bid-ask*, custos de bolsa e custos de corretagem) do ativo objeto c, o

intervalo de tempo entre os rebalanceamentos discretos do portfólio Δt, além da própria volatilidade usada no modelo clássico de Black & Scholes.

Dessa forma, o valor *call* no modelo de Leland é calculado usando-se o modelo clássico de Black & Scholes, mas, no lugar da volatilidade dos retornos do ativo objeto σ, usa-se a volatilidade ajustada σ_{adj}. Portanto,

$$V_{adj}(S, K, \sigma, r, T, c, \Delta t) \ = SN\left(d_{1adj}\right) - Ke^{-rT}N\left(d_{1adj} - \sigma_{adj}\sqrt{T}\right)$$

Onde

$$d_{1adj} = \frac{\ln\left(\frac{S}{Ke^{-rT}}\right)}{\sigma_{adj}\sqrt{T}} - \frac{\sigma_{adj}\sqrt{T}}{2}$$

A ideia de Leland é simples em sua essência, apesar de complexa em termos matemáticos. Na presença de custos transacionais, o preço do ativo objeto quando ele precisa ser comprado no processo de *delta hedging* é $S_{ask\text{net}}$, que é levemente superior ao preço considerado pelo modelo de Black & Scholes S. De forma análoga, o preço do ativo objeto, quando ele precisa ser vendido no processo de *delta hedging* é $S_{bid\text{net}}$, que é levemente inferior ao preço considerado pelo modelo de Black & Scholes S. Portanto, o preço de fato praticado no processo de *delta hedging* é um preço pior que o preço observado no mercado em ambos os lados da transação. Leland modela essa piora no preço como sendo um incremento na volatilidade do ativo objeto. Portanto, Leland propõe compensar os custos transacionais ajustando-se a volatilidade utilizada no modelo de Black & Scholes apropriadamente.

O custo consolidado do processo de *delta hedging* de uma transação depende do caminho percorrido pelo ativo objeto durante a vida da *call*. O caminho percorrido pelo ativo determinará quão intenso o rebalanceamento será. Em linha com a intuição, a volatilidade ajustada de Leland é diretamente proporcional aos custos transacionais; e é inversamente proporcional à frequência dos rebalanceamentos. Dessa forma, quanto maior for a frequência dos rebalanceamentos, e quanto menor forem os custos transacionais, o modelo alternativo de Leland converge para o modelo de Black & Scholes, cujas premissas assumem frequência de *delta hedge* infinita (ou seja, rebalanceamento contínuo) e sem custo algum.

Certamente o modelo de Leland não é perfeito e há críticas ao mesmo. Leland não considera, por exemplo, a variação do preço do ativo objeto como sendo uma variável na determinação do custo do processo de *delta hedge*; Leland opta por usar a frequência entre os rebalanceamentos como variável determinante. No caso da magnitude da variação do preço do ativo objeto ser baixa

dentro de um intervalo de tempo grande, o modelo de Leland tende a superestimar os custos transacionais pois o modelo pressupõe rebalanceamentos que poderiam não existir devido ao pequeno descasamento entre o derivativo e o portfólio de replicação.

Diferente da abordagem de Leland (985), Clewlow e Hodges (1997) lidam com a questão do *delta hedging* na presença de custos transacionais de forma a maximizar e utilidade esperada, minimizando a função que calcula o erro de replicação. Dependendo do parâmetro de aversão ao risco, obtém-se uma dinâmica de *hedge* mais apertada, porém mais cara, ou uma dinâmica mais relaxada, todavia mais barata.

No estudo ora apresentado, optou-se pelo modelo de Leland para se estimar os custos transacionais do processo de *delta hedging* de uma posição comprada em uma *call*. Além da simples abordagem matemática, o modelo de Leland proporciona uma rapidez computacional determinante para que se pudesse analisar diversas opções como o restante dessa dissertação mostrará.

3 OBJETIVOS, METODOLOGIA E LEVANTAMENTO DE DADOS

3.1 Objetivos

Esse trabalho tem por objetivo principal analisar o tamanhos do *bid-ask spread* de algumas opções de compra sobre diferentes ações brasileiras e entender se eles são, de fato largos como alguns usuários desses instrumentos financeiros têm afirmado.

A análise proposta busca separar os principais componentes do *bid-ask spread*, a saber, (i) componente relacionado aos custos transacionais de *delta hedge*; (ii) componente relacionado à diferença entre a distribuição de retornos do ativo objeto observada no mercado e a distribuição de retornos assumida por Black & Scholes (normal); e (iii) componente residual relacionado a outros custos e riscos incorridos pelo *market maker* (custo de balanço, custo de capital, custo de oportunidade, riscos associados à posição, etc.), incluindo o lucro do *market maker*.

Sem perda de generalidade, esse estudo focou-se apenas nas opções de compra, mas os modelos e cálculos utilizados podem ser facilmente replicados para as opções de venda.

3.2 Metodologia e levantamento de dados

Nesse estudo, analisou-se o *bid-ask spread* de nove opções de compra do tipo europeia sobre cinco ações distintas do mercado brasileiro durante os meses de outubro e novembro de 2017. Para cada um dos 5 ativos objeto, as nove opções de compra estudadas tinham prazos de três, seis e doze meses, cujos preços de exercício foram tais que os *deltas* iniciais de cada uma delas foram de aproximadamente 25%, 50% e 75%. Assim, analisou-se um amplo intervalo de *gamma*[1] de forma que o estudo não se limitasse a determinado padrão de opção, mas sim a um amplo leque de prazos (curto, médio e longo prazos) e *strikes* (out-of-the-money, in-the-money e at-the-money).

Os ativos objeto das opções estudadas foram:VALE3, ITUB4, ABEV3, GGBR4 e PCAR4. No período de estudo, essas ações faziam parte do principal índice de ações da B3, o índice Ibovespa, com os seguintes pesos aproximados: 10.8%, 9.7%, 7.3%, 1% e 1% respectivamente. Os ativos objetos estudados foram selecionados para que se pudessem analisar papéis de diferentes:

(i) setores da economia brasileira,

1 *Gamma* é a grega que indica a variação do delta de uma opção em relação ao preço do ativo. Está intimamente ligada à frequência do rebalanceamento e a o custo transacional da opção.

(ii) níveis de volatilidade absoluta,

(iii) graus de liquidez (não somente do ativo objeto, mas também de suas opções),

(iv) diferentes tamanhos *de bid-ask spread* do ativo objeto,

a fim de, novamente, não se limitar a determinado padrão de ativo objeto.

Usou-se como data base para precificação inicial das opções o dia 3 de dezembro de 2017. As taxas de juros livre de risco para os prazos das opções foram obtidas da curva de juros baseada nas taxas futuras de deposito interfinanceiro (DI) negociadas na B3 na data base. As taxas de aluguel usadas para cada ativo objeto foram as médias de 20 dias obtidas na CBLC na data base. De acordo com dados históricos, as taxas de aluguel para os ativos objetos selecionados tiveram pouca variação ao longo do tempo de modo que, na modelagem, considerou-se que as mesmas foram constantes. As taxas de aluguel foram embutidas às taxas de juros livre de risco, que foram assumidas constantes durante a vida da opção.

A observação do *bid-ask spread* de mercado das 45 opções estudadas foi feita através da solicitação de cotação das opções estudadas para três dos mais atuantes *market maker*s diferentes no mercado brasileiro de opções. A coletas desses *bid-ask spreads* se deu duas vezes por semana durante os meses de outubro e novembro de 2017. Durante esse período, não se observou nenhuma mudança significativa no tamanho dos *bid-ask spreads*. Também não se observou nenhum evento de mercado ou "choque" que pudesse interferir nos *spreads* coletados de maneira atípica.

Os detalhes das opções estudadas encontram-se nos anexos ao final dessa dissertação.

A análise proposta nesse estudo foi separada em duas partes. A parte 1 focou no componente do *bid-ask spread* da opção que está relacionado aos custos transacionais do ativo objeto. A parte 2 focou no componente do *bid-ask spread* da opção que está relacionado à diferença entre a distribuição real dos retornos do ativo objeto e a distribuição assumida no modelo de Black & Scholes (retornos logarítmicos normalmente distribuídos).

Sem perda de generalidade, esse estudo abordou somente o caso onde o *market maker* está comprado em uma *call* (e vendido no ativo objeto) fazendo-se *delta hedge* da posição até o vencimento da opção. A posição oposta, isto é, a posição onde o *market maker* está vendido na *call* e comprado no ativo objeto é análoga.

3.2.1 **Parte 1** - Análise do componente do *bid-ask spread* da opção que está relacionado aos custos transacionais do ativo objeto

Para análise do componente do *bid-ask spread* da opção que está relacionado aos custos transacionais do ativo objeto, procedeu-se da seguinte forma. Para cada ativo objeto, prazo e preço de exercício, simularam-se 1.000 possíveis caminhos desenvolvidos pelo ativo objeto, desde a data base (início da posição) até o vencimento da opção usando-se a clássica simulação de Monte Carlo. Nessas simulações, usou-se como *drift*, a taxa de juros livre de risco para o prazo de cada opção analisada e, como volatilidade, o ***mid*** *market* de volatilidade observado no mercado para cada opção em questão. Levou-se também em consideração o custo de aluguel do ativo objeto para o prazo da opção analisada. Ressalta-se que no Brasil, os dividendos (ou qualquer outro provento) não impactam a precificação das opções, uma vez que os preços de exercícios são automaticamente ajustados (isto é, reduzidos) pelo valor do provento, na data em que as ações passam a negociar *ex-provento*.

Para simplificar essa análise, porém sem perder generalidade, o intervalo de tempo entre cada observação foi de um dia útil e o intervalo de tempo entre cada rebalanceamento do portfólio (*delta hedge*) também foi de um dia útil. Portanto, ao final de cada dia útil, recalculou-se o *delta* da opção e rebalanceou-se se o portfólio através da compra ou da venda do ativo objeto de modo a trazer novamente o portfólio para a posição *delta* neutra. Ressalta-se que toda a análise apresentada reflete a posição sob a ótica do *market maker* (e não sob a ótica do cliente final). Portanto, em determinada observação, caso o ajuste do portfólio tenha sido feito comprando-se de ações, o preço do ativo objeto utilizado na transação foi o preço de venda simulado. No caso de o ajuste ter sido feito vendendo-se ações, o preço do ativo objeto utilizado foi o preço de compra simulado. O preço de compra simulado é igual ao preço gerado pela simulação de Monte Carlo subtraído (i) de metade do *bid-ask spread* médio do ativo objeto; e (ii) dos custos de bolsa e corretagem. Analogamente, o preço de venda simulado é igual ao preço gerado pela simulação de Monte Carlo acrescido (i) de metade do *bid-ask spread* médio do ativo objeto; e (ii) dos custos de bolsa e corretagem. Dessa forma, a cada rebalanceamento do portfólio, isto é, a cada compra ou venda de ações do ativo objeto para o *delta hedge*, introduziu-se um custo de transação que é função do *bid-ask spread* do ativo objeto e do seu preço simulado.

O *bid-ask* médio de cada ativo objeto foi calculado através da média simples de 220 observações de *bid-ask spread*, coletadas quatro vezes ao dia (precisamente às 10h30, 12h30, 14h30 e 16h30) durante 55 dias úteis, consecutivos e findos no dia 3 de dezembro de 2017. Esses valores estão apresentados nos Anexos.

Os custos de corretagem foram fixados em 1 bps (em linha com os valores praticados pelas maiores corretoras *discount* do mercado brasileiro). Os custos da bolsa (emolumentos e outras taxas) foram fixados em 2.5 bps sobre o preço do ativo objeto transacionado (em linha com os valores praticados pela B3).

Prosseguiu-se para a apuração do resultado financeiro (lucro ou prejuízo) consolidado da posição, que foi obtido pela soma de quatro parcelas: (i) o resultado da posição comprada em uma opção de compra; (ii) o resultado da posição vendida em *delta* ações do ativo objeto; (iii) o resultado da aplicação do caixa líquido disponível à taxa livre de risco; e (iv) o resultado (negativo) dos custos transacionais relacionados ao processo de *delta hedging* da posição descritos na seção anterior. Como optou-se por fazer o *delta hedge* uma vez ao dia, a apuração do resultado também foi feita diariamente e o resultado consolidado nada mais é que o somatório dos resultados diários. Desta forma, conseguiu-se calcular o resultado consolidado de cada uma das 45 posições analisadas (três prazos distintos, três *strikes* distintos e cinco ativos objeto diferentes). Repetiu-se esse procedimento em 1.000 simulações de caminhos do ativo objeto, gerando para cada uma das 45 posições analisadas em cada ativo objeto uma distribuição de resultado consolidado. Finalmente, observou-se o percentil em que o resultado consolidado da posição foi positivo.

Na seção de avaliação dos resultados, nas tabelas 11 e 13, mostra-se que, ao se considerar os custos transacionais, o percentil de resultados positivos é menor do que o percentil de 50% que é esperado numa posição comprada em uma *call* e vendida no ativo objeto carregada até o vencimento, fazendo-se o *delta hedge* correspondente. Quando se consideraram os custos transacionais, o percentil de resultados positivos foi tão menor quanto maior foi o valor dos custos transacionais, que por sua vez, é uma função do *bid-ask spread* no ativo objeto, das taxas da bolsa, da corretagem cobrada e da taxa de aluguel.

Prosseguiu-se com a análise e, para cada uma das nove opções analisadas em cada um dos cinco ativos objeto, repetiram-se as 1.000 simulações de Monte Carlo, usando-se novamente o ***mid*** *market* de volatilidade. No entanto, desta vez considerou-se que a compra da opção se deu no ***bid***

market de volatilidade observado no mercado (e não no ***mid*** *market* de volatilidade como fora feito anteriormente). Conforme a intuição, esse percentil aumentou em relação à simulação anterior e foi superior a 50%, pois ao comprar a opção no ***bid*** *market* de volatilidade, o *market maker* compensou os custos transacionais envolvidos na posição, obtendo resultado positivo em mais da metade das vezes.

Na seção de avaliação dos resultados, na tabela 15, mostra-se que o percentil de resultados positivos foi, de fato, superior a 50% em todas as opções analisadas quando o *market maker* as comprou no *bid market* de volatilidade.

A definição do *bid-ask spread* de volatilidade de cada uma das nove opções analisadas para cada um dos cinco ativos objeto foi feita através da solicitação de preços indicativos destas 45 opções a três dos maiores *market makers* de opções do mercado brasileiro. Essa coleta de preços foi feita duas vezes por semana, durante os meses de outubro de novembro de 2017. Observou-se pouca variação no tamanho dos *bid-ask spreads* durante esse período, embora a volatilidade absoluta tenha variado de uma coleta para outra. Calculou-se um *bid-ask spread* médio das observações que está sintetizado nas tabelas 01 a 05 abaixo.

Tabela 01 – Bid-ask spread de mercado das opções estudadas – VALE3.

Ativo Objeto	**VALE3**	Preço de Referência (R$)		36.18		
Preço de Exercício (R$)	Prazo (dias corridos)	Volatilidade Bid (% a.a.)	Volatilidade Ask (% a.a.)	Bid - Ask Spread (%)	Volatilidade Mid (% a.a.)	Preço B&S (R$)
41.00	92	27.73%	30.56%	2.83%	29.14%	0.0620
37.00	92	28.92%	31.75%	2.83%	30.33%	0.0772
33.50	92	30.93%	33.77%	2.83%	32.35%	0.0568
44.00	182	28.09%	32.09%	4.00%	30.09%	0.0424
38.00	182	29.67%	33.67%	4.00%	31.67%	0.0504
33.00	182	32.09%	36.09%	4.00%	34.09%	0.0380
49.00	363	29.76%	34.09%	4.33%	31.92%	0.0299
40.00	363	31.00%	35.33%	4.33%	33.17%	0.0348
33.50	363	34.03%	38.36%	4.33%	36.19%	0.0263

Tabela 02 – Bid-ask spread de mercado das opções estudadas – ITUB4.

Ativo Objeto	**ITUB4**	Preço de Referência (R$)		41.59		
Preço de Exercício (R$)	Prazo (dias corridos)	Volatilidade Bid (% a.a.)	Volatilidade Ask (% a.a.)	Bid - Ask Spread (%)	Volatilidade Mid (% a.a.)	Preço B&S (R$)
47.00	92	28.38%	31.05%	2.67%	29.72%	0.0547
42.70	92	29.50%	32.17%	2.67%	30.83%	0.0672
38.70	92	31.51%	34.17%	2.67%	32.84%	0.0505
50.40	182	29.56%	33.39%	3.83%	31.48%	0.0378
43.80	182	31.08%	34.92%	3.83%	33.00%	0.0453
38.10	182	33.48%	37.32%	3.83%	35.40%	0.0342
56.50	363	30.36%	34.19%	3.83%	32.27%	0.0261
46.30	363	31.58%	35.42%	3.83%	33.50%	0.0313
37.90	363	34.95%	38.78%	3.83%	36.86%	0.0226

Tabela 03 – Bid-ask spread de mercado das opções estudadas – ABEV3.

Ativo Objeto	**ABEV3**	Preço de Referência (R$)		20.55		
Preço de Exercício (R$)	Prazo (dias corridos)	Volatilidade Bid (% a.a.)	Volatilidade Ask (% a.a.)	Bid - Ask Spread (%)	Volatilidade Mid (% a.a.)	Preço B&S (R$)
22.10	92	17.58%	20.25%	2.67%	18.92%	0.1825
20.90	92	18.25%	20.92%	2.67%	19.58%	0.2064
19.80	92	19.40%	22.07%	2.67%	20.74%	0.1629
23.10	182	19.40%	21.90%	2.50%	20.65%	0.1221
21.00	182	20.50%	22.83%	2.33%	21.67%	0.1287
19.70	182	21.61%	23.94%	2.33%	22.77%	0.1060
24.80	363	20.20%	22.70%	2.50%	21.45%	0.0854
22.20	363	20.83%	23.17%	2.33%	22.00%	0.0934
19.85	363	22.88%	25.22%	2.33%	24.05%	0.0709

Tabela 04 – Bid-ask spread de mercado das opções estudadas – GGBR4.

Ativo Objeto	**GGBR4**	Preço de Referência (R$)		11.13		
Preço de Exercício (R$)	Prazo (dias corridos)	Volatilidade Bid (% a.a.)	Volatilidade Ask (% a.a.)	Bid - Ask Spread (%)	Volatilidade Mid (% a.a.)	Preço B&S (R$)
12.75	92	31.04%	35.38%	4.33%	33.21%	0.1789
11.50	92	32.25%	36.58%	4.33%	34.42%	0.2143
10.25	92	34.58%	38.91%	4.33%	36.75%	0.1628
13.75	182	32.15%	35.32%	3.17%	33.74%	0.1234
11.75	182	33.83%	37.00%	3.17%	35.42%	0.1414
10.00	182	36.58%	39.75%	3.17%	38.17%	0.1066
15.75	363	35.54%	38.71%	3.17%	37.12%	0.0840
12.50	363	37.00%	40.17%	3.17%	38.58%	0.0978
10.00	363	40.70%	43.87%	3.17%	42.29%	0.0718

Tabela 05 – Bid-ask spread de mercado das opções estudadas – PCAR4.

Ativo Objeto	**PCAR4**	Preço de Referência (R$)		73.30		
Preço de Exercício (R$)	Prazo (dias corridos)	Volatilidade Bid (% a.a.)	Volatilidade Ask (% a.a.)	Bid - Ask Spread (%)	Volatilidade Mid (% a.a.)	Preço B&S (R$)
83.00	92	26.66%	29.99%	3.33%	28.33%	0.0312
75.25	92	27.80%	31.13%	3.33%	29.47%	0.0398
68.00	92	29.86%	33.19%	3.33%	31.53%	0.0290
88.75	182	25.74%	30.24%	4.50%	27.99%	0.0220
77.25	182	27.25%	31.75%	4.50%	29.50%	0.0275
67.00	182	29.70%	34.20%	4.50%	31.95%	0.0201
99.75	363	25.97%	30.81%	4.83%	28.39%	0.0152
81.50	363	27.22%	32.05%	4.83%	29.63%	0.0195
66.75	363	30.57%	35.40%	4.83%	32.99%	0.0137

Prosseguiu-se com o estudo para a última etapa da parte 1 da análise do componente do *bid-ask spread* da opção que está relacionado aos custos transacionais do ativo objeto. Nessa etapa, para cada uma das nove opções analisadas em cada um dos cinco ativos objeto, repetiram-se, mais uma vez as 1.000 simulações de Monte Carlo e para gerar cada um dos 1.000 caminhos do ativo objeto, usou-se novamente o *mid market* de volatilidade. Considerou-se agora a compra da opção

no ***bid*** *market* de volatilidade sugerido pelo modelo de Leland (ao invés do *bid market* observado no mercado, usado no exercício anterior), que foi obtido aplicando-se o modelo de Leland para cada uma das opções analisadas. Observou-se que, o *bid-ask spread* obtido pelo modelo de Leland é mais estreito que o *bid-ask* observado no mercado (Tabelas 06 a 10), o que sugere que o *bid-ask spread* praticado pelos *market makers* no mercado incorpora não somente os custos transacionais, mas também outros custos e/ou fatores.

Tabela 06 – Bid-ask spread de mercado vs. bid-ask spread proposto por Leland – VALE3.

Ativo objeto	**VALE3**	Preço de referência (R$)		36.18			
Preço de Exercício (R$)	Prazo (dias corridos)	Vol. Mercado Bid (% a.a.)	Vol. Mercado Ask (% a.a.)	Tamanho Spread(%)	Vol. Leland Bid (% a.a.)	Vol. Leland Ask (% a.a.)	Tamanho Spread(%)
41.00	92	27.73%	30.56%	2.83%	28.40%	29.87%	1.47%
37.00	92	28.92%	31.75%	2.83%	29.58%	31.06%	1.48%
33.50	92	30.93%	33.77%	2.84%	31.60%	33.08%	1.48%
44.00	182	28.09%	32.09%	4.00%	29.34%	30.82%	1.48%
38.00	182	29.67%	33.67%	4.00%	30.92%	32.40%	1.48%
33.00	182	32.09%	36.09%	4.00%	33.34%	34.82%	1.48%
49.00	363	29.76%	34.09%	4.33%	31.17%	32.65%	1.48%
40.00	363	31.00%	35.33%	4.33%	32.42%	33.90%	1.48%
33.50	363	34.03%	38.36%	4.33%	35.45%	36.93%	1.48%

Tabela 07 – Bid-ask spread de mercado vs. bid-ask spread proposto por Leland – ITUB4.

Ativo objeto	**ITUB4**	Preço de referência (R$)		41.59			
Preço de Exercício (R$)	Prazo (dias corridos)	Vol. Mercado Bid (% a.a.)	Vol. Mercado Ask (% a.a.)	Tamanho Spread(%)	Vol. Leland Bid (% a.a.)	Vol. Leland Ask (% a.a.)	Tamanho Spread(%)
47.00	92	28.38%	31.05%	2.67%	29.02%	30.40%	1.38%
42.70	92	29.50%	32.17%	2.67%	30.14%	31.52%	1.38%
38.70	92	31.51%	34.17%	2.66%	32.14%	33.52%	1.38%
50.40	182	29.56%	33.39%	3.83%	30.78%	32.16%	1.38%
43.80	182	31.08%	34.92%	3.84%	32.30%	33.68%	1.38%
38.10	182	33.48%	37.32%	3.84%	34.70%	36.08%	1.38%
56.50	363	30.36%	34.19%	3.83%	31.58%	32.96%	1.38%
46.30	363	31.58%	35.42%	3.84%	32.80%	34.18%	1.38%
37.90	363	34.95%	38.78%	3.83%	36.17%	37.55%	1.38%

Tabela 08 – Bid-ask spread de mercado vs. bid-ask spread proposto por Leland – ABEV3.

Ativo objeto	**ABEV3**	Preço de referência (R$)		20.55			
Preço de Exercício (R$)	Prazo (dias corridos)	Vol. Mercado Bid (% a.a.)	Vol. Mercado Ask (% a.a.)	Tamanho Spread(%)	Vol. Leland Bid (% a.a.)	Vol. Leland Ask (% a.a.)	Tamanho Spread(%)
22.10	92	17.58%	20.25%	2.67%	18.08%	19.71%	1.63%
20.90	92	18.25%	20.92%	2.67%	18.75%	20.38%	1.63%
19.80	92	19.40%	22.07%	2.67%	19.91%	21.54%	1.63%
23.10	182	19.40%	21.90%	2.50%	19.82%	21.45%	1.63%
21.00	182	20.50%	22.83%	2.33%	20.84%	22.47%	1.63%
19.70	182	21.61%	23.94%	2.33%	21.95%	23.57%	1.62%
24.80	363	20.20%	22.70%	2.50%	20.62%	22.25%	1.63%
22.20	363	20.83%	23.17%	2.34%	21.17%	22.80%	1.63%
19.85	363	22.88%	25.22%	2.34%	23.22%	24.85%	1.63%

Tabela 09 – Bid-ask spread de mercado vs. bid-ask spread proposto por Leland – GGBR4.

Ativo objeto	**GGBR4**	Preço de referência (R$)		11.13			
Preço de Exercício (R$)	Prazo (dias corridos)	Vol. Mercado Bid (% a.a.)	Vol. Mercado Ask (% a.a.)	Tamanho Spread(%)	Vol. Leland Bid (% a.a.)	Vol. Leland Ask (% a.a.)	Tamanho Spread(%)
12.75	92	31.04%	35.38%	4.34%	32.09%	34.30%	2.21%
11.50	92	32.25%	36.58%	4.33%	33.30%	35.50%	2.20%
10.25	92	34.58%	38.91%	4.33%	35.63%	37.83%	2.20%
13.75	182	32.15%	35.32%	3.17%	32.61%	34.82%	2.21%
11.75	182	33.83%	37.00%	3.17%	34.30%	36.50%	2.20%
10.00	182	36.58%	39.75%	3.17%	37.05%	39.26%	2.21%
15.75	363	35.54%	38.71%	3.17%	36.00%	38.21%	2.21%
12.50	363	37.00%	40.17%	3.17%	37.46%	39.67%	2.21%
10.00	363	40.70%	43.87%	3.17%	41.17%	43.38%	2.21%

Tabela 10 – Bid-ask spread de mercado vs. bid-ask spread proposto por Leland – PCAR4.

Ativo objeto	**PCAR4**	Preço de referência (R$)		73.30			
Preço de Exercício (R$)	Prazo (dias corridos)	Vol. Mercado Bid (% a.a.)	Vol. Mercado Ask (% a.a.)	Tamanho Spread(%)	Vol. Leland Bid (% a.a.)	Vol. Leland Ask (% a.a.)	Tamanho Spread(%)
83.00	92	26.66%	29.99%	3.33%	27.37%	29.25%	1.88%
75.25	92	27.80%	31.13%	3.33%	28.51%	30.39%	1.88%
68.00	92	29.86%	33.19%	3.33%	30.57%	32.46%	1.89%
88.75	182	25.74%	30.24%	4.50%	27.03%	28.92%	1.89%
77.25	182	27.25%	31.75%	4.50%	28.54%	30.43%	1.89%
67.00	182	29.70%	34.20%	4.50%	30.99%	32.88%	1.89%
99.75	363	25.97%	30.81%	4.84%	27.43%	29.32%	1.89%
81.50	363	27.22%	32.05%	4.83%	28.68%	30.56%	1.88%
66.75	363	30.57%	35.40%	4.83%	32.03%	33.91%	1.88%

3.2.2 **Parte 2** – Análise do componente do *bid-ask spread* da opção que está relacionado à diferença entre a distribuição real dos retornos do ativo objeto e a distribuição assumida por Black & Scholes (normal)

Essa segunda parte da análise focou no componente do *bid-ask spread* da opção que está relacionado à diferença entre a distribuição real dos retornos do ativo objeto e a distribuição assumida por Black & Scholes (normal).

Para tanto, de modo análogo ao que se fez na parte 1, para cada opção analisada, compararam-se os percentis em que o resultado consolidado da posição foi positivo usando duas metodologias de simulação de preços distintas: (i) metodologia de *Block Bootstrap*; e (ii) Metodologia padrão de Monte Carlo idêntica à usada na primeira etapa da parte 1 da análise anterior, isto é usando-se o ***mid*** *market* de volatilidade para se simular os preços mas usando o ***bid*** *market* de volatilidade observado no mercado ao se comprar a opção.

Para metodologia de simulação de preços através de *Block Bootstrap* usou-se uma base de dados diária de preços de fechamento de cada um dos cinco ativos objeto desde dezembro de 1996 até dezembro de 2017. De posse dos preços de fechamento, calcularam-se os retornos logarítmicos diários bem como o retorno logarítmico médio e seu desvio padrão na série de 21 anos.

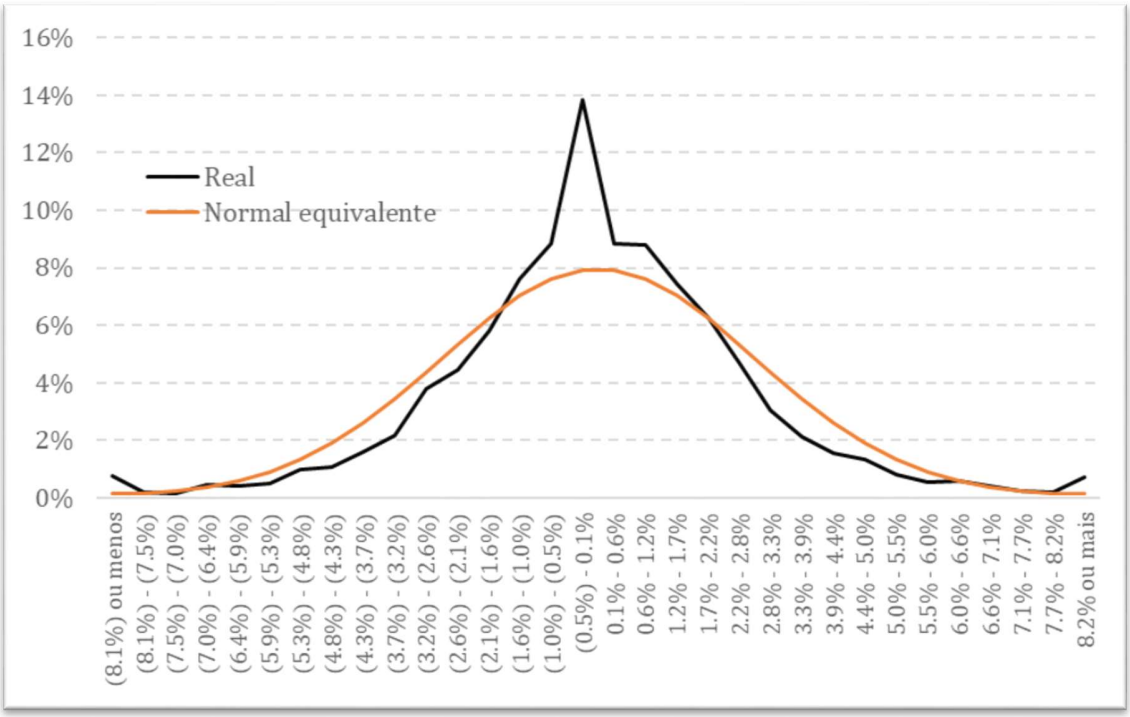
Para cada opção analisada, ajustou-se a série histórica de dados de retornos de modo que a base tivesse a mesma média (*drift*) e o mesmo desvio padrão (volatilidade) usados em cada simulação de Monte Carlo padrão feita na parte 1. Isso é, para cada opção analisada, a base de dados de retornos ajustada tinha média igual à taxa de juros livre de risco usada na simulação de Monte Carlo padrão e tinha desvio padrão anualizado igual ao ***mid*** *market* de volatilidade da opção em questão observado no mercado. Assim, obtiveram-se 45 vetores distintos (um para cada uma das 45 opções analisadas) com cerca de 5.000 retornos diários do ativo objeto em cada vetor.

Para cada uma das 45 opções estudadas, repetiram-se 1000 simulações, e para se gerar os preços do ativo objeto em cada simulação, retirou-se aleatoriamente do vetor de retornos ajustados para cada opção em questão, um bloco cujo tamanho coincidisse com o número de dias de vida de cada opção analisada. Aplicou-se o bloco de retornos selecionado sobre o preço inicial de referência gerando-se assim todos preços simulados. Dessa forma, a simulação de Monte Carlo clássica e a simulação usando-se o *Block Bootstrap* são bastante semelhantes. Enquanto a metodologia de Monte Carlo padrão gera preços do ativo objeto que seguem uma distribuição definida (log-normal), a metodologia de *Block Bootstrap* gera os preços usando a distribuição real observada no

mercado ajustada para que se tenha a mesma média e desvio padrão assumidos na simulação de Monte Carlo. A distribuição de retornos assumida na metodologia clássica de Monte Carlo (normal) tem caudas finas enquanto que a distribuição observada no mercado tem caudas mais largas. O ajuste de média e desvio padrão na metodologia do *Block Bootstrap* preserva a característica de caudas mais largas da distribuição real.

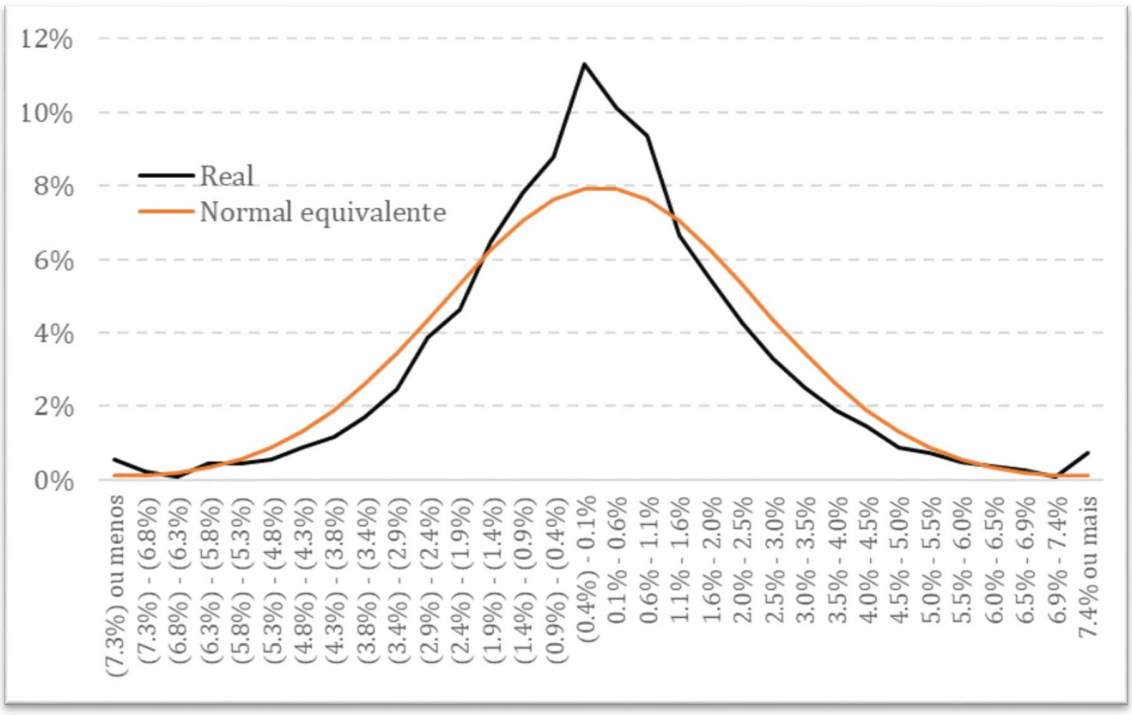
A comparação entre os percentis em que se observaram resultados positivos na posição usando a metodologia de *Block Bootstrap* e a metodologia de Monte Carlo padrão permitiu inferir o impacto que as diferentes distribuições têm no resultado da posição. Na seção de análise de resultados mostra-se que esse impacto não é desprezível e o mesmo deveria ser considerado no *bid-ask spreads* das opções. Os gráficos abaixo mostram a distribuição dos retornos diários da série histórica de 21 anos de cada ativo objeto analisado, bem como a distribuição normal de mesma média e desvio padrão.

Gráfico 1 – Distribuição dos retornos diários* vs. *normal equivalente – VALE3.



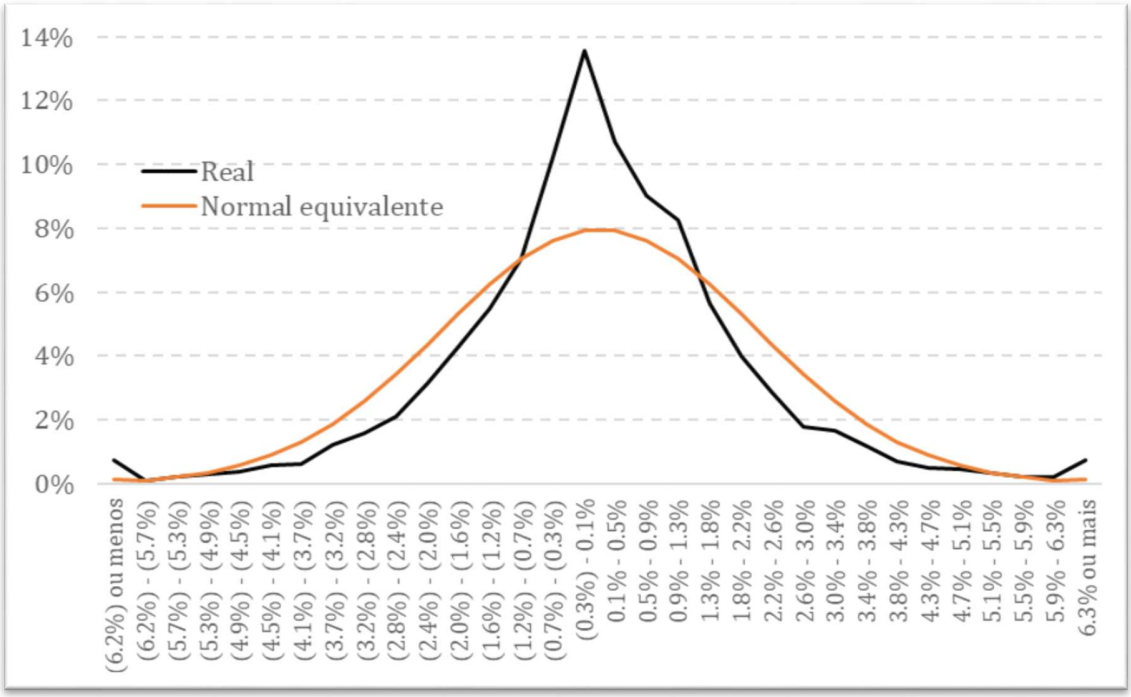
Média dos retornos diários:	0.07%
Desvio padrão dos retornos diários:	2.71%

Gráfico 2 – Distribuição dos retornos diários* vs. *normal equivalente – ITUB4.



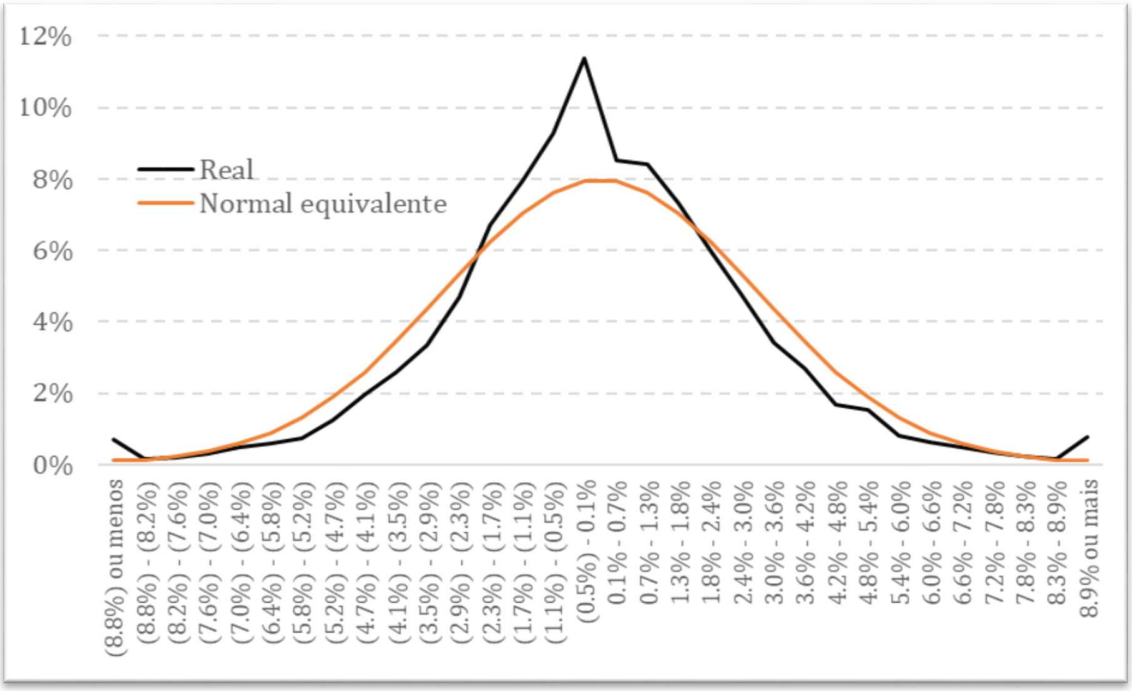
Média dos retornos diários:	0.08%
Desvio padrão dos retornos diários:	2.45%

Gráfico 3 – Distribuição dos retornos diários* vs. *normal equivalente – ABEV3.



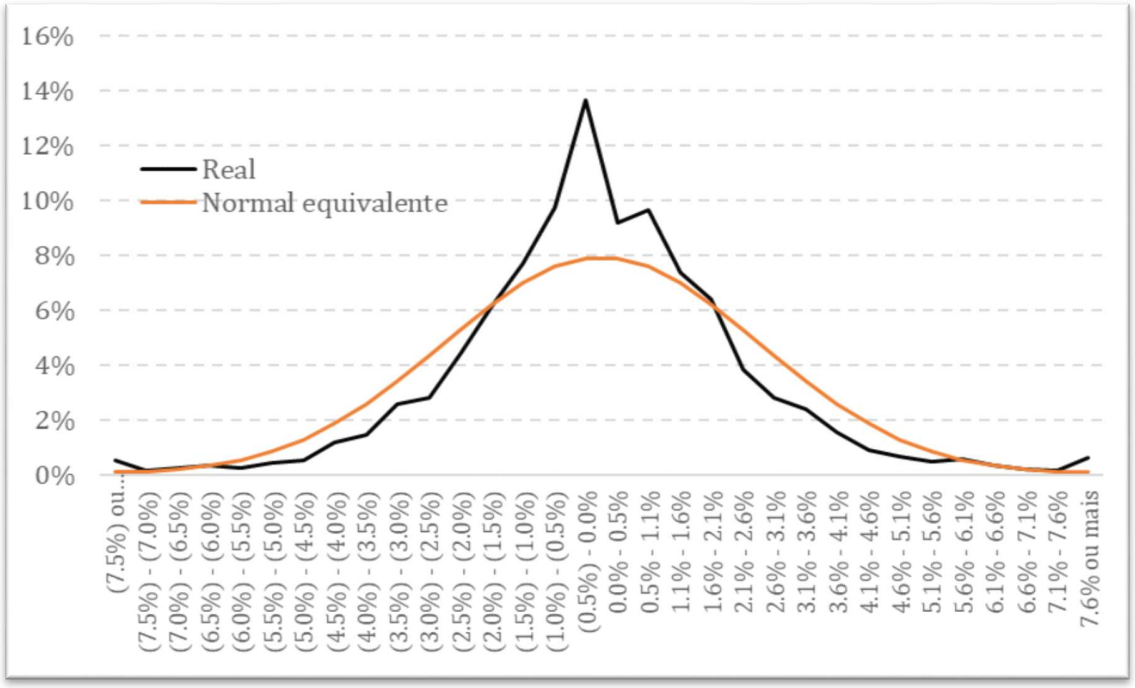
Média dos retornos diários:	0.08%
Desvio padrão dos retornos diários:	2.08%

Gráfico 4 – Distribuição dos retornos diários vs. normal equivalente – GGBR4.



Média dos retornos diários:	0.08%
Desvio padrão dos retornos diários:	2.95%

Gráfico 5 – Distribuição dos retornos diários vs. normal equivalente – PCAR4.



Média dos retornos diários:	0.04%
Desvio padrão dos retornos diários:	2.52%

4 ANÁLISE DE RESULTADOS

No ambiente de Black & Scholes, onde não existem custos transacionais e os retornos logarítmicos do ativo objeto seguem uma distribuição normal, é intuitivo esperar obter-se resultados positivos com a posição comprada em uma *call*, carregada até o vencimento e fazendo-se o correspondente *delta hedge*, cerca de 50% das vezes. De fato, esse resultado foi evidenciado e mostrado na tabela 11 abaixo quando se simularam 1.000 caminhos do ativo objeto com a metodologia de Monte Carlo usando-se o ***mid*** *market* de volatilidade de mercado, comprando-se a *call* também no ***mid*** *market* de volatilidade de mercado e ignorando-se os custos transacionais.

Tabela 11 – Percentil de resultados positivos no ambiente Black & Scholes sem custos transacionais.

Prazo	3M			6M			12M		
Delta	25%	50%	75%	25%	50%	75%	25%	50%	75%
VALE3	50.6%	50.4%	49.4%	50.1%	50.7%	50.8%	49.8%	48.3%	50.8%
ITUB4	50.1%	50.2%	49.6%	49.8%	50.7%	51.5%	49.9%	51.4%	50.1%
ABEV3	49.2%	49.4%	50.2%	49.1%	51.0%	51.2%	48.7%	49.2%	49.1%
GGBR4	49.0%	49.3%	50.1%	49.8%	49.8%	50.0%	49.4%	49.5%	51.7%
PCAR4	48.9%	48.3%	50.3%	48.1%	52.0%	51.0%	48.0%	48.6%	52.6%

Simulando-se 1.000 caminhos do ativo objeto usando a mesma metodologia de Monte Carlo do exercício anterior (ou seja, ***mid*** *market* de volatilidade de mercado para se gerar os preços e comprando-se a *call* também no ***mid*** *market*), mas agora considerando-se os custos transacionais, obtiveram-se os percentis de resultados positivos demonstrados na tabela 13.

A tabela 12 abaixo mostra o custo transacional médio total do processo de *delta hedge* de cada opção analisada em relação ao preço do ativo objeto.

Tabela 12 – Custo médio da posição em bps (vs. o preço de referência do ativo objeto).

Prazo	3M			6M			12M		
Delta	25%	50%	75%	25%	50%	75%	25%	50%	75%
VALE3	12.7	18.1	16.1	18.2	24.1	21.6	26.3	34.2	29.4
ITUB4	12.6	16.8	15.2	17.6	22.5	20.4	24.5	31.8	27.0
ABEV3	15.6	19.4	19.0	22.2	26.7	24.3	31.9	36.6	33.5
GGBR4	20.1	27.0	25.2	27.9	36.1	31.6	38.9	48.8	44.3
PCAR4	16.4	12.3	21.0	22.4	30.8	27.3	31.7	41.8	37.7

Tabela 13 – Percentil de resultados positivos no ambiente Black & Scholes com custos transacionais.

Prazo	3M			6M			12M		
Delta	25%	50%	75%	25%	50%	75%	25%	50%	75%
VALE3	37.9%	39.3%	38.9%	37.0%	36.1%	37.3%	32.8%	31.6%	32.3%
ITUB4	40.6%	40.2%	39.7%	38.6%	37.1%	39.7%	34.0%	33.5%	34.7%
ABEV3	29.8%	31.6%	31.1%	26.8%	28.0%	26.3%	20.9%	21.9%	21.0%
GGBR4	34.5%	34.1%	35.8%	32.2%	30.2%	31.9%	26.1%	26.2%	28.0%
PCAR4	34.4%	40.9%	32.5%	30.1%	31.9%	30.7%	24.4%	22.9%	26.5%

Em linha com a intuição, GGBR4, ativo objeto que, na média, apresentou o maior *bid-ask spread* em bps das ações analisadas, apresentou também o maior custo transacional total médio dentre as opções de mesmo *delta* e mesmo prazo (mas de ativos objeto distintos). Da mesma forma, as opções de ITUB4 apresentaram o menor custo transacional. Para um dado prazo, as opções de *delta* mais próximo de 50% (ou seja, as mais *at-the-money*) apresentam, na média, custo transacional total maior provavelmente devido ao maior *gamma* e consequentemente ajustes de *delta* maiores e mais frequentes. Observou-se ainda que, à medida em que se aumenta o prazo da opção, o custo transacional total aumenta, apesar de o *gamma* diminuir. O fato de haver um número maior de rebalanceamentos diários parece ter impacto maior no custo transacional total em comparação a um *gamma* menor, um resultado não tão intuitivo. O *vega* maior das opções mais longas também deve ter impactado esses resultados.

Interessante notar que o percentil de resultados positivos, quando se levou em consideração os custos transacionais, diminuiu substancialmente ao compará-lo com o mesmo percentil, porém sem considerar os custos transacionais. A tabela 14 abaixo mostra essas diferenças.

Tabela 14 – Diferença entre o percentil de resultados positivos com e sem custos transacionais (em pontos percentuais).

Prazo	3M			6M			12M		
Delta	25%	50%	75%	25%	50%	75%	25%	50%	75%
VALE3	-12.7%	-11.1%	-10.5%	-13.1%	-14.6%	-13.5%	-17.0%	-16.7%	-18.5%
ITUB4	-9.5%	-10.0%	-9.9%	-11.2%	-13.6%	-11.8%	-15.9%	-17.9%	-15.4%
ABEV3	-19.4%	-17.8%	-19.1%	-22.3%	-23.0%	-24.9%	-27.8%	-27.3%	-28.1%
GGBR4	-14.5%	-15.2%	-14.3%	-17.6%	-19.6%	-18.1%	-23.3%	-23.3%	-23.7%
PCAR4	-14.5%	-7.4%	-17.8%	-18.0%	-20.1%	-20.3%	-23.6%	-25.7%	-26.1%

Na média, as opções em que se observaram maiores custos transacionais tiveram diminuição no percentil de resultados positivos mais acentuada que opções nas quais o custo transacional era menor.

Com o intuito de compensar os custos transacionais envolvidos (entre outros custos e fatores de risco), os *market makers* de opções praticam o *bid-ask spread*. Observou-se que ao se comprar a opção no ***bid*** *market* de volatilidade observado no mercado, o *market maker* obteve, em média, aumento substancial no percentil de vezes em que o resultado da posição foi positivo. A simulação de Monte Carlo foi a mesma usada anteriormente (isto é, simulou-se os caminhos usando o ***mid*** *market* de volatilidade de mercado). A tabela 15 abaixo mostra esses resultados.

Tabela 15 – Percentil de resultados positivos no ambiente Black & Scholes com custos transacionais, comprando-se a call no bid market de volatilidade observado.

Prazo	3M			6M			12M		
Delta	25%	50%	75%	25%	50%	75%	25%	50%	75%
VALE3	64.0%	60.8%	57.5%	75.6%	72.1%	70.8%	83.4%	79.2%	80.0%
ITUB4	60.7%	60.6%	57.8%	74.8%	71.0%	69.4%	81.2%	78.1%	73.5%
ABEV3	61.6%	58.8%	57.8%	66.2%	59.4%	59.0%	68.9%	64.2%	62.6%
GGBR4	64.9%	60.9%	61.0%	65.1%	58.1%	56.2%	68.7%	63.4%	61.7%
PCAR4	62.5%	66.3%	58.2%	75.6%	74.2%	71.6%	81.6%	82.4%	79.9%

Percebeu-se que, na média, nas opções mais longas, o ganho ao se comprar a *call* no ***bid*** *market* de volatilidade é substancialmente maior do que nas opções mais curtas, provavelmente devido ao fato de o *vega* das opções mais longas ser maior e, portanto, o impacto do ganho de volatilidade fica mais evidente. Percebeu-se também que no ativo objeto em que o custo transacional era menor, o aumento de percentil foi mais significativo.

De fato, no ambiente de Black & Scholes, ao se comprar a opção no ***bid***, o *market maker* esperava ter resultado positivo em boa parte das vezes. Quanto maior for o *bid-ask spread* praticado pelo *market maker* na opção, maior será o percentil das vezes em que se espera ter resultado positivo.

O modelo proposto por Leland, em 1985, leva em consideração os custos transacionais através de ajuste na volatilidade utilizada pelo modelo de Black & Scholes, conforme descrito na seção 2.2. Leland propõe um *bid-ask spread* para a opção baseado (i) no *mid market* de volatilidade observado no mercado; (ii) nos custos transacionais do ativo objeto; e (iii) na frequência do reba-

lanceamento. Conforme mencionou-se anteriormente, nesse estudo adotou-se a frequência de re-balanceamento de uma vez ao dia. Considerando-se o ***mid*** *market* de volatilidade observado e os custos transacionas de cada ativo objeto, calculou-se o *bid-ask spread* de Leland para cada uma das 45 opções analisadas. Esses valores, bem como o *bid-ask spread* praticado pelos *market makers* no mercado estão apresentados nas tabelas 16 e 17.

Tabela 16 – Bid-ask spread das opções observado no mercado.

Prazo	3M			6M			12M		
Delta	25%	50%	75%	25%	50%	75%	25%	50%	75%
VALE3	2.83%	2.83%	2.83%	4.00%	4.00%	4.00%	4.33%	4.33%	4.33%
ITUB4	2.67%	2.67%	2.67%	3.83%	3.83%	3.83%	3.83%	3.83%	3.83%
ABEV3	2.67%	2.67%	2.67%	2.50%	2.33%	2.33%	2.50%	2.33%	2.33%
GGBR4	4.33%	4.33%	4.33%	3.17%	3.17%	3.17%	3.17%	3.17%	3.17%
PCAR4	3.33%	3.33%	3.33%	4.50%	4.50%	4.50%	4.83%	4.83%	4.83%

Tabela 17 – Bid-ask spread das opções sugerido pelo modelo de Leland.

Prazo	3M			6M			12M		
Delta	25%	50%	75%	25%	50%	75%	25%	50%	75%
VALE3	1.48%	1.48%	1.48%	1.48%	1.48%	1.48%	1.48%	1.48%	1.48%
ITUB4	1.38%	1.38%	1.38%	1.38%	1.38%	1.38%	1.38%	1.38%	1.38%
ABEV3	1.63%	1.63%	1.63%	1.63%	1.63%	1.63%	1.63%	1.63%	1.63%
GGBR4	2.21%	2.21%	2.21%	2.21%	2.21%	2.21%	2.21%	2.21%	2.21%
PCAR4	1.89%	1.89%	1.89%	1.89%	1.89%	1.89%	1.89%	1.89%	1.89%

Para a totalidade das opções analisadas, o modelo de Leland sugere um *bid-ask spread* mais estreito do que o *bid-ask* de fato praticado pelos *market makers* no mercado. Ao repetir a simulação de Monte Carlo anterior, mas desta vez usando-se o ***bid*** *market* de volatilidade proposto no modelo de Leland (ao invés do ***bid*** observado no mercado) obteve-se os seguintes resultados:

Notou-se que ao usar-se o modelo de Leland, os percentis em que se observou resultado positivo na posição são bastante próximos aos do modelo de Black & Scholes clássico sem custos transacionais! Esses resultados sugerem que, na média, nas opções analisadas, o *bid-ask spread* proposto por Leland parece adequado para se considerar os custos transacionais esperados. Supondo que a essa premissa seja correta, então os *bid-ask spreads* de mercado das opções estudadas (que é mais largo que o *spread* sugerido por Leland), parecem incorporar outros custos e/ou outros fatores de risco que não foram capturados por Leland!

Tabela 18 – Percentil de resultados positivos no ambiente Black & Scholes com custos transacionais, comprando-se a call no bid market de volatilidade sugerido por Leland.

Prazo	3M			6M			12M		
Delta	25%	50%	75%	25%	50%	75%	25%	50%	75%
VALE3	52.6%	50.1%	48.2%	55.1%	51.8%	51.6%	55.5%	50.1%	52.2%
ITUB4	51.2%	50.2%	49.1%	54.9%	51.8%	51.5%	55.2%	51.4%	52.4%
ABEV3	50.9%	47.2%	47.3%	54.2%	50.5%	50.8%	55.1%	53.5%	51.1%
GGBR4	51.7%	47.2%	48.4%	56.5%	49.8%	48.9%	59.6%	52.2%	51.6%
PCAR4	51.8%	47.1%	49.1%	54.7%	53.2%	49.3%	56.3%	51.8%	51.2%

Comparando-se o *bid-ask spread* de mercado com o *bid-ask spread* proposto por Leland, conseguiu-se estimar o componente do *bid-ask spread* de mercado que está relacionado aos custos transacionais. Essa estimativa encontra-se na tabela 19.

Tabela 19 – Estimativa do componente do bid-ask spread das opções relacionado aos custos transacionais.

Prazo	3M			6M			12M		
Delta	25%	50%	75%	25%	50%	75%	25%	50%	75%
VALE3	52%	52%	52%	37%	37%	37%	34%	34%	34%
ITUB4	52%	52%	52%	36%	36%	36%	36%	36%	36%
ABEV3	61%	61%	61%	65%	70%	70%	65%	70%	70%
GGBR4	51%	51%	51%	70%	70%	70%	70%	70%	70%
PCAR4	57%	57%	57%	42%	42%	42%	39%	39%	39%

Percebeu-se que, na média, os custos transacionais representaram uma boa parcela do *bid-ask spread* observado nas opções estudadas. Com exceção de ABEV3 e GGBR4, a parcela do *bid-ask spread* relacionada aos custos transacionais diminuiu à medida que o prazo da opção aumentou. Ou seja, os *market makers* parecem estar menos preocupados com os custos transacionais em opções mais longas quando comparadas às mais curtas. Acredita-se que, nas opções de prazo mais longo, o fator de risco associado ao *vega* da opção parece ter um papel mais significativo na composição do *spread*.

No caso de ABEV3 e GGBR4, em que a representatividade dos custos transacionais aumentou com o prazo, parece ter havido, durante o período de coleta de dados, algum motivo particular relacionado a esses ativos objeto que resultou em um aumento dos *spreads* com o prazo, enquanto nos outros ativos objeto, o *spread* diminuiu. Uma concentração de posição relevante em

algum prazo específico ou uma preferência dos *market makers* em uma ponta específica de *gamma* ou *vega* podem ter afetado a dinâmica do *spread*.

Na média, não se observou mudança significativa na parcela do *bid-ask spread* relacionada aos custos transacionais com respeito ao *moneyness* da opção. Esse resultado é curioso, dado que o *moneyness* da opção tem relação direta com custo transacional esperado na vida da opção. Os *market makers* parecem não ter se importado com o *moneyness* da opção na hora de determinar os *bid-ask spreads* e parecem ser mais sensíveis `as mudanças de prazo primeiramente. Esta observação provavelmente decorre do fato de haver um fator de risco mais relevante associado às opções mais longas, diretamente relacionado ao *vega* das opções.

As tabelas 20 e 21 abaixo mostram os percentis onde se observaram resultados positivos na posição, quando os preços de cada ativo objeto foram simulados usando-se a metodologia *Block Bootstrap* e a diferença desses percentis quando se simularam os preços pela tradicional metodologia de Monte Carlo já apresentada anteriormente na tabela 13. Em ambas as simulações se consideraram os custos transacionais e comprou-se a opção no ***mid*** *market*.

Tabela 20 – Percentil de resultados positivos simulando preços do ativo objeto pela metodologia do Block Bootstrap com custos transacionais, comprando-se a opção no mid market de volatilidade.

Prazo	3M			6M			12M		
Delta	25%	50%	75%	25%	50%	75%	25%	50%	75%
VALE3	26%	27%	27%	26%	25%	29%	26%	29%	31%
ITUB4	26%	26%	28%	26%	23%	31%	27%	28%	29%
ABEV3	23%	23%	24%	21%	22%	23%	18%	19%	18%
GGBR4	23%	22%	26%	23%	20%	24%	20%	20%	23%
PCAR4	19%	22%	20%	20%	20%	24%	18%	17%	21%

Tabela 21 – Diferença entre o percentil de resultados positivos usando metodologia de Block Bootstrap vs. metodologia de Monte Carlo com custos transacionais, comprando-se a opção no mid market de volatilidade.

Prazo	3M			6M			12M		
Delta	25%	50%	75%	25%	50%	75%	25%	50%	75%
VALE3	-12%	-12%	-12%	-11%	-11%	-8%	-7%	-2%	-1%
ITUB4	-14%	-15%	-12%	-13%	-14%	-9%	-7%	-5%	-6%
ABEV3	-7%	-8%	-7%	-6%	-6%	-4%	-3%	-3%	-3%
GGBR4	-11%	-12%	-10%	-10%	-10%	-7%	-6%	-6%	-5%
PCAR4	-15%	-19%	-13%	-10%	-12%	-7%	-6%	-6%	-6%

Em todas as opções analisadas, percebeu-se que, ao simular os preços dos ativos objeto usando-se a metodologia do *Block BootStrap*, houve diminuição dos percentis onde a posição obteve resultado positivo, quando comparados com os percentis usando-se a simulação de preços pela tradicional metodologia de Monte Carlo. Na média, para um mesmo ativo objeto, a diminuição do percentil foi mais acentuada nas opções de prazos mais curtos e menos acentuada nos prazos mais longos. Percebeu-se também que, dentro de um prazo específico, *strikes at-the-money* mostraram-se mais sensíveis à mudança de metodologia de simulação nos preços.

Os resultados acima demostraram que a diferença entre a distribuição de retornos real observada no mercado e a distribuição de retornos assumida pela modelagem de Black & Scholes / Monte Carlo de fato têm impacto no resultado esperado da posição. Portanto, espera-se que esse risco tenha sido precificado no *bid-ask spread* das opções praticados pelos *market makers*. Os gráficos 6 a 10 mostram que a distribuição de retornos real tem duas diferenças principais em relação à distribuição normal assumida por Black & Scholes / Monte Carlo: (i) a distribuição real tem caudas mais largas que a normal; e (ii) a distribuição real tem valores próximos à média mais frequentes que a normal. Dessa forma, quando o *market maker* está comprado na opção (*long gamma*), o fato de se poder observar retornos extremos é positivo para o seu resultado, porém esses extremos ocorrem com pequena probabilidade, de acordo com a distribuição normal, e com mais probabilidade na distribuição real. No entanto, retornos pífios, ao redor da média (que é próxima de zero), ocorrem com frequência razoavelmente maior na realidade do que na premissa assumida por Black & Scholes. Obviamente, quando ocorrem esses eventos mencionados, há impactos diferentes no resultado da posição. No entanto, na média, a diferença nas distribuições mencionadas parece ter tido impacto negativo no resultado da posição comprada nas opções analisadas conforme observado.

Comparando-se os percentis onde houve resultado positivo na posição quando se simularam os preços com a metodologia do *Block Bootstrap* com a metodologia de Monte Carlo, pode-se inferir o componente do *bid-ask spread* da opção que está relacionado à diferença entre as distribuições de retornos. Esse componente está explicitado na tabela 22.

Tabela 22 –Componente do bid-ask spread das opções relacionado à diferença da distribuição dos retornos do ativo objeto.

Prazo	3M			6M			12M		
Delta	25%	50%	75%	25%	50%	75%	25%	50%	75%
VALE3	48%	58%	60%	31%	28%	22%	14%	5%	2%
ITUB4	78%	76%	62%	42%	37%	26%	17%	10%	14%
ABEV3	22%	29%	22%	16%	18%	10%	7%	8%	7%
GGBR4	39%	40%	34%	38%	36%	29%	18%	19%	15%
PCAR4	59%	148%	40%	24%	25%	15%	10%	10%	9%

Somando–se as duas componentes, obtiveram-se os resultados mostrados na tabela 23 abaixo:

Tabela 23 – Soma das duas componentes relacionadas.

Prazo	3M			6M			12M		
Delta	25%	50%	75%	25%	50%	75%	25%	50%	75%
VALE3	100%	110%	112%	68%	65%	59%	48%	39%	36%
ITUB4	130%	127%	114%	78%	73%	62%	53%	46%	50%
ABEV3	83%	90%	83%	81%	88%	80%	72%	78%	76%
GGBR4	90%	91%	85%	108%	106%	99%	87%	89%	85%
PCAR4	116%	205%	97%	66%	67%	57%	49%	49%	48%

Percebeu-se que, na média, de acordo com os modelos adotados, a combinação entre os componentes relacionados aos custos transacionais e à diferença na distribuição dos retornos do ativo objeto representaram, na maioria das opções, prazos e *strikes* estudados, uma parcela significativa do *bid-ask spread* das opções praticado pelos *market makers*. Em alguns casos, esses dois componentes agregados representaram mais do que 100% do *bid-ask spread*, sugerindo uma condição de mercado em que os possíveis ganhos, na média, não compensam os custos incorridos e os riscos relacionados à distribuição de retornos. Esse foi o caso em quase todas as opções de curto prazo estudadas (três meses). Percebeu-se que, à medida que os prazos ficam mais longos, os *bid-ask spreads* parecem estar mais condizentes com a intuição, isto é, após considerar-se os dois componentes, ainda há espaço dentro do *spread* para acomodar outros custos e/ou fatores de risco, além de, possivelmente, algum lucro para o *market maker.*

5 CONCLUSÕES

As análises feitas nesse estudo concluíram que, na média, durante o período de coleta de dados, os *bid-ask spreads* praticados pelos *market makers* nas opções de curto prazo (três meses) estudadas parecem não terem sido suficientemente grandes para (i) compensar os custos transacionais associados ao processo de *delta hedge*; (ii) remunerar o *market maker* pelo risco de se observar diferenças entre a distribuição de retornos do ativo objeto e a distribuição assumida pelos modelos de precificação. Para os prazos de seis meses e doze meses, os componentes mencionados representaram respectivamente cerca de 75% e 60% do *bid-ask spread* de modo que sobra respectivamente aproximadamente 25% e 40% do *spread* para que o *market maker* consiga cobrir outros custos e/ou riscos envolvidos e possivelmente obter algum lucro. A conclusão do estudo aponta para um lucro que parece ser pequeno, às vezes até negativo, para o *market maker,* após considerar-se os dois aspectos mencionados acima, especialmente nas opções de curto prazo. De acordo com os dados de volume de opções transacionado no mercado brasileiro na B3, a maioria das opções negociadas é de curto prazo (de um mês a três meses). Dessa forma, conclui-se que, na média, os *market makers* têm praticado *bid-ask spreads* bastante agressivos quando se levam em consideração os custos transacionais e os riscos relacionados às distribuições de retornos do ativo objeto.

A seguir, propõe-se algumas hipóteses para tentar explicar o comportamento agressivo dos *bid-ask spreads* observados nesse estudo:

(i) Os *market makers* podem fazer o *hedge* de uma opção usando outras opções disponíveis no mercado ao invés de fazer o *hedge* usando-se o ativo objeto. Nesse caso, o componente relacionado aos custos transacionais tende a ser menor pelo simples fato de haver uma diminuição na atividade de *delta hedge* e, consequentemente, uma redução do custo transacional consolidado. No entanto, essa alternativa depende da possibilidade do *market maker* conseguir negociar (para *hedge*) outras opções com o mesmo nível de agressividade que ele próprio está negociando no mercado. De acordo com dados de volume de opções transacionado na B3, essa possibilidade parece ser uma realidade somente nas opções de VALE3 de um a três meses de prazo, onde a liquidez é de fato bastante elevada. Para as opções de ABEV3 e ITUB4, a liquidez é consideravelmente menor e para as opções de GGBR4 e PCAR4, a liquidez é bastante pequena. Se o *market maker* acreditar que pode conseguir diminuir sua exposição a uma determinada opção usando outras opções, ele pode ser mais agressivo no *bid-ask spread* que pratica.

(ii) As análises feitas nesse trabalho consideraram que o *market maker* carregou a posição até seu vencimento, fazendo o *delta hedge* correspondente uma vez ao dia. No entanto, os custos transacionais consolidados poderiam ter sido menores caso o *market maker* tivesse se desfeito da opção antes do seu vencimento. Se o *market maker* acreditar que pode conseguir diminuir a sua exposição a uma determinada opção porque sua contraparte se desfará da posição antecipadamente, ele pode ser mais agressivo no *bid-ask spread* que pratica.

(iii) O mercado de opções sobre ações brasileiro é razoavelmente recente e está em amplo crescimento, inclusive com iniciativas da própria bolsa para fomentar esse mercado, oferecendo incentivos sob a forma de isenção de algumas taxas para provedores de liquidez (*market makers*). Se as taxas da bolsa são menores, os custos transacionais são também menores e o *market maker* pode praticar um *bid-ask spread* mais estreito. Além disso, não parece improvável que haja *market makers* dispostos a "comprar" *market share* através da prática de *bid-ask spreads* mais agressivos que o razoável.

(iv) Os preços coletados com os *market makers* que serviram de base para esse estudo podem estar anormalmente mais conservadores por conta do risco das eleições que começa a ser precificado pelo mercado de maneira mais intensa a partir do primeiro trimestre do ano eleitoral (2018). Se os *market makers* acreditarem que as eleições são de fato um fator de risco para a posição detida, então é possível que os *bid-ask spreads* mostrados estejam mais largos que o usualmente cobrado, especialmente nas opções mais longas onde o risco de vega se torna mais relevante.

Certamente há limitações na metodologia usada, na coleta de dados e consequentemente nas conclusões apresentadas no presente estudo. Algumas delas merecem um breve comentário. A decisão pelo uso do modelo de Leland como pilar principal para os cálculos relacionados aos custos de *delta hedge* da posição traz algumas limitações para a abordagem. Acredita-se que a principal delas está relacionada ao fato de que esse modelo considera a frequência do rebalanceamento como a principal variável na determinação dos custos transacionais totais da posição. Conforme mencionado anteriormente, há outros modelos que consideram a variação de preço no ativo objeto como uma variável relevante na determinação da frequência do rebalanceamento e, consequentemente, nos custos transacionais. Esses modelos, no entanto, são muito mais complexos do ponto de vista

matemático e requerem uma capacidade computacional além dos objetivos desse estudo. A abordagem de Leland é bastante simples e direta, motivos pelos quais decidiu-se optar por ele nessa análise.

Apesar de o tamanho dos *bid-ask spreads* coletados com os *market maker*s terem apresentado pouco variação durante o período de coleta dos dados, não há garantia estatística que o comportamento do tamanho dos *bid-ask spreads* seja de fato aquele que foi observado. Um estudo mais robusto requereria uma coleta de dados menos espaçada e que fosse feita num horizonte de tempo mais longo, de modo a observar o tamanho dos *bid-ask spreads* em momentos distintos de mercado, incluindo momentos de euforia e de crise. O tempo de coleta de dados de tal estudo seria demasiadamente longo, motivo pelo qual optou-se por fazer a coleta de dados no intervalo de tempo proposto no presente estudo.

Finalmente, a metodologia de *Block Bootstrap* utilizada para a análise da distribuição de retornos dos ativos objetos usa, em sua essência, dados históricos de retornos. Apesar de ter-se utilizado uma série histórica longa, não há garantia que os retornos modelados por essa distribuição empírica histórica se aproximem da distribuição de retornos que de fato teria sido observada no mundo real em cada momento do tempo. Em cada de coleta de *bid-ask spread* feita, pode ter existido uma certa subjetividade por parte do *market maker* que dificilmente consegue ser capturada por um modelo empírico.

Apesar das limitações presentes, acredita-se que o trabalho proposto tenha alcançados seus objetivos e contribuído de alguma forma para um melhor entendimento do mercado brasileiro de opções sobre ações, principalmente no que se refere ao tamanho dos *bid-ask spreads* praticados pelos *market maker*s.

Uma possível continuação desse trabalho é a análise do "custo do tamanho de posição". Define-se esse custo como sendo o custo relacionado ao impacto que uma posição comprada (ou vendida) em uma opção tem no preço do ativo objeto durante a vida do derivativo. Se, por um lado, o tamanho inicial da posição tomada em opções pelo *market maker* é decisão dele próprio, por outro lado, a dinâmica de evolução de preço do ativo objeto durante a vida do derivativo é incerta, podendo fazer com que a exposição da posição original no ativo objeto se torne bastante grande ou bastante pequena.

É possível que, durante a vida do contrato derivativo, o volume negociado de ações do ativo objeto requerido para rebalancear o portfólio seja suficientemente grande para impactar o preço do

ativo objeto de forma relevante. Nessas situações, a atividade de *delta hedge* tende a alterar a dinâmica natural do preço do ativo objeto, tirando ou acrescentando volatilidade ao preço da ação de forma artificial. De fato, esse é um custo bastante relevante quando se trata de ações menos líquidas no mercado brasileiro. Certamente esse custo precisa ser refletido no *bid-ask spread* das opções praticados pelos *market makers*.

No estudo que ora é concluído, admitiu-se que a totalidade das ações do ativo objeto compradas ou vendidas durante o processo de *delta hedge* foi executada no primeiro nível de preço disponível no mercado. Essa premissa só é válida se o tamanho da posição for compatível com a liquidez do ativo objeto. Em outras palavras, considerou-se que o custo do tamanho de posição foi nulo.

O efeito do tamanho de posição tem ainda impacto em outras áreas como (i) risco de mercado; (ii) *compliance*; e (iii) alocação de capital. Existem também outras áreas em que o custo do tamanho de posição traz impacto e esse assunto mereceria um estudo dedicado.

REFERÊNCIAS

AMIHUD, A. and MENDELSON, H.. Asset Pricing and the *Bid Ask Spread*. *Journal of Financial Economics* 17: 223-94, 1986.

AVELLANEDA, M and PARJAS, M.. Dynamic hedging portfolios for derivative securities in the presence of large transaction costs. *Applied Mathematical Finance* 1: 165–193, 1994.

BAESEL, J. and SHOWS, G. and THORP E.. The Cost of Liquidity Services in Listed Options: A Note. *Journal of Finance* 38: 989-995, 1983.

BARLES, G. and SONER, H. M. Option pricing with transaction costs and a nonlinear Black-Scholes equation. Finance Stoch., 2(4):369–397, 1998.

BENSAID, B.; LESNE, J.; PAGES, H. and SCHEINKMAN, J.. derivative Asset Pricing with Transaction Costs. Mathematical Finance, vol. 2, issue 2, 63-86, 1992.

BENSTON, G. J. and HAGERMAN, R. L.. Determinants of *Bid-Ask*ed *Spreads* in the Over-the Counter Market. Journal of Financial Economics, 1: 353-364, 1974.

BHIDE, A.. The Hidden Costs of Stock Market Liquidity. *Journal of Financial Economics*, 34: 31-52, 1993.

BLACK, F. and SCHOLES, M.. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81: 637–654, 1973.

BORODIN, A. N. and SALMINEN, P.. *Handbook of Brownian Motion – Facts and Formulae*. Birkh¨auser Verlag, Basel, second edition, 2002.

BOYLE, P. P. and VORST, T. C. F.. Option replication in discrete time with transaction costs. *Journal of Finance* 47: 271–293, 1992.

CARR, P. and GERMAN, H. and MADAN D.. Pricing and hedging in incomplete markets. *Journal of Financial Economics*, 62: 131-167, 2001.

CLEWLOW, L. and HODGES, S. D.. Optimal *delta*-hedging under transactions costs. *Journal of Economic Dynamics and Control* 21: 1353–1376, 1997.

COPELAND, T. E.. Information Effects on the *Bid-ask spread. Journal of Financial Economics 14,* 1983.

DAVIS, M. H. A. and NORMAN, A. R.. Portfolio selection with transaction costs. *Math. Oper. Res.*, 15(4):676–713, 1990.

DEMSETZ, H.. The Cost of Transacting. *The Quarterly Journal of Econometrics* 82: 33-35, 1968.

EDIRISINGHE, C. and NAIK, V. and UPPAL, R.. Optimal replication of options with transactions costs and trading restrictions. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 28: 117–128, 1993.

GEORGE, T. and KAUL, G. and NIMALENDRAN, N.. Estimation of the *bid-ask spread* and its components: a new approach. *Review of Financial Studies*, 1991.

GLOSTEN, L. R.. Components of the *bid-ask spread* and the statistical properties of transaction prices. *The journal of Finance*, 1987.

GOODMAN, J. and OSTROV, D. N. An option to reduce transaction costs. *SIAM J. Finan. Math.*, 2(1):512– 537, 2011.

GOODMAN, J. and OSTROV, D. N. Balancing small transaction costs with loss of optimal allocation in dynamic stock trading strategies. SIAM J. Appl. Math., 70(6):1977–1998, 2010.

HESTON, S. L. A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. *The Review of Financial Studies*,1993.

HO, T. S. Y.and MACRIS, R. G. Dealer *Bid-Ask* Quotes and Transaction Prices: An Empirical Study of Some AMEX Options. Journal of Financial Economics 14, 1983.

HODGES, S. and NEUBERGER, A.. Optimal replication of contingent claims under transaction costs. Rev. Futures Markets, 8:222–239, 1989.

HUANG, R. and STOLL, H.. The Components of the *Bid-ask spread*: A General Approach. Review of Financial Studies 7: 179-213, 1997.

INO, N.. *Delta* hedge com custo de transação: uma análise comparativa. Dissertação de Mestrado Profissional em Economia (Linha de Finanças) – EESP FGV, 2013.

KORN, R.and ROGERS, L.. Stocks Paying Discrete Dividends: Modeling and Option Pricing. *Journal of Derivatives* 13: 44-48, 2005.

LAUX P.. Trade Size and Theories of the *Bid-ask spread*. Journal of Financial Research 14: 237-249, 1993.

LELAND, H. E.. Option pricing and replication with transaction costs. J. Finance, 40(5):1283–1301, 1985

LIPTON A. Assets with jumps. Risk Magazine Limited 15: 149-153, 2002.

LIU, H. and LOEWENSTEIN, M.. Optimal portfolio selection with transaction costs and finite horizons. *Rev. Finan. Stud.*, 15(3):805–835, 2002.

MERTON, R. C.. Option pricing when underlying stock returns are discontinous. *Journal of Financial Economics* 3:125-144, 1976.

OWEN, M. P.. Optimal replication of contingent claims under transaction costs. *Ann. Appl. Probab.*, 12(2):691–709, 2002.

SCOTT, L. O.. Pricing Stock Options in a Jump-Diffusion Model with Stochastic Volatility and Interest Rates: Applications of Fourier Inversion Methods. Department of Finance, University of Georgia, 1997.

SONER, H. M.; SHREVE, S. E. and CVITANI´C, J.. There is no nontrivial hedging portfolio for option pricing with transaction costs. Ann. Appl. Probab., 5(2):327–355, 1995.

STOLL, H. R.. Inferring the Components of the *Bid-ask spread*: Theory and Empirical Tests. Journal of Finance 44: 115-134, 1989.

THORP, E. O. and KASSOUF, T.. Beat the Market: A Scientific Stock Market System. 1st edition 1st. Ed, Random House, 1967.

WHALLEY, A. E. and WILMOTT, P.. An asymptotic analysis of an optimal hedging model for option pricing with transaction costs. *Math. Finance,* 7(3):307–324, 1997.

WIGGINS, J. B.. Option values under stochastic volatility: Theory and empirical estimates. *Journal of Financial Economics*, 19: 351-372, 1987.

ANEXOS

Anexo 1 – Detalhes das opções de VALE3 estudadas.

Ativo objeto	**VALE3**		Preço de referência (R$)	36.18	
Preço de Exercício (R$)	Prazo (dias corridos)	Taxa Livre Risco (% a.a.)	Taxa Média Aluguel (% a.a.)	Delta Inicial (%)	Gamma Inicial
41.00	92	6.90%	0.25%	23.25%	0.0620
37.00	92	6.90%	0.25%	51.14%	0.0772
33.50	92	6.90%	0.25%	75.30%	0.0568
44.00	182	6.80%	0.25%	24.07%	0.0424
38.00	182	6.80%	0.25%	51.28%	0.0504
33.00	182	6.80%	0.25%	74.05%	0.0380
49.00	363	7.00%	0.25%	26.56%	0.0299
40.00	363	7.00%	0.25%	52.08%	0.0348
33.50	363	7.00%	0.25%	72.00%	0.0263

Anexo 2 – Detalhes das opções de ITUB4 estudadas.

Ativo objeto	**ITUB4**		Preço de referência (R$)	41.59	
Preço de Exercício (R$)	Prazo (dias corridos)	Taxa Livre Risco (% a.a.)	Taxa Média Aluguel (% a.a.)	Delta Inicial (%)	Gamma Inicial
47.00	92	6.90%	0.50%	23.79%	0.0545
42.70	92	6.90%	0.50%	49.85%	0.0671
38.70	92	6.90%	0.50%	74.11%	0.0506
50.40	182	6.80%	0.50%	23.48%	0.0376
43.80	182	6.80%	0.50%	50.24%	0.0453
38.10	182	6.80%	0.50%	73.59%	0.0343
56.50	363	7.00%	0.50%	24.92%	0.0259
46.30	363	7.00%	0.50%	50.41%	0.0312
37.90	363	7.00%	0.50%	73.26%	0.0226

Anexo 3 – Detalhes das opções de ABEV3 estudadas.

Ativo objeto	**ABEV3**		Preço de referência (R$)	20.55	
Preço de Exercício (R$)	Prazo (dias corridos)	Taxa Livre Risco (% a.a.)	Taxa Média Aluguel (% a.a.)	Delta Inicial (%)	Gamma Inicial
22.10	92	6.90%	0.50%	27.78%	0.1815
20.90	92	6.90%	0.50%	51.36%	0.2063
19.80	92	6.90%	0.50%	71.76%	0.1634
23.10	182	6.80%	0.50%	28.79%	0.1212
21.00	182	6.80%	0.50%	55.42%	0.1287
19.70	182	6.80%	0.50%	70.66%	0.1064
24.80	363	7.00%	0.50%	30.39%	0.0845
22.20	363	7.00%	0.50%	51.64%	0.0932
19.85	363	7.00%	0.50%	70.39%	0.0712

Anexo 4 – Detalhes das opções de GGBR4 estudadas.

Ativo objeto	**GGBR4**		Preço de referência (R$)	11.13	
Preço de Exercício (R$)	Prazo (dias corridos)	Taxa Livre Risco (% a.a.)	Taxa Média Aluguel (% a.a.)	Delta Inicial (%)	Gamma Inicial
12.75	92	6.90%	0.50%	25.17%	0.1785
11.50	92	6.90%	0.50%	49.24%	0.2142
10.25	92	6.90%	0.50%	73.71%	0.1630
13.75	182	6.80%	0.50%	25.97%	0.1229
11.75	182	6.80%	0.50%	51.32%	0.1413
10.00	182	6.80%	0.50%	73.88%	0.1068
15.75	363	7.00%	0.50%	26.36%	0.0836
12.50	363	7.00%	0.50%	51.51%	0.0977
10.00	363	7.00%	0.50%	73.12%	0.0718

Anexo 5 – Detalhes das opções de PCAR4 estudadas.

Ativo objeto	**PCAR4**		Preço de referência (R$)	73.3	
Preço de Exercício (R$)	Prazo (dias corridos)	Taxa Livre Risco (% a.a.)	Taxa Média Aluguel (% a.a.)	Delta Inicial (%)	Gamma Inicial
83.00	92	6.90%	0.25%	22.11%	0.0311
75.25	92	6.90%	0.25%	49.62%	0.0398
68.00	92	6.90%	0.25%	75.39%	0.0291
88.75	182	6.80%	0.25%	21.56%	0.0219
77.25	182	6.80%	0.25%	49.56%	0.0275
67.00	182	6.80%	0.25%	74.76%	0.0202
99.75	363	7.00%	0.25%	21.74%	0.0150
81.50	363	7.00%	0.25%	49.53%	0.0194
66.75	363	7.00%	0.25%	74.16%	0.0137

Anexo 6 – Custo transacional esperado – VALE3

VALE3: Bid-Ask spread ativo objeto (bps)		Média	4.7
		Desvio padrão	2.6
Preço de Exercício (R$)	Prazo (dias corridos)	Prazo (dias úteis)	Volatilidade Mid mkt (% a.a.)
41.00	92	60	27.9%
37.00	92	60	29.3%
33.50	92	60	31.4%
44.00	182	121	29.3%
38.00	182	121	31.5%
33.00	182	121	33.9%
49.00	363	245	30.8%
40.00	363	245	32.0%
33.50	363	245	35.7%
Custo transacional esperado por ação incorrido em cada compra ou venda no rebalancamento (bps)			2.3

Anexo 7 – Custo transacional esperado – ITUB4

ITUB4: Bid-Ask spread ativo objeto (bps)		Média	3.9
		Desvio padrão	2.2
Preço de Exercício (R$)	Prazo (dias corridos)	Prazo (dias úteis)	Volatilidade Mid mkt (% a.a.)
47.00	92	60	28.0%
42.70	92	60	29.3%
38.70	92	60	31.4%
50.40	182	121	28.3%
43.80	182	121	30.5%
38.10	182	121	32.9%
56.50	363	245	29.8%
46.30	363	245	31.0%
37.90	363	245	35.0%
Custo transacional esperado por ação incorrido em cada compra ou venda no rebalancamento (bps)			1.9

Anexo 8 – Custo transacional esperado – ABEV3

ABEV3: Bid-Ask spread ativo objeto (bps)		Média	6.1
		Desvio padrão	2.3
Preço de Exercício (R$)	Prazo (dias corridos)	Prazo (dias úteis)	Volatilidade Mid mkt (% a.a.)
22.10	92	60	18.4%
20.90	92	60	19.3%
19.80	92	60	20.6%
23.10	182	121	19.7%
21.00	182	121	21.5%
19.70	182	121	22.6%
24.80	363	245	20.4%
22.20	363	245	21.0%
19.85	363	245	23.7%
Custo transacional esperado por ação incorrido em cada compra ou venda no rebalancamento (bps)			3.0

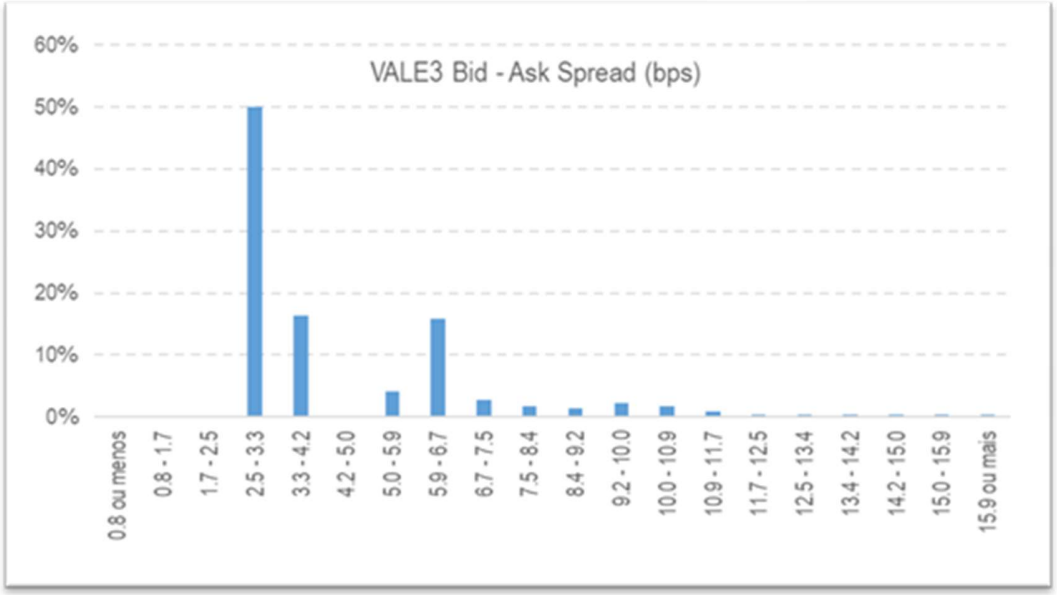
Anexo 9 – Custo transacional esperado – GGBR4

GGBR4: Bid-Ask spread ativo objeto (bps)		Média	10.4
		Desvio padrão	3.8
Preço de Exercício (R$)	Prazo (dias corridos)	Prazo (dias úteis)	Volatilidade Mid mkt (% a.a.)
12.75	92	60	32.9%
11.50	92	60	34.3%
10.25	92	60	36.7%
13.75	182	121	34.2%
11.75	182	121	36.5%
10.00	182	121	39.3%
15.75	363	245	35.5%
12.50	363	245	37.0%
10.00	363	245	41.4%
Custo transacional esperado por ação incorrido em cada compra ou venda no rebalancamento (bps)			5.2

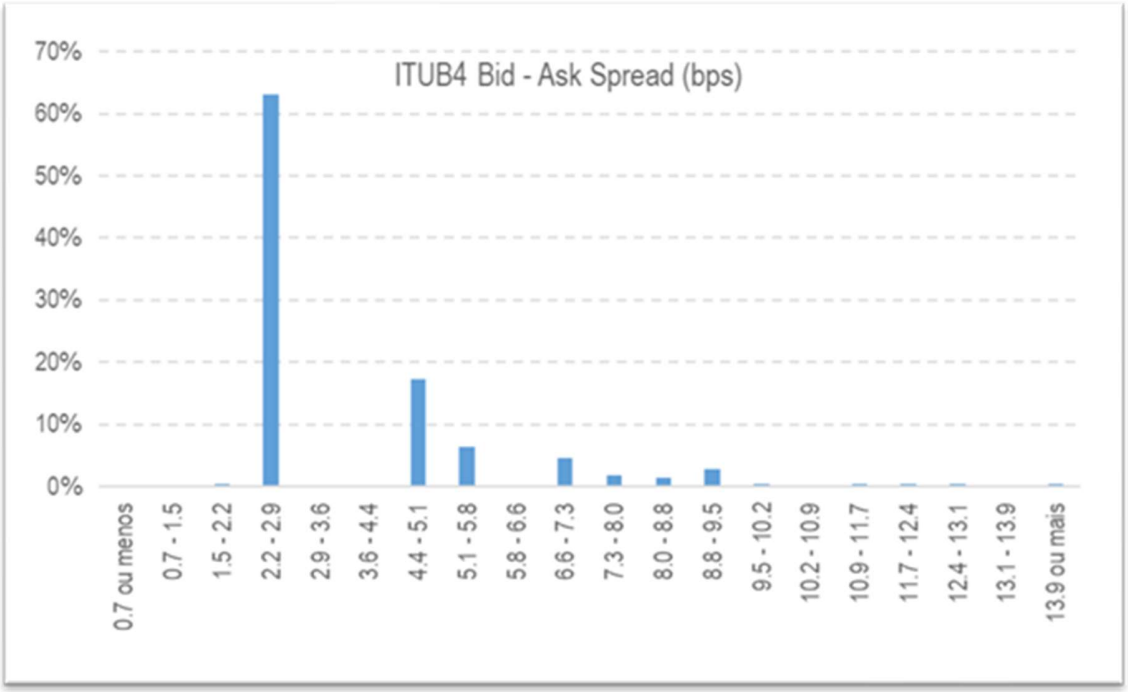
Anexo 10 – Custo transacional esperado – PCAR4

PCAR4: Bid-Ask spread ativo objeto (bps)		Média	7.9
		Desvio padrão	4.3
Preço de Exercício (R$)	Prazo (dias corridos)	Prazo (dias úteis)	Volatilidade Mid mkt (% a.a.)
83.00	92	60	26.7%
75.25	92	60	28.0%
68.00	92	60	30.2%
88.75	182	121	26.3%
77.25	182	121	28.5%
67.00	182	121	30.9%
99.75	363	245	27.0%
81.50	363	245	28.3%
66.75	363	245	32.3%
Custo transacional esperado por ação incorrido em cada compra ou venda no rebalancamento (bps)			3.9

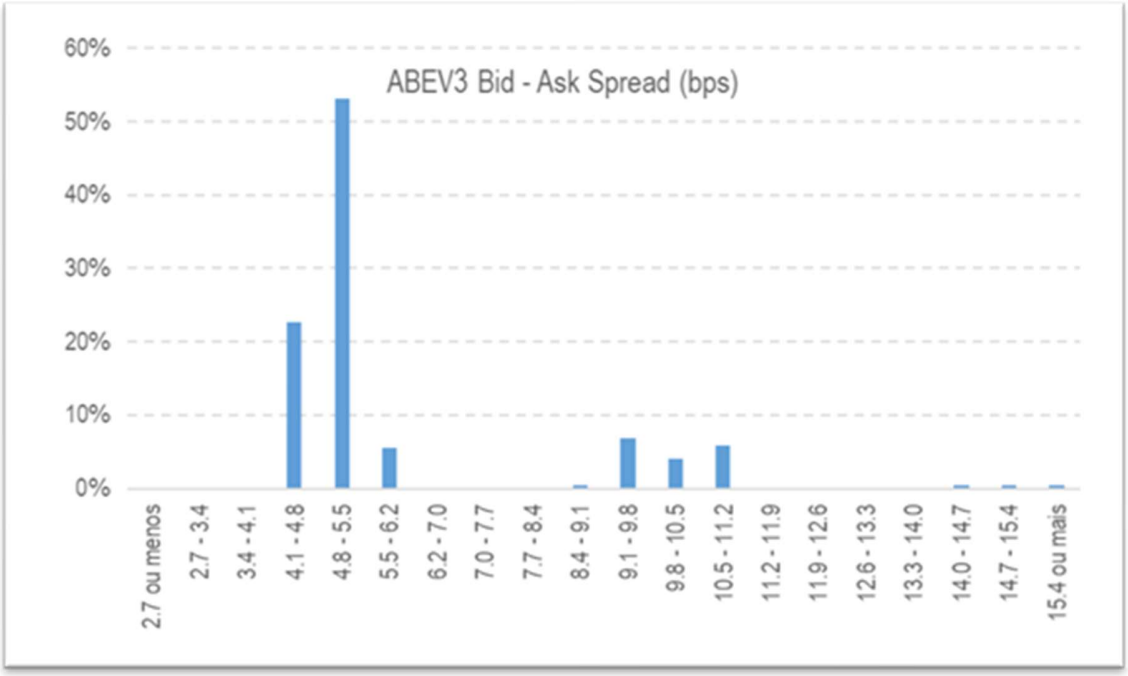
Anexo 11 – Distribuição do bid-ask spread do ativo objeto (bps) – VALE3



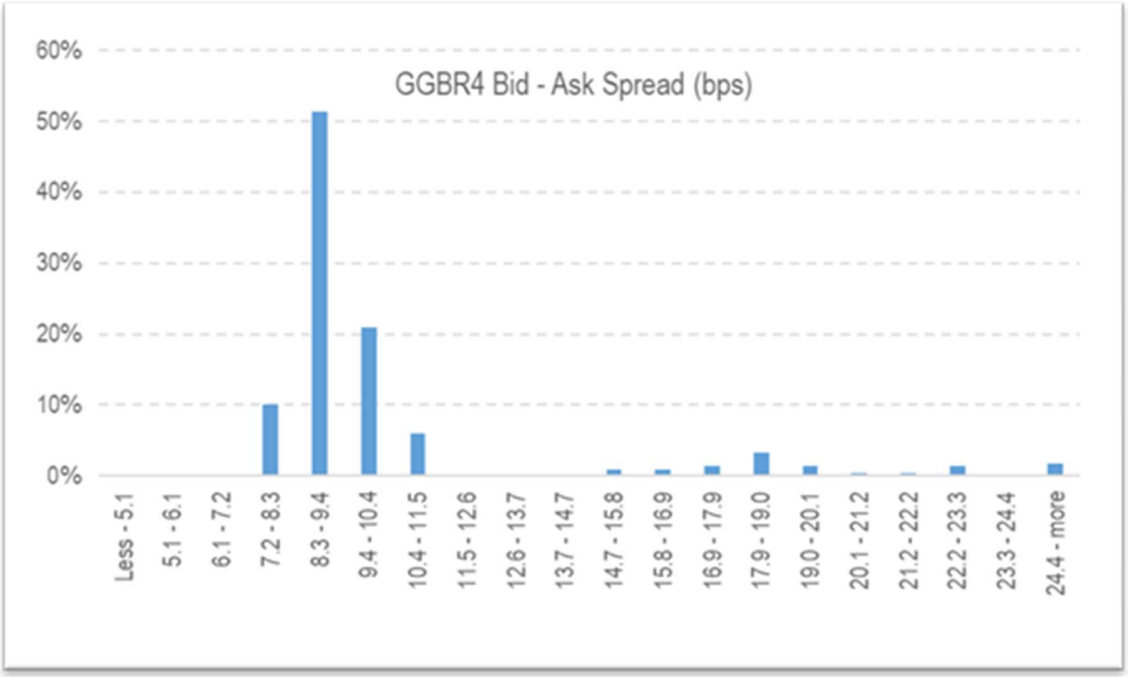
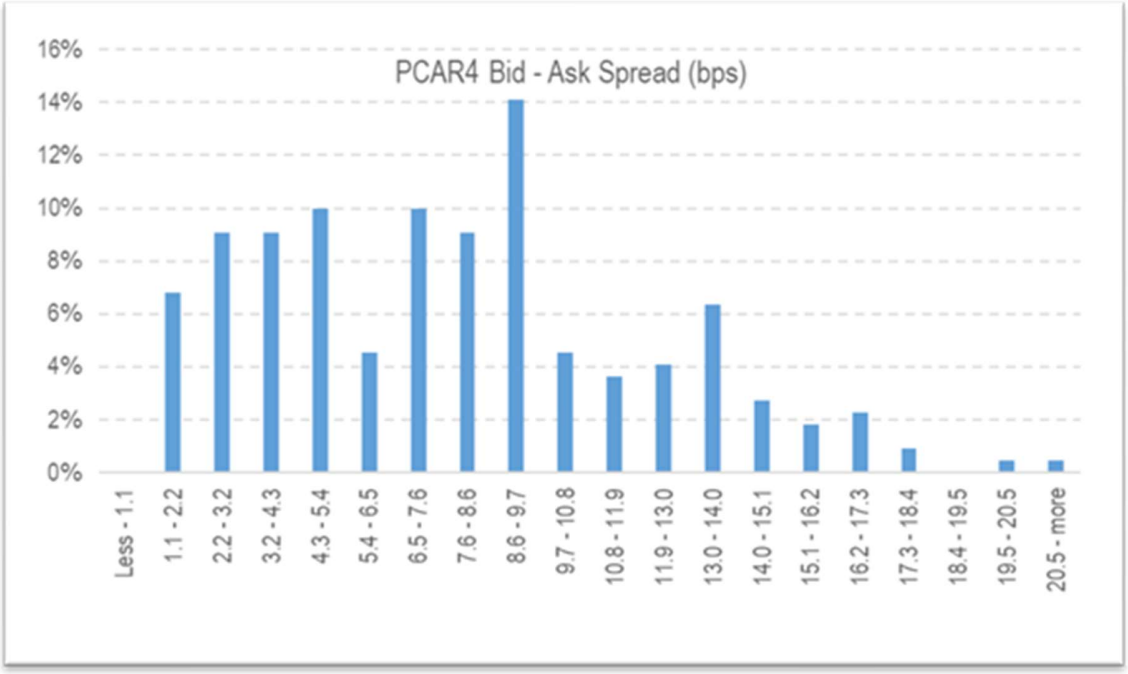
Anexo 12 – Distribuição do bid-ask spread do ativo objeto (bps) – ITUB4



Anexo 13 – Distribuição do bid-ask spread do ativo objeto (bps) – ABEV3



Anexo 14 – Distribuição do bid-ask spread do ativo objeto (bps) – GGBR4



Anexo 15 – Distribuição do bid-ask spread do ativo objeto (bps) – PCAR4